BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Entraînement	8

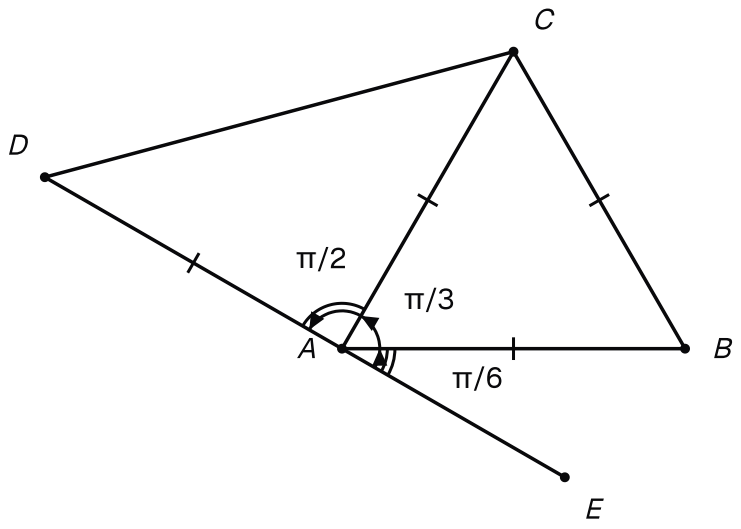
Exercice 1

Un triangle équilatéral et un angle droit

Le triangle ABC est équilatéral et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Le point D est tel que le triangle ACD est rectangle isocèle en A, avec $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Enfin, E est un point distinct de A tel que $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.



Les données : le triangle équilatéral direct ABC, le triangle ACD rectangle isocèle en A, et le point E, avec les trois angles orientés de l'énoncé.

1.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ fait le lien entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

D'après la relation de Chasles (F03) :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\\ &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\\ &= \frac{5\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $\frac{5\pi}{6}$ appartient à $]-\pi, \pi]$, la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est $\frac{5\pi}{6}$.

2.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$: un vecteur opposé ajoute π.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. D'après les conséquences de la relation de Chasles (F04) et la question 1 :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}) &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \pi \\ &\equiv \frac{11\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Ce réel dépasse π ; on retranche 2π : $\frac{11\pi}{6} - 2\pi = -\frac{\pi}{6}$.

Conclusion. Comme $-\frac{\pi}{6}$ appartient à $]-\pi, \pi]$, la mesure principale est $-\frac{\pi}{6}$.

3.

Montrer que les points A, D et E sont alignés, et que A est situé entre D et E.

INDICE

Calcule une mesure de $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ en passant par $\overrightarrow{AB}$, puis utilise F05 avec ses deux cas.

CORRIGÉ

Mesure de l'angle. D'après la relation de Chasles (F03) et la question 1 :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) \\ &\equiv (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \\ &\equiv \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} \\ &\equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Alignement. D'après la caractérisation de la colinéarité (F05), une mesure égale à π modulo 2π signifie que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Conclusion. Les points A, D et E sont alignés, et A est situé entre D et E.

4.

Soit F le point tel que $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AC}$. Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AF} = 2\left(-\overrightarrow{AC}\right)$ et applique F04 deux fois.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AF} = 2\left(-\overrightarrow{AC}\right)$ avec $2 > 0$. On applique deux fois les conséquences de la relation de Chasles (F04) : le coefficient positif ne change pas l'angle, le vecteur opposé ajoute π.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) &\equiv \left(-\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} + \pi \\ &= \frac{3\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On retranche 2π : $\dfrac{3\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{2}$, qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. Pour $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$, la mesure principale est $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2

Quatre identités à démontrer

1.

Montrer que, pour tout réel x, $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

INDICE

Une différence de deux carrés se factorise : $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, avec $A = \cos^2 x$ et $B = \sin^2 x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel.

Factorisation. On factorise une différence de deux carrés, avec $A = \cos^2 x$ et $B = \sin^2 x$:

$$\begin{aligned}&\cos^4 x - \sin^4 x\\ &= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\\ &\quad \times \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right).\end{aligned}$$

Chaque facteur. D'après la relation fondamentale (F07), le second facteur vaut 1. D'après les formules de duplication (F12), le premier vaut $\cos(2x)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

2.

Soit x un réel tel que $\cos x \neq 0$. Montrer que $1 + \cos(2x) \neq 0$, puis que :

$$\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan x.$$

INDICE

Avec F12, écris $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$ et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

CORRIGÉ

Dénominateur. D'après les formules de duplication (F12), $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, donc :

$$1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x.$$

Comme $\cos x \neq 0$, ce nombre est non nul.

Quotient. Toujours d'après F12, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} &= \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x}\\ &= \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \tan x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, on a $1 + \cos(2x) \neq 0$ et $\dfrac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan x$.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

INDICE

Écris $3x = 2x + x$, applique F10, puis remplace $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ et $\sin^2 x$ à l'aide de F12 et F07.

CORRIGÉ

Soit x un réel.

Formule d'addition. D'après les formules d'addition (F10), avec $a = 2x$ et $b = x$:

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x)\cos x \\ &\quad - \sin(2x)\sin x.\end{aligned}$$

Duplication. D'après les formules de duplication (F12), $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$. On remplace ensuite $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ (relation fondamentale, F07) :

$$\begin{aligned}&\cos(3x) \\ &= 2\cos^3 x - \cos x \\ &\quad - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x \\ &\quad - 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

4.

En déduire que, pour tout réel x, $\cos(3x) = \cos x\left(2\cos(2x) - 1\right)$.

INDICE

Mets $\cos x$ en facteur dans le résultat de la question 3, puis remplace $\cos^2 x$ par une linéarisation.

CORRIGÉ

Soit x un réel. D'après la question 3, en mettant $\cos x$ en facteur :

$$\begin{aligned}&\cos(3x) \\ &= \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right).\end{aligned}$$

D'après les formules de linéarisation (F12), $4\cos^2 x = 2\big(1 + \cos(2x)\big)$. Donc :

$$\begin{aligned}&4\cos^2 x - 3 \\ &= 2 + 2\cos(2x) - 3 \\ &= 2\cos(2x) - 1.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos(3x) = \cos x\left(2\cos(2x) - 1\right)$.

Exercice 3

Les lignes trigonométriques de π/8

1.

À l'aide d'une formule de duplication, calculer $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

INDICE

Avec $a = \frac{\pi}{8}$, la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ fait intervenir $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

CORRIGÉ

Carré du cosinus. D'après les formules de duplication (F12), avec $a = \frac{\pi}{8}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Signe. Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ (FO1).

Conclusion. $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2.

Calculer de même la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

INDICE

Utilise $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$, puis le signe du sinus sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

CORRIGÉ

Carré du sinus. D'après les formules de duplication (F12), avec $a = \frac{\pi}{8}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Signe. Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ (FO1). De plus $2 - \sqrt{2} > 0$.

Conclusion. On obtient $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3.

On pose $t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Montrer que $t^2 + 2t - 1 = 0$, puis en déduire que $t = \sqrt{2} - 1$.

INDICE

Applique la formule de $\tan(2a)$ de F12 avec $a = \frac{\pi}{8}$, après avoir vérifié ses deux conditions. Choisis ensuite la racine du bon signe.

CORRIGÉ

Conditions. Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ (F01). De plus $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$. Les deux conditions de F12 sont vérifiées pour la formule de duplication de la tangente, et $t > 0$.

Équation vérifiée par t. D'après cette formule (F12), avec $a = \frac{\pi}{8}$:

$$1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2t}{1 - t^2},$$

donc $1 - t^2 = 2t$, soit $t^2 + 2t - 1 = 0$.

Choix de la racine. Le discriminant de $X^2 + 2X - 1$ vaut $4 + 4 = 8$; ses racines sont $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$. Or $t > 0$ et $-1 - \sqrt{2} < 0$.

Conclusion. t vérifie $t^2 + 2t - 1 = 0$. Donc $t = \sqrt{2} - 1$.

4.

En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

INDICE

$\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$: cherche la formule d'angle associé correspondante.

CORRIGÉ

On a $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$. D'après les angles associés (F08), puis la question 2 :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 4

Une équation du second degré en sin x

On considère l'équation (E), d'inconnue réelle x :

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0.$$

1.

Montrer que (E) équivaut à $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

INDICE

Remplace $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. D'après la relation fondamentale (F07), $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Donc :

$$\begin{aligned} &2\cos^2 x + 3\sin x - 3 \\ &= 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 3 \\ &= -\left(2\sin^2 x - 3\sin x + 1\right). \end{aligned}$$

Un nombre est nul si et seulement si son opposé est nul.

Conclusion. (E) équivaut à $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

INDICE

Calcule le discriminant.

CORRIGÉ

Le discriminant vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$. Il est strictement positif : l'équation a deux racines.

$$X_1 = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2},$$
$$X_2 = \frac{3 + 1}{4} = 1.$$

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$, $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

3.

En déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Avec $X = \sin x$: résous $\sin x = 1$ et $\sin x = \dfrac{1}{2}$, en écrivant toutes les familles.

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, avec $X = \sin x$, l'équation (E) équivaut à $\sin x = 1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$. On résout chacune avec les équations fondamentales (F18).

- $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$: F18 donne $x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, la même famille.
- $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$: F18 donne $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S = &\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &\cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &\cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

4.

Donner les solutions de (E) dans $[0, 4\pi[$.

INDICE

Chaque famille de période 2π donne deux valeurs dans un intervalle de longueur 4π.

CORRIGÉ

Soit $\alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Comme $0 < \alpha < 2\pi$, la condition

$$0 \leq \alpha + 2k\pi < 4\pi$$

impose $k \in \{0, 1\}$. Chaque famille donne donc α et $\alpha + 2\pi$.

Conclusion. Dans $[0, 4\pi[$:

$$\begin{aligned} S = \Big\{&\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \\ &\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}\Big\}. \end{aligned}$$

Exercice 5

√6 cos x − √2 sin x : une équation, une inéquation

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

INDICE

Calcule $r = \sqrt{6+2}$, puis $\frac{a}{r}$ et $\frac{b}{r}$: ce sont le cosinus et le sinus d'un angle remarquable.

CORRIGÉ

On suit la méthode d'écriture sous la forme $r\cos(x-\varphi)$ (M06), avec $a = \sqrt{6}$ et $b = -\sqrt{2}$.

Calcul de r. $r = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Choix de φ.

$$\frac{a}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Le réel $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ a ce cosinus et ce sinus.

Conclusion. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$ (F16), pour tout réel x, $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

2.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2$.

INDICE

Ramène-toi à $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CORRIGÉ

Équation réduite. D'après la question 1, l'équation équivaut à :

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Les deux familles. D'après les équations fondamentales (F18) :

$$x + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

ou

$$x + \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi],$$

soit $x \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

Sélection. Chaque famille a un seul élément dans $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, $S = \left\{-\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}\right\}$.

3.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x \geq 2$.

INDICE

Pose $X = x + \dfrac{\pi}{6}$ et écris l'intervalle parcouru par X quand x parcourt $]-\pi, \pi]$.

CORRIGÉ

Changement d'inconnue. On pose $X = x + \dfrac{\pi}{6}$. D'après la question 1, l'inéquation équivaut à $\cos X \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Quand x parcourt $]-\pi, \pi]$, X parcourt $\left]-\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right]$.

Lecture sur le cercle. Sur cet intervalle, $\cos X \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $X \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. L'autre arc où le cosinus dépasse $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ commence en $\dfrac{7\pi}{4}$, hors de l'intervalle (méthode M08).

Retour à x. On obtient $-\dfrac{\pi}{4} \leq x + \dfrac{\pi}{6} \leq \dfrac{\pi}{4}$, soit $-\dfrac{5\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{\pi}{12}$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, $S = \left[-\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}\right]$.

Exercice 6

Factoriser pour résoudre

1.

Montrer que, pour tout réel x, $\cos(5x) + \cos(3x) = 2\cos(4x)\cos x$.

INDICE

Applique F15 avec $p = 5x$ et $q = 3x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. D'après la transformation d'une somme en produit (F15), avec $p = 5x$ et $q = 3x$: $\dfrac{p+q}{2} = 4x$ et $\dfrac{p-q}{2} = x$.

Conclusion. Pour tout réel x, on a donc $\cos(5x) + \cos(3x) = 2\cos(4x)\cos x$.

2.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos(5x) + \cos(3x) = 0$.

INDICE

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Utilise F17 pour chaque facteur.

CORRIGÉ

D'après la question 1, l'équation équivaut à $2\cos(4x)\cos x = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $\cos(4x) = 0$ ou $\cos x = 0$. On applique l'annulation du cosinus (F17).

- $\cos(4x) = 0$ équivaut à $4x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, soit $x \equiv \dfrac{\pi}{8}\ \left[\dfrac{\pi}{4}\right]$. Dans $[0, \pi]$: $\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}$.
- $\cos x = 0$ équivaut à $x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Dans $[0, \pi]$: $\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. Dans $[0, \pi]$:

$$S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}.$$

3.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos(5x) + \cos(3x) = \cos x$.

INDICE

Avec la question 1, tout passe à gauche : $\cos x$ se met en facteur. Ne divise pas par $\cos x$.

CORRIGÉ

Factorisation. D'après la question 1, l'équation équivaut à $2\cos(4x)\cos x - \cos x = 0$, c'est-à-dire :

$$\cos x \left(2\cos(4x) - 1\right) = 0,$$

soit $\cos x = 0$ ou $\cos(4x) = \dfrac{1}{2}$.

Premier facteur. $\cos x = 0$ donne, dans $[0, \pi]$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ (question 2).

Second facteur. $\cos(4x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. D'après les équations fondamentales (F18), $4x \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $4x \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. En divisant par 4, le module aussi (W04) :

$$x \equiv \frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

ou

$$x \equiv -\frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{2}\right].$$

Dans $[0, \pi]$: $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{7\pi}{12}$, puis $\dfrac{5\pi}{12}$, $\dfrac{11\pi}{12}$.

Conclusion. Dans $[0, \pi]$:

$$S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}.$$

Exercice 7

Signe d'un produit de deux facteurs trigonométriques

On veut résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$$(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) < 0.$$

1.

Étudier le signe de $2\cos x + 1$ sur $]-\pi, \pi]$.

INDICE

Résous d'abord $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi, \pi]$. Les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse supérieure à $-\dfrac{1}{2}$ forment l'arc qui contient I.

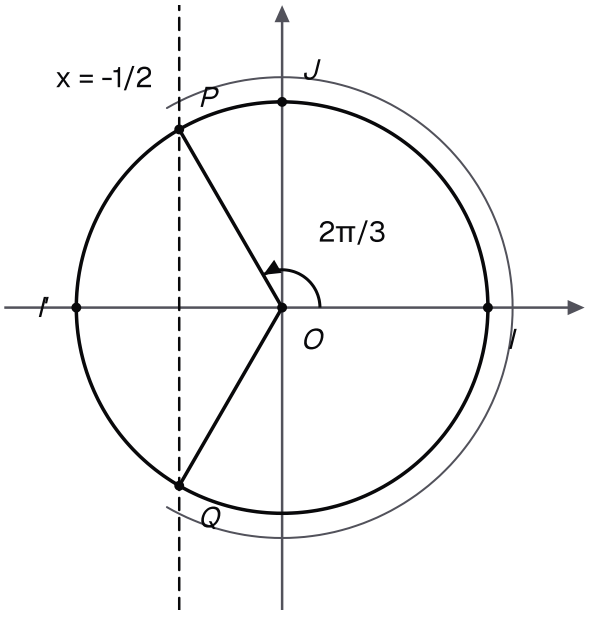
CORRIGÉ

Annulation. On a $-\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$. D'après les équations fondamentales (F18), dans $]-\pi, \pi]$, $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ pour $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Lecture sur le cercle. L'abscisse du point de $\mathcal{C}$ dépasse $-\dfrac{1}{2}$ sur l'arc qui contient I, entre ces deux points.

Conclusion.

- $2\cos x + 1 > 0$ sur $\left]-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right[$;
- $2\cos x + 1 < 0$ sur $\left]-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$;
- $2\cos x + 1 = 0$ en $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.



Le signe de 2cos x + 1 : strictement positif sur l'arc de Q à P qui passe par I, extrémités d'abscisses curvilignes ±2π/3 exclues.

2.

Étudier le signe de $2\sin x - 1$ sur $]-\pi, \pi]$.

INDICE

Résous $\sin x = \dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi, \pi]$; l'ordonnée dépasse $\dfrac{1}{2}$ sur un arc du haut du cercle.

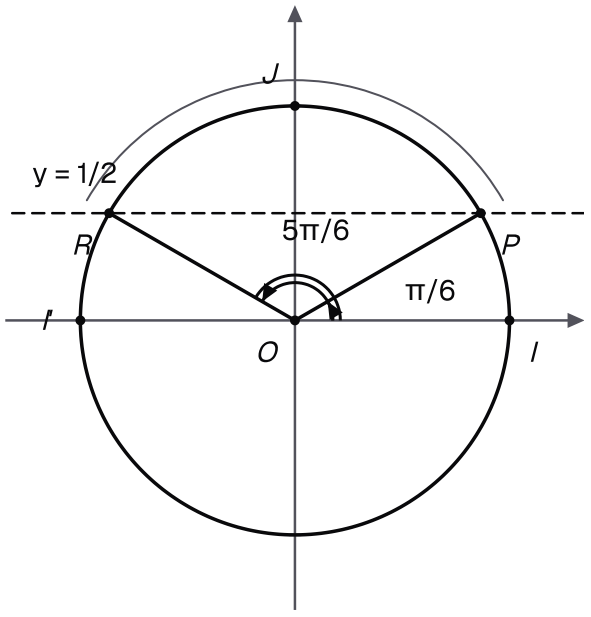
CORRIGÉ

Annulation. On a $\dfrac{1}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. D'après les équations fondamentales (F18), dans $]-\pi, \pi]$, $\sin x = \dfrac{1}{2}$ pour $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Lecture sur le cercle. L'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ dépasse $\dfrac{1}{2}$ sur l'arc du haut compris entre ces deux points.

Conclusion.

- $2\sin x - 1 > 0$ sur $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$;
- $2\sin x - 1 < 0$ sur $\left]-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$;
- $2\sin x - 1 = 0$ en $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.



Le signe de 2sin x – 1 : strictement positif sur l'arc de P à R qui passe par J, entre π/6 et 5π/6.

3.

Dresser le tableau de signes du produit sur $]-\pi, \pi]$, puis résoudre l'inéquation.

INDICE

Range les quatre réels $-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ dans l'ordre croissant. L'inégalité est stricte : les zéros sont exclus.

CORRIGÉ

Ordre des zéros.

$$-\pi < -\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} < \pi.$$

Tableau de signes. D'après les questions 1 et 2, et la règle des signes d'un produit (méthode M08) :

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$2\cos x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2\sin x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Lecture. Le produit est strictement négatif sur deux intervalles ouverts ; les zéros sont exclus car l'inégalité est stricte.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$:

$$S = \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[.$$

Exercice 8

La variable t = tan(x/2) et une solution perdue

Pour tout réel x tel que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$, on note $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1.

Soit x un réel tel que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. Montrer que $1 + \cos x \neq 0$ et que :

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{(1+t)^2}{2}.$$

INDICE

Remplace $\cos x$ et $\sin x$ par leurs expressions en t (F13), puis réduis au même dénominateur $1 + t^2$.

CORRIGÉ

D'après les expressions en fonction de $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$ (F13), avec $a = x$:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$
$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Dénominateur.

$$\begin{aligned} 1 + \cos x &= \frac{1 + t^2 + 1 - t^2}{1 + t^2} \\ &= \frac{2}{1 + t^2}, \end{aligned}$$

qui est non nul.

Numérateur.

$$\begin{aligned} 1 + \sin x &= \frac{1 + t^2 + 2t}{1 + t^2} \\ &= \frac{(1+t)^2}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Quotient. En divisant :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} &= \frac{(1+t)^2}{1 + t^2} \times \frac{1 + t^2}{2} \\ &= \frac{(1+t)^2}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x tel que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$, $1 + \cos x \neq 0$ et $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{(1+t)^2}{2}$.

2.

Résoudre dans $]-\pi,\pi[$ l'équation $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$, en l'écrivant à l'aide de t.

INDICE

Pour $x\in]-\pi,\pi[$, on a $\frac{x}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0$. Multiplie ensuite par $1+t^2$.

CORRIGÉ

Condition. Soit $x\in]-\pi,\pi[$. Alors $\frac{x}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right)>0$ et F13 s'applique.

Équation en t. L'équation équivaut à :

$$\sqrt{3}\times\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}=1.$$

En multipliant par $1+t^2>0$:

$$2\sqrt{3}\,t-1+t^2=1+t^2,$$

donc $2\sqrt{3}\,t=2$, soit $t=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Retour à x. Ainsi $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$. D'après les équations fondamentales (F18), $\frac{x}{2}\equiv\frac{\pi}{6}\ [\pi]$. Comme $\frac{x}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, seul $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}$ convient.

Conclusion. Dans $]-\pi,\pi[$, on obtient $x=\frac{\pi}{3}$. Donc $S=\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

3.

Vérifier que π est solution de l'équation $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$. En déduire ses solutions dans $]-\pi,\pi]$, et expliquer pourquoi la question 2 ne donnait pas π.

INDICE

Calcule $\sin\pi$ et $\cos\pi$. Que vaut $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

CORRIGÉ

Vérification.

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}\sin\pi-\cos\pi\\&=0-(-1)=1.\end{aligned}$$

Le réel π est donc solution.

Solutions dans $]-\pi,\pi]$. On a $]-\pi,\pi]=]-\pi,\pi[\cup\{\pi\}$. Avec la question 2, les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont $\frac{\pi}{3}$ et π : $S=\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$.

Explication. Pour $x=\pi$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0$: le nombre t n'existe pas, et F13 ne s'applique pas. Le changement d'inconnue ne voit donc aucun réel $x\equiv\pi\ [2\pi]$: il faut toujours tester ces réels à part.

Conclusion. Dans $]-\pi,\pi]$, l'équation a pour solutions $\frac{\pi}{3}$ et π ; la question 2 excluait π, où t n'est pas défini.

4.

Contrôler le résultat de la question 3 à l'aide de la forme $r\cos(x-\varphi)$.

INDICE

Ici $a=-1$ et $b=\sqrt{3}$: calcule r, puis cherche φ par son cosinus et son sinus.

CORRIGÉ

Forme $r\cos(x-\varphi)$. On suit la méthode d'écriture sous la forme $r\cos(x-\varphi)$ (M06), avec $a=-1$ et $b=\sqrt{3}$: $r=\sqrt{1+3}=2$, $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le réel $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ convient.

D'après la transformation de $a\cos x+b\sin x$ (F16), l'équation équivaut à $2\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$, soit $\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Résolution. D'après les équations fondamentales (F18) :

$$x-\frac{2\pi}{3}\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

ou

$$x-\frac{2\pi}{3}\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

soit $x\equiv\pi\ [2\pi]$ ou $x\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Conclusion. Dans $]-\pi,\pi]$, on retrouve $S=\left\{\dfrac{\pi}{3},\pi\right\}$.