BURHAN

# Calcul trigonométrique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| Calcul trigonométrique | Application | 10 |

## Exercice 1

### Retrouver une mesure principale

Dans tout l'exercice, une mesure principale appartient à $]-\pi, \pi]$.

**1.**

Donner la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est :

- a) $\dfrac{53\pi}{4}$ ;
- b) $-\dfrac{38\pi}{3}$ ;
- c) $\dfrac{101\pi}{6}$.

INDICE

Écris le numérateur près d'un multiple de $2 \times 4 = 8$, de $2 \times 3 = 6$ ou de $2 \times 6 = 12$ : chaque multiple correspond à des tours complets.

**2.**

Les réels $\dfrac{17\pi}{5}$ et $-\dfrac{23\pi}{5}$ sont-ils deux mesures du même angle orienté ? Même question pour $\dfrac{17\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$.

INDICE

Calcule la différence des deux réels et regarde si c'est $2k\pi$ avec $k$ entier.

**3.**

Un élève affirme : « la mesure principale d'un angle de mesure $3\pi$ est $-\pi$ ». Corriger.

INDICE

Regarde la borne de gauche de $]-\pi, \pi]$ : est-elle incluse ?

### Exercice 2

## Chasles pas à pas

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que :

$$(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{5}\ [2\pi],$$

$$(\vec{v},\vec{w}) \equiv \frac{7\pi}{10}\ [2\pi].$$

**1.**

Déterminer la mesure principale de $(\vec{u},\vec{w})$.

INDICE

Insère $\vec{v}$ entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$ : c'est la relation de Chasles.

**2.**

En déduire la mesure principale de $(\vec{w},\vec{u})$.

INDICE

Échanger les deux vecteurs change la mesure en son opposée.

**3.**

Déterminer la mesure principale de $(-\vec{v},\vec{w})$.

INDICE

Remplacer un vecteur par son opposé ajoute $\pi$ à la mesure.

**4.**

Déterminer la mesure principale de $(2\vec{u},-5\vec{w})$.

INDICE

Écris $-5\vec{w} = 5(-\vec{w})$ : les réels $2$ et $5$ sont strictement positifs.

### Exercice 3

## Aligné ou pas ?

Soit $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ cinq points distincts du plan tels que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{9}\ [2\pi],$$
$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{7\pi}{9}\ [2\pi],$$
$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{5\pi}{9}\ [2\pi].$$

**1.**

Montrer que les points $A$, $B$ et $D$ sont alignés. Le point $A$ est-il entre $B$ et $D$ ?

INDICE

Calcule une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ par la relation de Chasles, puis applique F05.

**2.**

Les points $A$, $C$ et $E$ sont-ils alignés ?

INDICE

Passe par $\overrightarrow{AB}$ : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.

### Exercice 4

## Une ligne donne les autres

**1.**

Soit $x$ un réel de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{7}{25}$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

INDICE

Calcule $\cos^2 x$ avec F07, puis regarde de quel côté de l'axe des ordonnées se trouve le point de $\mathcal{C}$.

**2.**

Soit $y$ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que $\tan y = -2$. Calculer $\cos y$ puis $\sin y$.

INDICE

Utilise $1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$, puis $\sin y = \tan y \times \cos y$.

### Exercice 5

## Réduire l'argument, puis simplifier

**1.**

Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{29\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{31\pi}{3}\right)$.

INDICE

Retire d'abord des multiples de $2\pi$ (ou de $\pi$ pour la tangente), puis reconnais un angle associé à $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{3}$.

**2.**

Simplifier, pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} B = &\sin(3\pi - x) \\ &- \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) \\ &+ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

INDICE

$3\pi - x = (\pi - x) + 2\pi$ et $\dfrac{9\pi}{2} + x = \left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + 4\pi$. Pour le dernier terme, le cosinus est pair.

**3.**

En déduire la valeur de $B$ pour $x = \dfrac{7\pi}{6}$.

INDICE

Calcule $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ en écrivant $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$.

### Exercice 6

## Valeurs exactes par les formules d'addition

**1.**

Vérifier que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, puis calculer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

INDICE

Réduis au même dénominateur $12$, puis applique la formule de $\cos(a+b)$.

**2.**

Calculer $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ en écrivant $-\dfrac{\pi}{12}$ comme différence de deux angles remarquables.

INDICE

Écris $-\dfrac{\pi}{12}$ avec le dénominateur $12$, puis cherche deux angles remarquables dont la différence convient.

**3.**

Calculer $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ à l'aide de la formule de la tangente d'une somme.

INDICE

Vérifie les trois cosinus non nuls de F11, puis rends le dénominateur rationnel avec la quantité conjuguée.

### Exercice 7

## Linéariser des carrés et une puissance quatrième

**1.**

Linéariser, pour tout réel $x$, les expressions $\cos^2(3x)$ et $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

INDICE

Applique F12 avec $a = 3x$, puis avec $a = \dfrac{x}{2}$ : l'argument du résultat est le double de $a$.

**2.**

Linéariser $\sin^2 x$, puis en déduire que, pour tout réel $x$ :

$$\sin^4 x = \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}.$$

INDICE

Écris $\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2$, linéarise $\sin^2 x$, développe, puis linéarise $\cos^2(2x)$.

**3.**

Calculer $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, puis la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

INDICE

Linéarise avec $a = \dfrac{5\pi}{12}$. Avant d'extraire la racine, donne le signe du cosinus cherché.

### Exercice 8

## Des sommes aux produits, et retour

**1.**

Transformer en produit, pour tout réel $x$ : $\cos(5x) + \cos x$, puis $\sin(4x) - \sin(2x)$.

INDICE

Applique F15 : calcule d'abord la demi-somme et la demi-différence des deux arguments.

**2.**

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

INDICE

La demi-somme des deux arguments est un angle remarquable, la demi-différence aussi.

**3.**

Calculer la valeur exacte de $2\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

INDICE

Transforme ce produit en somme avec F14 : la différence et la somme des arguments sont des angles remarquables.

### Exercice 9

## Deux expressions sous la forme r cos(x – φ)

**1.**

Écrire, pour tout réel $x$, $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$.

INDICE

Calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis $\frac{a}{r}$ et $\frac{b}{r}$ : ce sont le cosinus et le sinus de $\varphi$.

**2.**

Écrire, pour tout réel $x$, $-3\cos x + 3\sqrt{3}\sin x$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$.

INDICE

Calcule $r = \sqrt{9 + 27}$. Le cosinus de $\varphi$ est négatif et son sinus positif.

**3.**

En déduire la plus grande et la plus petite valeur de $-3\cos x + 3\sqrt{3}\sin x$, et les réels de $]-\pi, \pi]$ où elles sont atteintes.

INDICE

Un cosinus prend toutes les valeurs de $[-1, 1]$ ; il vaut $1$ quand son argument est congru à $0$ modulo $2\pi$.

### Exercice 10

## Trois équations de référence, puis une inéquation

**1.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis donner ses solutions dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Écris les deux familles de F18.

**2.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Pose $X = 3x - \dfrac{\pi}{4}$ et résous $\cos X = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. En divisant par $3$, divise aussi le module.

**3.**

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Écris la condition $\cos x \neq 0$, puis $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ : une seule famille, modulo $\pi$.

**4.**

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Résous d'abord l'équation associée dans $]-\pi, \pi]$, puis repère sur le cercle les points d'abscisse au moins $\dfrac{1}{2}$.