BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Application	10

Exercice 1

Retrouver une mesure principale

Dans tout l'exercice, une mesure principale appartient à $]-\pi, \pi]$.

1.

Donner la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est :

- a) $\dfrac{53\pi}{4}$;
- b) $-\dfrac{38\pi}{3}$;
- c) $\dfrac{101\pi}{6}$.

INDICE

Écris le numérateur près d'un multiple de $2 \times 4 = 8$, de $2 \times 3 = 6$ ou de $2 \times 6 = 12$: chaque multiple correspond à des tours complets.

CORRIGÉ

D'après la méthode de recherche de la mesure principale (M01), on retranche à chaque mesure un multiple entier de 2π pour arriver dans $]-\pi, \pi]$.

a) On écrit $53 = 56 - 3$:

$$\begin{aligned}\frac{53\pi}{4} &= \frac{56\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \\ &= 7 \times 2\pi - \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

La mesure principale est $-\dfrac{3\pi}{4}$.

b) On écrit $-38 = -36 - 2$:

$$\begin{aligned}-\frac{38\pi}{3} &= -\frac{36\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \\ &= -6 \times 2\pi - \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

La mesure principale est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

c) On écrit $101 = 96 + 5$:

$$\begin{aligned}\frac{101\pi}{6} &= \frac{96\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} \\ &= 8 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

La mesure principale est $\dfrac{5\pi}{6}$.

Conclusion. Les trois réels obtenus appartiennent à $]-\pi, \pi]$: les mesures principales sont $-\dfrac{3\pi}{4}$, $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

2.

Les réels $\frac{17\pi}{5}$ et $-\frac{23\pi}{5}$ sont-ils deux mesures du même angle orienté ? Même question pour $\frac{17\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$.

INDICE

Calcule la différence des deux réels et regarde si c'est $2k\pi$ avec k entier.

CORRIGÉ

D'après la définition des mesures d'un angle orienté (F02), deux réels mesurent le même angle si et seulement si leur différence est de la forme $2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Premier couple.

$$\frac{17\pi}{5} - \left(-\frac{23\pi}{5}\right) = \frac{40\pi}{5} = 8\pi = 4 \times 2\pi.$$

La différence est un multiple entier de 2π : ce sont deux mesures du même angle.

Second couple. On a $\frac{17\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = 3\pi$. Si l'on avait $3\pi = 2k\pi$, on aurait $k = \frac{3}{2}$, qui n'est pas entier. Ce ne sont donc pas deux mesures du même angle.

Remarque. Comme $3\pi = \pi + 2\pi$, le cercle trigonométrique (F01) montre que les points de $\mathcal{C}$ associés à $\frac{2\pi}{5}$ et à $\frac{2\pi}{5} + 3\pi$ sont symétriques par rapport à O.

Conclusion. $\frac{17\pi}{5}$ et $-\frac{23\pi}{5}$ mesurent le même angle orienté ; $\frac{17\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ ne mesurent pas le même angle.

3.

Un élève affirme : « la mesure principale d'un angle de mesure 3π est $-\pi$ ». Corriger.

INDICE

Regarde la borne de gauche de $]-\pi, \pi]$: est-elle incluse ?

CORRIGÉ

On a $3\pi = \pi + 2\pi$ et $3\pi = -\pi + 4\pi$: les réels π et $-\pi$ sont deux mesures de cet angle.

Or la mesure principale appartient à $]-\pi, \pi]$ (erreur W01 : la borne $-\pi$ est exclue). Le réel $-\pi$ n'appartient pas à cet intervalle, alors que π y appartient.

Conclusion. L'élève se trompe. La mesure principale est donc π, et non $-\pi$.

Exercice 2

Chasles pas à pas

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que :

$$(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{5}\ [2\pi],$$
$$(\vec{v},\vec{w}) \equiv \frac{7\pi}{10}\ [2\pi].$$

1.

Déterminer la mesure principale de $(\vec{u},\vec{w})$.

INDICE

Insère $\vec{v}$ entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$: c'est la relation de Chasles.

CORRIGÉ

D'après la relation de Chasles (F03) :

$$\begin{aligned}(\vec{u},\vec{w}) &\equiv (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) \\ &\equiv \frac{2\pi}{10} + \frac{7\pi}{10} \\ &\equiv \frac{9\pi}{10}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $\frac{9\pi}{10}$ appartient à $]-\pi,\pi]$, la mesure principale de $(\vec{u},\vec{w})$ est $\frac{9\pi}{10}$.

2.

En déduire la mesure principale de $(\vec{w},\vec{u})$.

INDICE

Échanger les deux vecteurs change la mesure en son opposée.

CORRIGÉ

D'après les conséquences de la relation de Chasles (F04) et la question 1 :

$$\begin{aligned}(\vec{w},\vec{u}) &\equiv -(\vec{u},\vec{w}) \\ &\equiv -\frac{9\pi}{10}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Le réel $-\frac{9\pi}{10}$ appartient à $]-\pi,\pi]$: c'est la mesure principale de $(\vec{w},\vec{u})$.

3.

Déterminer la mesure principale de $(-\vec{v}, \vec{w})$.

INDICE

Remplacer un vecteur par son opposé ajoute π à la mesure.

CORRIGÉ

D'après les conséquences de la relation de Chasles (F04), remplacer $\vec{v}$ par $-\vec{v}$ ajoute π :

$$\begin{aligned}(-\vec{v}, \vec{w}) &\equiv (\vec{v}, \vec{w}) + \pi \\ &\equiv \frac{17\pi}{10}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Ce réel n'est pas dans $]-\pi, \pi]$; on retranche 2π : $\frac{17\pi}{10} - 2\pi = -\frac{3\pi}{10}$, qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. La mesure principale est $-\frac{3\pi}{10}$.

4.

Déterminer la mesure principale de $(2\vec{u}, -5\vec{w})$.

INDICE

Écris $-5\vec{w} = 5(-\vec{w})$: les réels 2 et 5 sont strictement positifs.

CORRIGÉ

Coefficients positifs. On écrit $-5\vec{w} = 5(-\vec{w})$. Comme $2 > 0$ et $5 > 0$, les conséquences de la relation de Chasles (F04) donnent :

$$\begin{aligned}&(2\vec{u}, 5(-\vec{w})) \\ &\equiv (\vec{u}, -\vec{w})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Vecteur opposé. Toujours d'après F04, avec la question 1 :

$$\begin{aligned}(\vec{u}, -\vec{w}) &\equiv (\vec{u}, \vec{w}) + \pi \\ &\equiv \frac{19\pi}{10}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Mesure principale. On a $\frac{19\pi}{10} - 2\pi = -\frac{\pi}{10}$, qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. La mesure principale de $(2\vec{u}, -5\vec{w})$ est $-\frac{\pi}{10}$.

Exercice 3

Aligné ou pas ?

Soit A, B, C, D et E cinq points distincts du plan tels que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{9}\ [2\pi],$$
$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{7\pi}{9}\ [2\pi],$$
$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{5\pi}{9}\ [2\pi].$$

1.

Montrer que les points A, B et D sont alignés. Le point A est-il entre B et D ?

INDICE

Calcule une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ par la relation de Chasles, puis applique F05.

CORRIGÉ

Mesure de l'angle. D'après la relation de Chasles (F03) :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\\ &\equiv \frac{2\pi}{9} + \frac{7\pi}{9}\\ &\equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Alignement. En particulier $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv 0\ [\pi]$. D'après la caractérisation de la colinéarité et de l'alignement (F05), les points A, B et D sont alignés.

Position de A. Une mesure égale à π modulo 2π signifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de sens contraires (F05).

Conclusion. Les points A, B et D sont alignés, et le point A est entre B et D.

2.

Les points A, C et E sont-ils alignés ?

INDICE

Passe par $\overrightarrow{AB}$: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.

CORRIGÉ

Angles inversés. D'après les conséquences de la relation de Chasles (F04) :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{2\pi}{9}\ [2\pi],$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -\frac{5\pi}{9}\ [2\pi].$$

Mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$. D'après la relation de Chasles (F03) :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) &\equiv -\frac{2\pi}{9} - \frac{5\pi}{9} \\ &\equiv -\frac{7\pi}{9}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Test d'alignement. Si l'on avait $-\frac{7\pi}{9} \equiv 0\ [\pi]$, il existerait un entier k tel que $-\frac{7\pi}{9} = k\pi$, soit $k = -\frac{7}{9}$: c'est impossible.

Conclusion. D'après la caractérisation de l'alignement (F05), les points A, C et E ne sont pas alignés.

Exercice 4

Une ligne donne les autres

1.

Soit x un réel de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{7}{25}$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

INDICE

Calcule $\cos^2 x$ avec F07, puis regarde de quel côté de l'axe des ordonnées se trouve le point de $\mathcal{C}$.

CORRIGÉ

Carré du cosinus. D'après la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (F07) :

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ &= 1 - \frac{49}{625} \\ &= \frac{576}{625}.\end{aligned}$$

Donc $\cos x = \frac{24}{25}$ ou $\cos x = -\frac{24}{25}$.

Signe. Comme $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne x est à gauche de l'axe des ordonnées : $\cos x < 0$. Donc $\cos x = -\frac{24}{25}$.

Tangente. Ce cosinus est non nul, donc $\tan x$ existe et :

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{7}{25} \times \left(-\frac{25}{24}\right) \\ &= -\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos x = -\frac{24}{25}$ et $\tan x = -\frac{7}{24}$.

2.

Soit y un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ tel que $\tan y = -2$. Calculer $\cos y$ puis $\sin y$.

INDICE

Utilise $1 + \tan^2 y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, puis $\sin y = \tan y \times \cos y$.

CORRIGÉ

Carré du cosinus. Comme $\tan y$ existe, $\cos y \neq 0$. D'après les relations fondamentales (F07) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 y} &= 1 + \tan^2 y \\ &= 1 + 4 = 5,\end{aligned}$$

donc $\cos^2 y = \dfrac{1}{5}$.

Signe. Comme $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne y est à droite de l'axe des ordonnées : $\cos y > 0$. Donc $\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Sinus. Par définition de la tangente (F06) :

$$\sin y = \tan y \times \cos y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Contrôle : $\cos^2 y + \sin^2 y = \dfrac{5}{25} + \dfrac{20}{25} = 1$.

Conclusion. $\cos y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $\sin y = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Exercice 5

Réduire l'argument, puis simplifier

1.

Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{29\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{31\pi}{3}\right)$.

INDICE

Retire d'abord des multiples de 2π (ou de π pour la tangente), puis reconnais un angle associé à $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

On utilise la périodicité (F07), puis les angles associés (F08).

Cosinus. On a $\dfrac{29\pi}{6} = 4\pi + \dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Sinus. On a $-\dfrac{17\pi}{4} = -4\pi - \dfrac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Tangente. On a $\dfrac{31\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 10\pi$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0$. La tangente admet la période π (F07), donc :

$$\tan\left(\frac{31\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Conclusion. $\cos\left(\dfrac{29\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan\left(\dfrac{31\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

2.

Simplifier, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} B = &\sin(3\pi - x) \\ &- \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) \\ &+ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

INDICE

$3\pi - x = (\pi - x) + 2\pi$ et $\dfrac{9\pi}{2} + x = \left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + 4\pi$. Pour le dernier terme, le cosinus est pair.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On traite chaque terme par la périodicité (F07) puis les angles associés (F08) (méthode M03).

- $\sin(3\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$.
- $\cos\left(\dfrac{9\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.
- Le cosinus est pair, donc $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Somme. Le signe $-$ devant le deuxième terme le change en $+\sin x$. Donc $B = \sin x + \sin x + \sin x = 3\sin x$.

Conclusion. Pour tout réel x, $B = 3\sin x$.

3.

En déduire la valeur de B pour $x = \dfrac{7\pi}{6}$.

INDICE

Calcule $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ en écrivant $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$.

CORRIGÉ

Valeur du sinus. D'après les relations fondamentales et la périodicité (F07), avec $\dfrac{7\pi}{6} = \pi + \dfrac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Valeur de B. D'après la question 2 :

$$B = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Conclusion. Pour $x = \dfrac{7\pi}{6}$, $B = -\dfrac{3}{2}$.

Exercice 6

Valeurs exactes par les formules d'addition

1.

Vérifier que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, puis calculer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

INDICE

Réduis au même dénominateur 12, puis applique la formule de $\cos(a+b)$.

CORRIGÉ

Vérification.

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}.$$

Calcul. D'après les formules d'addition (F10), avec $a = \dfrac{\pi}{4}$ et $b = \dfrac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\quad - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2.

Calculer $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ en écrivant $-\frac{\pi}{12}$ comme différence de deux angles remarquables.

INDICE

Écris $-\frac{\pi}{12}$ avec le dénominateur 12, puis cherche deux angles remarquables dont la différence convient.

CORRIGÉ

Décomposition. On a $-\frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$.

Calcul. D'après les formules d'addition (F10), sinus d'une différence :

$$\begin{aligned}
&\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\quad - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.
\end{aligned}$$

Contrôle de signe. $\sqrt{2} < \sqrt{6}$ donne un résultat négatif, ce qui est cohérent : $-\frac{\pi}{12} \in \left]-\pi, 0\right[$, donc son sinus est négatif.

Conclusion. $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

3.

Calculer $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ à l'aide de la formule de la tangente d'une somme.

INDICE

Vérifie les trois cosinus non nuls de F11, puis rends le dénominateur rationnel avec la quantité conjuguée.

CORRIGÉ

Conditions. Les cosinus de $\dfrac{\pi}{4}$, de $\dfrac{\pi}{6}$ et de $\dfrac{5\pi}{12}$ sont non nuls (question 1 pour le dernier). La formule de la tangente d'une somme (F11) s'applique, avec $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Quantité conjuguée. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $3+\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}\\ &= \frac{12+6\sqrt{3}}{6}\\ &= 2+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=2+\sqrt{3}$.

Exercice 7

Linéariser des carrés et une puissance quatrième

1.

Linéariser, pour tout réel x, les expressions $\cos^2(3x)$ et $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

INDICE

Applique F12 avec $a = 3x$, puis avec $a = \frac{x}{2}$: l'argument du résultat est le double de a.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On applique les formules de linéarisation (F12).

Avec $a = 3x$, on a $2a = 6x$:

$$\cos^2(3x) = \frac{1 + \cos(6x)}{2}.$$

Avec $a = \frac{x}{2}$, on a $2a = x$:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos^2(3x) = \frac{1 + \cos(6x)}{2}$ et $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$.

2.

Linéariser $\sin^2 x$, puis en déduire que, pour tout réel x :

$$\sin^4 x = \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}.$$

INDICE

Écris $\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2$, linéarise $\sin^2 x$, développe, puis linéarise $\cos^2(2x)$.

CORRIGÉ

Soit x un réel.

Linéarisation de $\sin^2 x$. D'après les formules de linéarisation (F12) :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Carré. On élève au carré, avec l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned}&\sin^4 x \\ &= \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}.\end{aligned}$$

Seconde linéarisation. Toujours d'après F12, avec $a = 2x$: $\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}&\sin^4 x \\ &= \frac{2 - 4\cos(2x)}{8} \\ &\quad + \frac{1 + \cos(4x)}{8} \\ &= \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\sin^4 x = \frac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}$.

3.

Calculer $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

INDICE

Linéarise avec $a = \frac{5\pi}{12}$. Avant d'extraire la racine, donne le signe du cosinus cherché.

CORRIGÉ

Carré du cosinus. D'après les formules de linéarisation (F12), avec $a = \frac{5\pi}{12}$, et d'après les angles associés (F08), $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2}\\ &= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

Signe. Comme $\frac{5\pi}{12} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le point associé de $\mathcal{C}$ est à droite de l'axe des ordonnées (F01) : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0$. De plus $2-\sqrt{3} > 0$.

Conclusion. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, et on obtient $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 8

Des sommes aux produits, et retour

1.

Transformer en produit, pour tout réel x : $\cos(5x) + \cos x$, puis $\sin(4x) - \sin(2x)$.

INDICE

Applique F15 : calcule d'abord la demi-somme et la demi-différence des deux arguments.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On applique la transformation d'une somme en produit (F15).

Première expression. Avec $p = 5x$ et $q = x$: $\dfrac{p+q}{2} = 3x$ et $\dfrac{p-q}{2} = 2x$. Donc :

$$\begin{aligned}&\cos(5x) + \cos x\\ &= 2\cos(3x)\cos(2x).\end{aligned}$$

Seconde expression. Avec $p = 4x$ et $q = 2x$: $\dfrac{p+q}{2} = 3x$ et $\dfrac{p-q}{2} = x$. Donc :

$$\begin{aligned}&\sin(4x) - \sin(2x)\\ &= 2\cos(3x)\sin x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos(5x) + \cos x = 2\cos(3x)\cos(2x)$ et $\sin(4x) - \sin(2x) = 2\cos(3x)\sin x$.

2.

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

INDICE

La demi-somme des deux arguments est un angle remarquable, la demi-différence aussi.

CORRIGÉ

D'après la transformation d'une somme en produit (F15), avec $p = \dfrac{7\pi}{12}$ et $q = \dfrac{\pi}{12}$, on a $\dfrac{p+q}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{p-q}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. Donc :

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.

Calculer la valeur exacte de $2\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

INDICE

Transforme ce produit en somme avec F14 : la différence et la somme des arguments sont des angles remarquables.

CORRIGÉ

D'après la transformation d'un produit en somme (F14), avec $a=\frac{5\pi}{8}$ et $b=\frac{\pi}{8}$, on a $a-b=\frac{\pi}{2}$ et $a+b=\frac{3\pi}{4}$. Donc :

$$\begin{aligned}&2\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\&=0+\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $2\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 9

Deux expressions sous la forme r cos(x − φ)

1.

Écrire, pour tout réel x, $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$.

INDICE

Calcule $r = \sqrt{a^2+b^2}$, puis $\dfrac{a}{r}$ et $\dfrac{b}{r}$: ce sont le cosinus et le sinus de φ.

CORRIGÉ

On suit la méthode d'écriture sous la forme $r\cos(x-\varphi)$ (M06), avec $a=\sqrt{2}$ et $b=-\sqrt{2}$.

Calcul de r. $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2+2} = 2$.

Choix de φ. On cherche φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: le réel $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ convient.

Conclusion. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$ (F16), pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x\\ &= 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

2.

Écrire, pour tout réel x, $-3\cos x + 3\sqrt{3}\sin x$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$.

INDICE

Calcule $r = \sqrt{9+27}$. Le cosinus de φ est négatif et son sinus positif.

CORRIGÉ

On suit la méthode d'écriture sous la forme $r\cos(x-\varphi)$ (M06), avec $a=-3$ et $b=3\sqrt{3}$.

Calcul de r. $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+27} = 6$.

Choix de φ. On cherche φ tel que $\cos\varphi = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: le réel $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ convient.

Conclusion. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$ (F16), pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&-3\cos x + 3\sqrt{3}\sin x\\ &= 6\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

3.

En déduire la plus grande et la plus petite valeur de $-3\cos x + 3\sqrt{3}\sin x$, et les réels de $]-\pi, \pi]$ où elles sont atteintes.

INDICE

Un cosinus prend toutes les valeurs de $[-1, 1]$; il vaut 1 quand son argument est congru à 0 modulo 2π.

CORRIGÉ

Encadrement. Pour tout réel x, $-1 \leq \cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) \leq 1$. D'après la question 2, l'expression est donc comprise entre -6 et 6.

Valeur 6. L'expression vaut 6 si et seulement si $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos 0$. D'après les équations fondamentales (F18), cela équivaut à $x - \dfrac{2\pi}{3} \equiv 0\ [2\pi]$ (les deux familles ± 0 sont confondues). Dans $]-\pi, \pi]$, cela donne $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Valeur -6. L'expression vaut -6 si et seulement si $\cos\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos \pi$. D'après F18, cela équivaut à $x - \dfrac{2\pi}{3} \equiv \pi\ [2\pi]$ (les deux familles $\pm\pi$ sont confondues), soit $x \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Dans $]-\pi, \pi]$, cela donne $x = -\dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion. La plus grande valeur est 6, atteinte en $\dfrac{2\pi}{3}$; la plus petite est -6, atteinte en $-\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 10

Trois équations de référence, puis une inéquation

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis donner ses solutions dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Écris les deux familles de F18.

CORRIGÉ

Angle de référence. On a $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Résolution dans $\mathbb{R}$. D'après les équations fondamentales (F18), l'équation équivaut à :

$$x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

ou

$$x \equiv \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\ [2\pi].$$

Dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S &= \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &\cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Solutions dans $[0, 2\pi[$. Chaque famille y donne une seule valeur : $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$.

Conclusion. Dans $[0, 2\pi[$, $S = \left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

INDICE

Pose $X = 3x - \frac{\pi}{4}$ et résous $\cos X = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. En divisant par 3, divise aussi le module.

CORRIGÉ

Angle de référence. On a $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Les deux familles. D'après les équations fondamentales (F18), l'équation équivaut à :

$$3x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

ou

$$3x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

soit $3x \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $3x \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

Division par 3. Le module se divise aussi par 3 et devient $\frac{2\pi}{3}$ (erreur W04) :

$$x \equiv \frac{7\pi}{36}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$$

ou

$$x \equiv -\frac{\pi}{36}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S &= \left\{\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &\cup \left\{-\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

3.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Écris la condition $\cos x \neq 0$, puis $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$: une seule famille, modulo π.

CORRIGÉ

Condition. L'équation a un sens si et seulement si $\cos x \neq 0$: une tangente exige un cosinus non nul (W05).

Résolution dans $\mathbb{R}$. On a $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, avec $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \neq 0$. D'après les équations fondamentales (F18), l'équation équivaut à $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [\pi]$.

Encadrement de k. Soit $k \in \mathbb{Z}$:

$$-\pi < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi$$

équivaut à $-\dfrac{7}{6} < k \leq \dfrac{5}{6}$, donc $k \in \{-1, 0\}$. Les deux réels obtenus ont un cosinus non nul.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, $S = \left\{-\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right\}$.

4.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Résous d'abord l'équation associée dans $]-\pi, \pi]$, puis repère sur le cercle les points d'abscisse au moins $\dfrac{1}{2}$.

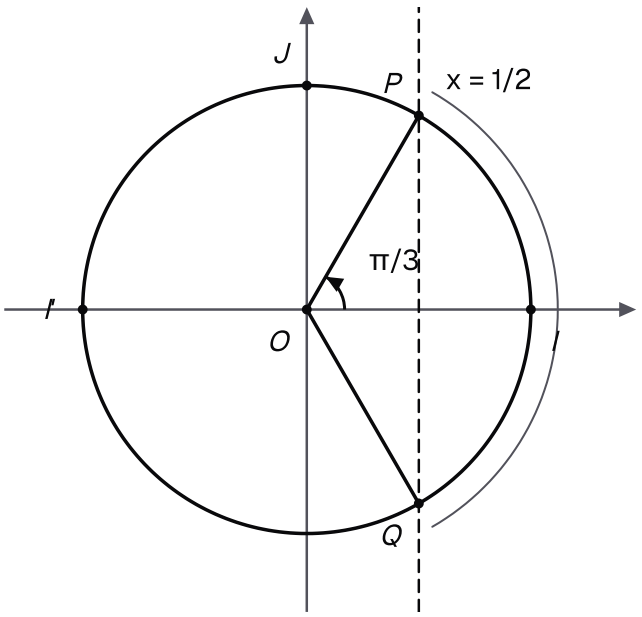
CORRIGÉ

On étudie l'inéquation sur $]-\pi, \pi]$ (méthode M08).

Équation associée. $\cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. D'après les équations fondamentales (F18), ses solutions dans $]-\pi, \pi]$ sont $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

Lecture sur le cercle. Les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse au moins $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc qui contient I, entre les points d'abscisses curvilignes $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$, extrémités comprises.

Conclusion. L'inégalité est large : les deux bornes sont des solutions. Donc $S = \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$.



L'arc solution de cos x ≥ 1/2 sur]–π, π] : de Q à P en passant par I, extrémités comprises.