BURHAN

Calcul trigonométrique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-trigonometrique/cours

Chapitre	Semestre
Calcul trigonométrique	Semestre 1

Mesurer un tour, calculer sans rapporteur

Sans calculatrice, combien vaut $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$? Le réel $\frac{\pi}{12}$ n'est pas dans ton tableau de valeurs remarquables.

Pourtant, $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Et ces deux angles-là, tu les connais bien : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Devine : Un calcul tentant

D'après toi, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est-il égal à $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

A. Non : ce nombre est négatif, pas $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Juste.

Juste : le signe suffit à trancher.

B. On ne peut pas le savoir sans calculatrice.

Faux.

Le signe suffit : regarde où se trouve le point d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{12}$ sur le cercle.

C. Oui, car le cosinus se calcule terme à terme.

Faux.

Teste avec $\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$: on aurait $\cos\pi = 0$, alors que $\cos\pi = -1$.

D. Oui, car $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Faux.

Calcule le membre de droite : $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ est négatif. Or $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ne l'est pas.

Correction

Le membre de droite. On a :

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Ce nombre est négatif, car $\sqrt{2} > 1$.

Le membre de gauche. Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$: le point associé est à droite de l'axe des ordonnées, donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$.

Conclusion. Les deux nombres diffèrent. La bonne formule viendra plus loin : elle donnera $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Dans ce chapitre, tu reprends le cercle trigonométrique et les angles orientés du tronc commun. Puis tu **démontres** les formules qui donnent de telles valeurs exactes.

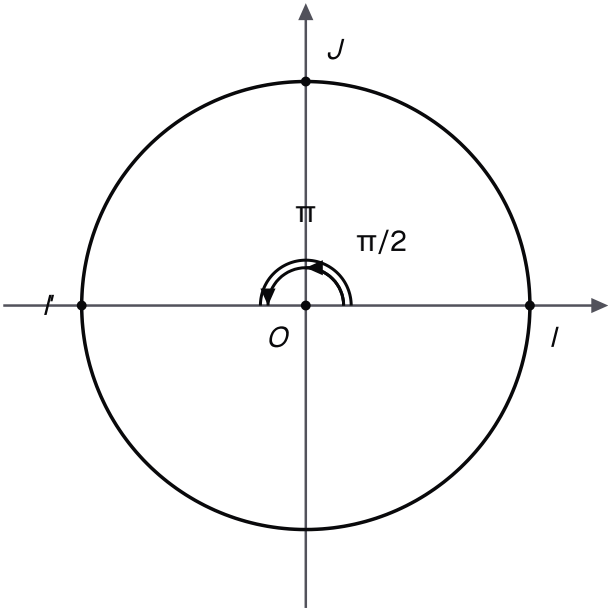
Tu sauras résoudre des équations et des inéquations trigonométriques. Surtout, tu apprendras à rédiger chaque « montrer que » comme une vraie preuve.

Cercle trigonométrique et mesures d'un angle orienté

Enrouler la droite des réels

Petit rappel. Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour longueur 2π.

Un **radian** est la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 sur ce cercle. Un demi-tour mesure donc π radians, et un quart de tour $\frac{\pi}{2}$.



Le cercle de centre O et de rayon 1 : un quart de tour, de I à J, mesure π/2 radians ; un demi-tour, de I à I', mesure π radians.

Devine : Un tour et plus

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec $I(1,0)$ et $J(0,1)$. Pars de I et parcours le cercle sur une longueur $\frac{7\pi}{2}$, dans le sens direct. Où arrives-tu ?

A. Au point $(-1, 0)$.

Faux.
$\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$: tu as compté un demi-tour au lieu de trois quarts de tour.

B. Au point $(0, -1)$.

Juste.
Juste : $\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$, un tour puis trois quarts de tour.

C. Au point $I(1, 0)$.

Faux.
$\frac{7\pi}{2}$ n'est pas un multiple de 2π : tu ne reviens pas en I.

D. Au point $J(0, 1)$.

Faux.
Un arc de longueur $\frac{\pi}{2}$ mène en J. Ici, après un tour complet, il reste trois quarts de tour.

Correction
On a $\frac{7\pi}{2} = 2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Un tour complet ramène en I. Trois quarts de tour dans le sens direct mènent ensuite au point $(0, -1)$.

Ce point a aussi pour abscisses curvilignes $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$: un arc de longueur $\frac{\pi}{2}$ parcouru dans le sens indirect y mène aussi.

Abscisses curvilignes

Définition : Cercle trigonométrique et abscisses curvilignes

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct, d'origine le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$. Sa longueur est 2π.

En enroulant la droite des réels sur $\mathcal{C}$ à partir de I, on associe à tout réel x un unique point M de $\mathcal{C}$: on dit que x est **une abscisse curviligne** de M.

- Tout point de $\mathcal{C}$ a des abscisses curvilignes ; si x en est une, ce sont exactement les réels $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Une seule appartient à $]-\pi, \pi]$: l'**abscisse curviligne principale**.
- Les points d'abscisses curvilignes x et $x + \pi$ sont symétriques par rapport à O.
- Un point dont une abscisse curviligne appartient à $]0, \pi[$ a une ordonnée strictement positive ; à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, une première coordonnée strictement positive.

Remarque : ce qui est admis

L'enroulement de la droite réelle sur $\mathcal{C}$ est un acquis du tronc commun, **admis** ici. Avec lui sont admis :

- la longueur 2π du cercle ;
- les abscisses curvilignes d'un même point, définies à $2k\pi$ près ;

- la symétrie par rapport à O des points d'abscisses x et $x+\pi$;
- la position des points : une abscisse de $]0,\pi[$ donne un point au-dessus de l'axe des abscisses, une abscisse de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ un point à droite de l'axe des ordonnées.

La définition suivante admet aussi le lien entre mesure principale et angle géométrique ; les angles associés admettront trois autres symétries du cercle. Les autres énoncés se démontrent à partir de là.

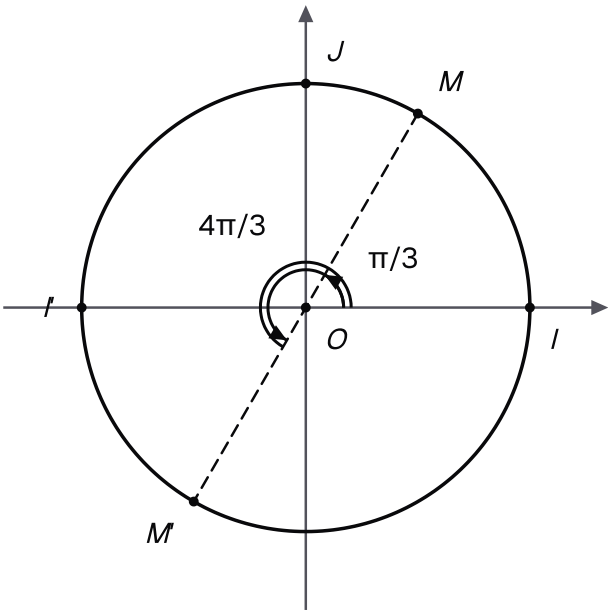
Exemple : trois abscisses d'un même point

Les réels $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{3}$ repèrent le même point M de $\mathcal{C}$. En effet :

$$\frac{7\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi,$$
$$-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-2\pi.$$

L'abscisse curviligne principale de M est $\frac{\pi}{3}$: c'est la seule des trois dans $]-\pi,\pi]$.

Le point d'abscisse $\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$ est le symétrique de M par rapport à O.



Le point M d'abscisse principale π/3, que 7π/3 et −5π/3 désignent aussi à un tour près, et M', son symétrique par rapport à O, d'abscisse 4π/3.

Angle orienté de deux vecteurs

Définition : Angle orienté de deux vecteurs ; mesures, mesure principale

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et M, N les points de $\mathcal{C}$ tels que $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, d'abscisses curvilignes respectives α et β.

Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ définit un **angle orienté**, noté $(\vec{u}, \vec{v})$. Ses **mesures** sont les réels $\beta - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; on écrit $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \beta - \alpha \ [2\pi]$. Plus généralement, $x \equiv y \ [m]$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + km$.

- Une seule mesure appartient à $]-\pi, \pi]$: la **mesure principale** de $(\vec{u}, \vec{v})$. Sa valeur absolue est la mesure, dans $[0, \pi]$, de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Si x est une abscisse curviligne d'un point M de $\mathcal{C}$, alors $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv x \ [2\pi]$.

Vérifie : L'ordre des vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, associés aux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$. Laquelle de ces écritures est juste ?

A. $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{11\pi}{12} \ [2\pi]$

Faux.

Tu as additionné les abscisses : une mesure est leur **différence**.

B. $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$

Faux.

Les abscisses ne diffèrent pas d'un quart de tour : $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{9\pi - 2\pi}{12}$.

C. $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{7\pi}{12} \ [2\pi]$

Juste.

Juste : $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{12}$.

D. $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -\dfrac{7\pi}{12} \ [2\pi]$

Faux.

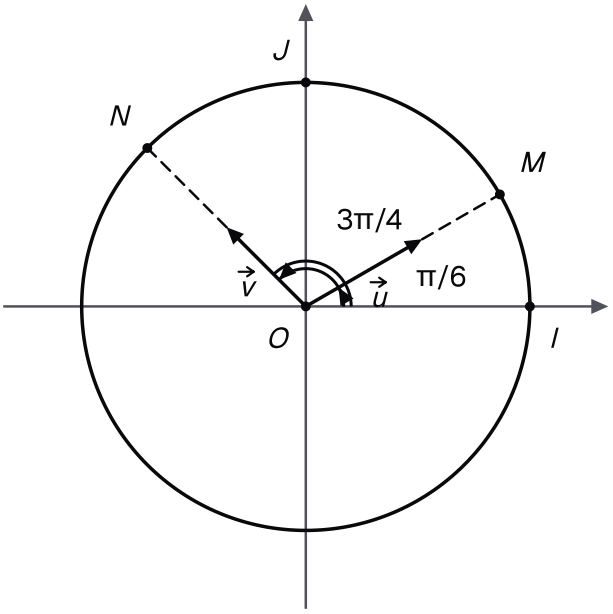
C'est une mesure de $(\vec{v}, \vec{u})$: l'ordre compte, on calcule $\beta - \alpha$.

Correction

D'après la définition, une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\beta - \alpha$, avec $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ et $\beta = \dfrac{3\pi}{4}$:

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{9\pi - 2\pi}{12} \\ &= \frac{7\pi}{12}. \end{aligned}$$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \dfrac{7\pi}{12} \ [2\pi]$. C'est même sa mesure principale, car $\dfrac{7\pi}{12} \in]-\pi, \pi]$.



Les données de l'activité : les vecteurs u et v issus de O, et leurs points associés M et N, d'abscisses π/6 et 3π/4.

Méthode : trouver la mesure principale

1. **Partir** d'une mesure θ de l'angle.
2. **Chercher** l'entier k tel que $-\pi < \theta - 2k\pi \leq \pi$: retire des tours complets 2π, ou encadre $\dfrac{\theta}{2\pi}$.
3. **Conclure** avec la mesure obtenue, après avoir vérifié qu'elle est dans $]-\pi, \pi]$.

Rédaction attendue. « On a $\theta = \theta' + 2k\pi$ avec $k = \ldots$, entier relatif, et $\theta' \in]-\pi, \pi]$. Donc la mesure principale est θ'. »

La mesure principale

Exemple : deux mesures principales

Énoncé. Détermine la mesure principale des angles de mesures $\dfrac{37\pi}{6}$ et $-\dfrac{29\pi}{4}$.

Premier angle. On retire trois tours complets :

$$\frac{37\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 3 \times 2\pi.$$

Comme $\dfrac{\pi}{6} \in]-\pi, \pi]$, la mesure principale est $\dfrac{\pi}{6}$.

Second angle. On ajoute quatre tours complets :

$$-\frac{29\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 4 \times 2\pi.$$

Comme $\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi, \pi]$, la mesure principale est $\dfrac{3\pi}{4}$.

Attention : l'intervalle de la mesure principale

✗ « La mesure principale d'un angle de mesure $\frac{5\pi}{3}$ est $\frac{5\pi}{3}$. »

✓ $\frac{5\pi}{3} > \pi$: ce n'est pas la mesure principale. On retire un tour :

$$\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3},$$

qui appartient à $]-\pi, \pi]$. La mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$.

L'intervalle $[0, 2\pi[$ n'est pas celui de la définition.

À toi : Rédige une mesure principale

Rédige la recherche de la mesure principale d'un angle de mesure $\frac{43\pi}{5}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Compte les tours complets $2\pi = \frac{10\pi}{5}$ contenus dans $\frac{43\pi}{5}$.

Indice 2

Écris $\frac{43\pi}{5} = \frac{40\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}$.

Indice 3

Point délicat : vérifie que le reste est dans $]-\pi, \pi]$, où la borne $-\pi$ est exclue.

Réponse

« On retire quatre tours complets :

$$\frac{43\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4 \times 2\pi.$$

Or $-\pi < \frac{3\pi}{5} \leq \pi$.

Donc la mesure principale de cet angle est $\frac{3\pi}{5}$. »

Relation de Chasles et conséquences

Enchaîner deux angles

Devine : Deux angles bout à bout

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls, avec $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après toi, quelle est une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$?

A. $\frac{\pi}{6}$

Faux.

Tu as fait la différence : les deux angles s'enchaînent, leurs mesures s'ajoutent.

B. $-\dfrac{5\pi}{6}$

Faux.

C'est une mesure de $(\vec{w}, \vec{u})$, l'angle pris dans l'autre ordre.

C. On ne peut pas savoir sans figure.

Faux.

Les mesures des deux angles suffisent : les abscisses des points associés le montrent.

D. $\dfrac{5\pi}{6}$

Juste.

Juste : de $\vec{u}$ à $\vec{v}$, puis de $\vec{v}$ à $\vec{w}$, les mesures s'ajoutent.

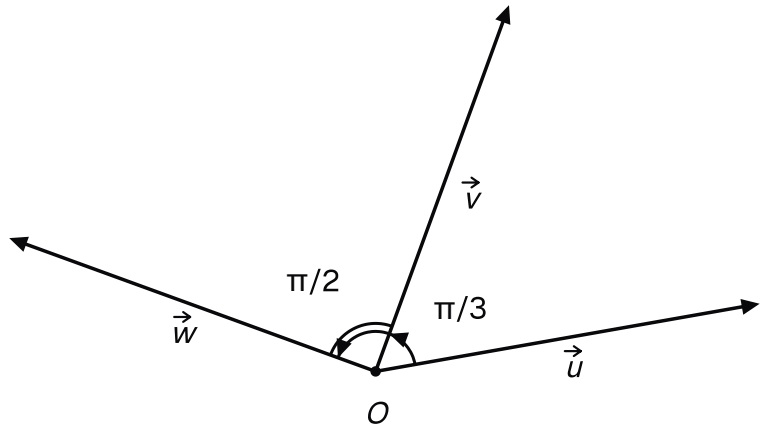
Correction

Soit α, β, γ des abscisses curvilignes des points associés à $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Alors :

$$\beta - \alpha \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$
$$\gamma - \beta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

En ajoutant, le terme β disparaît : $\gamma - \alpha \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

La relation qui suit le dit pour tous les vecteurs non nuls.



Les deux angles connus mis bout à bout : de u à v, π/3 ; puis de v à w, π/2.

Pourquoi est-ce vrai ? Une mesure d'angle orienté est une différence d'abscisses curvilignes. Or, dans la somme $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta)$, le terme β disparaît. La preuve dit exactement cela, puis règle la question du « à 2π près ».

Chasles et ses conséquences

Propriété : Relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})\equiv(\vec{u},\vec{w})\ [2\pi].$$

Démonstration

Étape 1. Soit M, N et P les points de $\mathcal{C}$ associés à $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme dans F02, d'abscisses curvilignes respectives α, β et γ.

Étape 2. D'après F02, $\beta-\alpha$ est une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$ et $\gamma-\beta$ est une mesure de $(\vec{v},\vec{w})$.

Étape 3. Leur somme vaut $(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)=\gamma-\alpha$, qui est une mesure de $(\vec{u},\vec{w})$ d'après F02. Toute autre mesure de chacun de ces angles en diffère d'un multiple entier de 2π : l'égalité vaut donc modulo 2π.

Vérifie : Le rôle du module

Dans la preuve de la relation de Chasles, pourquoi l'égalité n'a-t-elle lieu qu'à 2π près ?

A. Parce que chaque mesure n'est définie qu'à 2π près.

Juste.

Juste : on a choisi une abscisse parmi une infinité pour chaque point.

B. Parce que le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon 1.

Faux.

Le rayon fixe la longueur 2π, mais ce n'est pas l'argument de l'étape 3.

C. Parce que le terme β disparaît dans la somme.

Faux.

C'est le calcul de l'étape 3 : pour ces abscisses-là, il donne une égalité exacte.

D. Parce que les trois vecteurs sont non nuls.

Faux.

Cette hypothèse sert à définir les points associés, à l'étape 1.

Correction

Les abscisses α, β, γ sont choisies chacune à 2π près. Pour ces choix, le calcul $(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)=\gamma-\alpha$ est exact.

Mais toute autre mesure de chaque angle en diffère d'un multiple de 2π. L'égalité entre angles s'écrit donc modulo 2π.

Propriété : Conséquences de la relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $(\vec{u},\vec{u}) \equiv 0\ [2\pi]$ et $(\vec{v},\vec{u}) \equiv -(\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$;
- $(-\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi\ [2\pi]$, $(\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi\ [2\pi]$ et $(-\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$;
- pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $(a\vec{u}, b\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$.

Démonstration

Étape 1. Pour $(\vec{u},\vec{u})$, les deux points de F02 sont égaux : on prend la même abscisse, d'où la mesure 0. La relation de Chasles (F03) donne $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{u}) \equiv (\vec{u},\vec{u}) \equiv 0\ [2\pi]$, d'où $(\vec{v},\vec{u}) \equiv -(\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$.

Étape 2. Comme $\dfrac{1}{\|-\vec{u}\|}(-\vec{u}) = -\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, le point associé à $-\vec{u}$ est le symétrique par rapport à O du point M associé à $\vec{u}$. Si α est une abscisse de M, alors $\alpha + \pi$ est une abscisse de ce symétrique (F01). Donc $(\vec{u},-\vec{u}) \equiv \pi\ [2\pi]$, et de même $(-\vec{u},\vec{u}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

Étape 3. Par F03 : $(-\vec{u},\vec{v}) \equiv (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v})$, d'où le terme π. En appliquant deux fois ce résultat, $(-\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + 2\pi \equiv (\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$.

Étape 4. Si $a > 0$, $\dfrac{1}{\|a\vec{u}\|}a\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$: de même pour $b > 0$: les points de F02 sont inchangés, donc les mesures aussi.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout passe par les abscisses des points associés. Chasles vient d'une somme où le terme du milieu s'élimine.

Changer un vecteur en son opposé, c'est passer au point symétrique par rapport à O : on ajoute π. Multiplier un vecteur par un réel strictement positif ne change pas son point associé, donc aucune mesure.

Exemple : Contre-exemple : un coefficient négatif

La règle $(a\vec{u}, b\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$ exige $a > 0$ et $b > 0$.

Supposons $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Comme $-2\vec{u} = 2 \times (-\vec{u})$ avec $2 > 0$:

$$\begin{aligned}(-2\vec{u},\vec{v}) &\equiv (-\vec{u},\vec{v}) \\ &\equiv \frac{\pi}{6} + \pi \\ &= \frac{7\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

La mesure principale est $-\dfrac{5\pi}{6}$, et non $\dfrac{\pi}{6}$.

Calculer avec Chasles

Exemple **: Exemple guidé : un angle dans un triangle**

Énoncé. ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Détermine une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

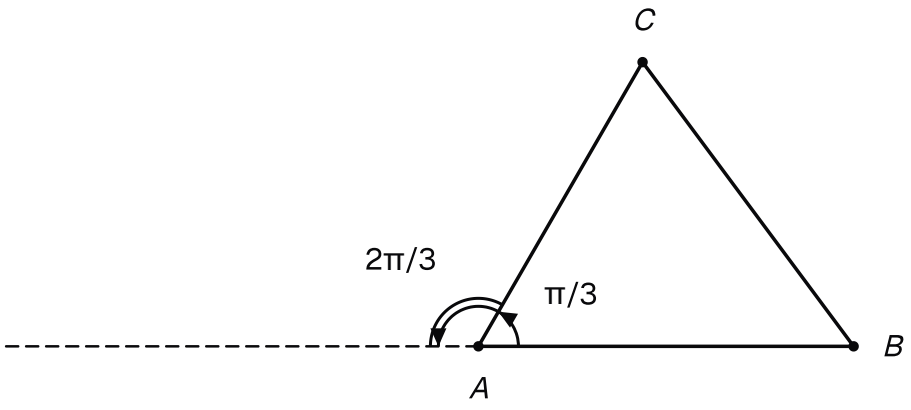
Chasles. Les vecteurs sont non nuls, car les sommets d'un triangle sont distincts :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})\\ &\equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conséquences. Inverser l'ordre change le signe : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ donne $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) \equiv \pi\ [2\pi]$.

Conclure.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) &\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi\\ &= \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$



Le triangle de l'exemple : l'angle de AB vers AC mesure π/3 ; la demi-droite pointillée issue de A porte la direction de BA, et l'angle de AC vers elle mesure 2π/3.

Vérifie : Opposé, coefficient, ordre

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. Quelle est la mesure principale de $(-\vec{v}, 3\vec{u})$?

A. $-\frac{\pi}{4}$

Faux.

Vérifie le calcul : $-\frac{3\pi}{4} + \pi$ est positif.

B. $\frac{\pi}{4}$

Juste.

Juste : $-\dfrac{3\pi}{4}+\pi=\dfrac{\pi}{4}$.

C. $-\dfrac{3\pi}{4}$

Faux.

Tu as inversé l'ordre, mais oublié le signe moins devant $\vec{v}$: il ajoute π.

D. $\dfrac{3\pi}{4}$

Faux.

L'angle part de $-\vec{v}$, pas de $\vec{u}$: l'ordre est inversé, le signe aussi.

Correction

Le coefficient $3>0$ ne change pas l'angle : $(-\vec{v},3\vec{u})\equiv(-\vec{v},\vec{u})\ [2\pi]$.

Changer $\vec{v}$ en $-\vec{v}$ ajoute π, et inverser l'ordre change le signe :

$$\begin{aligned}(-\vec{v},\vec{u}) &\equiv (\vec{v},\vec{u})+\pi\\ &\equiv -\frac{3\pi}{4}+\pi\\ &= \frac{\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\pi}{4}\in\ ]-\pi,\pi]$, c'est la mesure principale.

À toi : Rédige une preuve avec Chasles

Rédige la preuve de : pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},-\vec{u})\equiv\pi\ [2\pi]$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pense à la relation de Chasles avec trois vecteurs.

Indice 2

Chasles donne $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},-\vec{u})\equiv(\vec{u},-\vec{u})\ [2\pi]$.

Indice 3

Point délicat : justifie la mesure de $(\vec{u},-\vec{u})$ par une conséquence de Chasles.

Réponse

« Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; $-\vec{u}$ est aussi non nul.

Chasles. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},-\vec{u})\\ &\equiv(\vec{u},-\vec{u})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Opposé. D'après les conséquences de la relation de Chasles, $(\vec{u},-\vec{u})\equiv(\vec{u},\vec{u})+\pi\equiv\pi\ [2\pi]$.

Conclusion. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},-\vec{u})\equiv\pi\ [2\pi]$. »

Colinéarité et alignement

Même direction, même point ?

Devine : Un coefficient négatif

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v} = -3\vec{u}$. D'après toi, quelle est la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$?

A. $\frac{\pi}{2}$

Faux.

Deux vecteurs colinéaires ne forment jamais un angle droit.

B. 0

Faux.

Le coefficient -3 est négatif : $\vec{v}$ est de sens contraire à $\vec{u}$.

C. π

Juste.

Juste : des vecteurs de sens contraires forment un angle plat.

D. -3

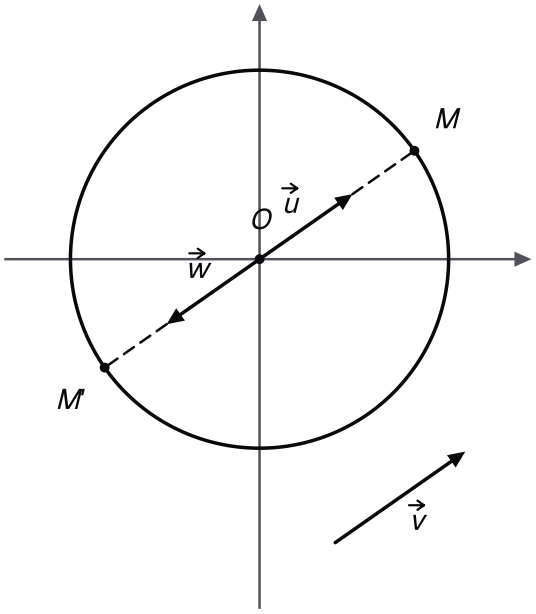
Faux.

Une mesure d'angle ne se lit pas sur le coefficient : seul son signe compte.

Correction

On a $\vec{v} = 3 \times (-\vec{u})$ avec $3 > 0$. Donc $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, -\vec{u}) \equiv \pi \ [2\pi]$. Comme $\pi \in \ ]-\pi, \pi]$, la mesure principale est π.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux vecteurs colinéaires de même sens ont le même point associé sur $\mathcal{C}$. De sens contraires, ils ont deux points symétriques par rapport à O. La preuve traduit ces deux cas en abscisses, puis les réunit modulo π.



Des vecteurs colinéaires lus sur le cercle : u et v, de même sens, ont le même point associé M ; w, de sens contraire, a pour point associé M', symétrique de M par rapport à O.

Le critère et sa preuve

Propriété : Colinéarité et alignement

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\ [2\pi]$; de sens contraires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi\ [2\pi]$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\ [\pi]$.

En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$.

Démonstration

Étape 1. Soit M et N les points de F02, d'abscisses α et β ; d'après F02, $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \beta - \alpha\ [2\pi]$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement s'il existe $a > 0$ tel que $\vec{v} = a\vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}$ (on prend $a = \dfrac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$), soit $N = M$. D'après F01, cela équivaut à $\beta - \alpha \equiv 0\ [2\pi]$.

Étape 2. De même, ils sont de sens contraires si et seulement si $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire si N est le symétrique de M par rapport à O ; d'après F01, cela équivaut à $\beta \equiv \alpha + \pi\ [2\pi]$.

Étape 3. Deux vecteurs non nuls colinéaires sont de même sens ou de sens contraires : la réunion des deux conditions est $\beta - \alpha \equiv 0\ [\pi]$. Enfin, A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La colinéarité se lit sur les **points associés** : même point, ou points symétriques par rapport à O. Les abscisses diffèrent alors de 0 ou de π, à 2π près.

Les deux cas se réunissent en une seule congruence modulo π. Enfin, l'alignement de A, B, C est la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Vérifie : Trois points distincts

Dans le critère d'alignement, à quoi sert l'hypothèse « trois points **distincts** » ?

A. À garantir que le triangle ABC existe.

Faux.

Si A, B, C sont alignés, il n'y a justement pas de vrai triangle.

B. À dire que trois points distincts sont alignés.

Faux.

C'est faux : les sommets d'un triangle sont distincts et non alignés.

C. À placer la mesure dans $]-\pi, \pi]$.

Faux.

Tout angle orienté a une mesure principale : le problème est ailleurs.

D. À rendre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non nuls.

Juste.

Juste : un angle orienté n'est défini que pour deux vecteurs non nuls.

Correction

Un angle orienté n'est défini que pour deux vecteurs **non nuls**.

Si $B = A$ ou $C = A$, l'un des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ est nul. L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ n'existe alors pas, et le critère ne peut pas s'écrire.

Exemple : prouver un alignement

Énoncé. Soit A, B, C trois points distincts et D un point distinct de A, tels que $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB}) \equiv \dfrac{\pi}{5}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{6\pi}{5}\ [2\pi]$. Montre que A, B, C sont alignés.

Chasles. Inverser l'ordre change le signe : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) \equiv -\dfrac{\pi}{5}\ [2\pi]$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC})\\ &\equiv -\frac{\pi}{5} + \frac{6\pi}{5}\\ &= \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclure. Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$: d'après le critère d'alignement, les points A, B, C sont alignés.

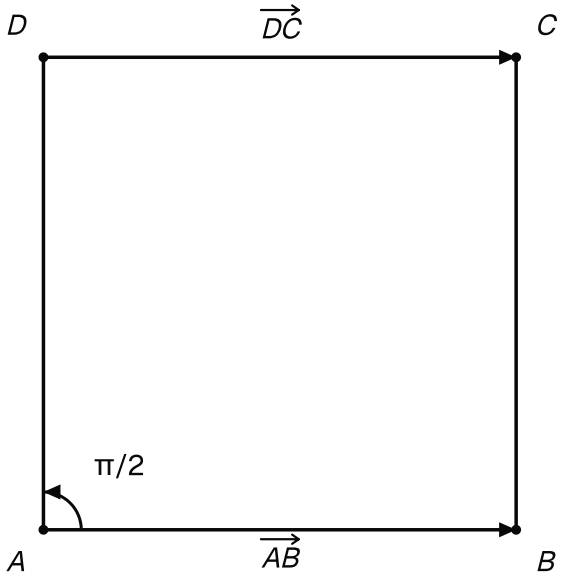
Aligné ou non

Exemple : un carré

Énoncé. $ABCD$ est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Les points A, B, D sont-ils alignés ? Les droites (AB) et (DC) sont-elles parallèles ?

Alignement. $\frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple entier de π. Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ n'est pas congru à 0 modulo π : d'après le critère d'alignement, A, B, D ne sont pas alignés.

Parallélisme. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ donne $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) \equiv 0\ [2\pi]$. Les vecteurs sont colinéaires de même sens : les droites sont parallèles.



Le carré direct ABCD : l'angle de AB vers AD mesure π/2, et les vecteurs AB et DC sont égaux.

À toi : Rédige un alignement

Soit A, B, C, E quatre points tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{7}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{6\pi}{7}\ [2\pi]$. Rédige la preuve de l'alignement de A, B, E. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.
Indice 2
La relation de Chasles donne la somme $\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}$.
Indice 3

Point délicat : conclus par la congruence modulo π, et dis pourquoi les vecteurs sont non nuls.

Réponse
« Les angles donnés existent, donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non nuls.

Chasles. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})\\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\\ &\quad + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})\\ &\equiv \frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\\ &= \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

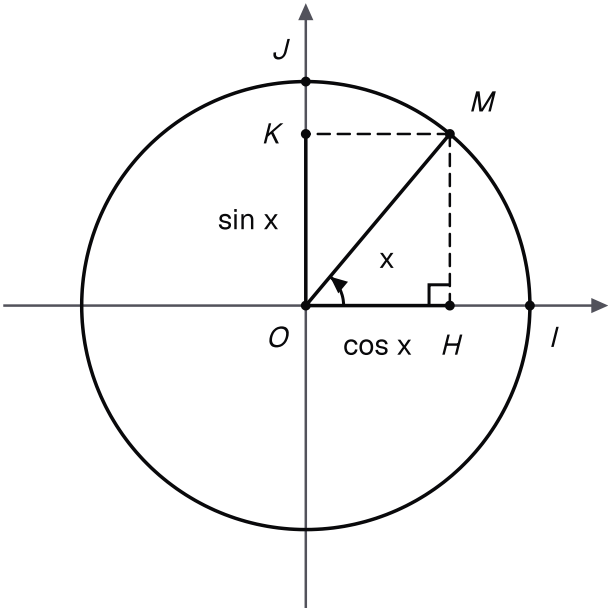
Conclusion. Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv 0\ [\pi]$: d'après le critère d'alignement, les points A, B, E sont alignés. »

Cosinus, sinus et tangente d'un réel

Des coordonnées

Petit rappel. Au tronc commun, tu as lu le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Sur le cercle trigonométrique, on lit les mêmes nombres comme des **coordonnées**. Cette lecture vaut pour tous les réels, même négatifs ou plus grands que 2π.



Pour le point M d'abscisse curviligne x : cos x se lit en H, sur l'axe horizontal, sin x se lit en K, sur l'axe vertical ; le triangle OHM est rectangle en H.

Devine : Un demi-tour

Le point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne π est le symétrique de $I(1,0)$ par rapport à O. Quelles sont ses coordonnées ?

A. $(-1,0)$
Juste.
Juste : le symétrique par rapport à l'origine a des coordonnées opposées.

B. $(0,-1)$
Faux.
Ce point a pour abscisse curviligne $-\dfrac{\pi}{2}$: un quart de tour, pas un demi-tour.

C. $(1,0)$
Faux.
C'est I lui-même, d'abscisse curviligne 0.

D. $(0,1)$
Faux.
C'est J, d'abscisse curviligne $\dfrac{\pi}{2}$.

Correction
Le symétrique de $I(1,0)$ par rapport à O a des coordonnées opposées : c'est le point $(-1,0)$. Avec la définition qui suit, on écrira $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.

Cosinus, sinus, tangente

Définition : Cosinus, sinus et tangente d'un réel

Soit x un réel et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne x. Le **cosinus** et le **sinus** de x sont les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$:

$$\overrightarrow{OM} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}.$$

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, la **tangente** de x est $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$, on appelle cosinus et sinus de cet angle les nombres $\cos\theta$ et $\sin\theta$; ils ne dépendent pas de la mesure choisie, car deux mesures diffèrent de $2k\pi$ et repèrent donc le même point de $\mathcal{C}$ (F01).

Vérifie : Une tangente qui manque

Pour lequel de ces réels la tangente n'existe-t-elle pas ?

A. $x = \dfrac{\pi}{4}$
Faux.
$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$: la tangente existe et vaut 1.

B. $x = -\dfrac{\pi}{2}$

Juste.

Juste : le point associé est $(0, -1)$, d'abscisse nulle.

C. $x = \pi$

Faux.

$\cos \pi = -1 \neq 0$: $\tan \pi = 0$ existe.

D. $x = 0$

Faux.

$\cos 0 = 1 \neq 0$, et $\tan 0 = 0$.

Correction

$\cos x$ est l'abscisse du point d'abscisse curviligne x, et $\sin x$ son ordonnée. La tangente existe si et seulement si $\cos x \neq 0$.

Le point d'abscisse curviligne $-\dfrac{\pi}{2}$ est $J'(0, -1)$: $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $\tan\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ n'existe pas.

Valeurs remarquables. Elles viennent du tronc commun ; garde-les sous la main.

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Relations fondamentales

Le point $M(\cos x, \sin x)$ est sur un cercle de rayon 1.

Pourquoi est-ce vrai ? Les relations qui suivent viennent de deux faits. La distance OM vaut 1. Et le point d'abscisse $x + \pi$ est le symétrique de M par rapport à O.

Propriété : Relations fondamentales et périodicité

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$;
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$;
- si $\cos x \neq 0$: $\tan(x + k\pi) = \tan x$ et $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Démonstration

Étape 1. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x ; $M(\cos x, \sin x)$ (F06). Comme $OM = 1$ et que le repère est orthonormé, $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Chaque carré est donc au plus 1, d'où les encadrements.

Étape 2. Les réels x et $x + 2k\pi$ sont des abscisses du même point (F01) : mêmes coordonnées.

Étape 3. Le point d'abscisse $x + \pi$ est le symétrique de M par rapport à O (F01) : ses coordonnées sont opposées.

Étape 4. Si $\cos x \neq 0$, l'étape 3 donne $\cos(x + \pi) \neq 0$ et $\tan(x + \pi) = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Si $k = 2m$, l'étape 2 donne $\tan(x + k\pi) = \tan x$. Si $k = 2m + 1$, alors $x + k\pi = (x + \pi) + 2m\pi$, et les étapes 2 et 3 donnent $\tan(x + k\pi) = \tan(x + \pi) = \tan x$. Enfin, on divise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ par $\cos^2 x \neq 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux faits géométriques suffisent. La distance $OM = 1$ s'écrit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dans le repère orthonormé.

Un tour de plus ne change pas le point ; un demi-tour donne le symétrique par rapport à O. Pour la tangente, les deux signes moins se simplifient : sa période est π.

Vérifie : La période de la tangente

Dans la preuve, d'où vient l'égalité $\tan(x + \pi) = \tan x$, pour $\cos x \neq 0$?

A. La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Faux.
Elle sert aux encadrements et à $1 + \tan^2 x$, pas à la période.

B. La tangente est définie pour tout réel.

Faux.
Elle n'existe que si $\cos x \neq 0$: c'est l'hypothèse de cette ligne.

C. Cosinus et sinus changent tous deux de signe.

Juste.
Juste : le quotient ne change donc pas ; c'est l'étape 4, appuyée sur l'étape 3.

D. Les points d'abscisses x et $x + \pi$ sont confondus.

Faux.
Faux : ils sont symétriques par rapport à O ; seul $x + 2\pi$ redonne le même point.

Correction
Le point d'abscisse $x + \pi$ est le symétrique de M par rapport à O : $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

Si $\cos x \neq 0$, alors $\cos(x+\pi) \neq 0$ et :

$$\tan(x+\pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

Exemple : Contre-exemple : la condition sur le cosinus

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos x = 0$: ni $\tan x$, ni $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ n'existent. La relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ exige donc $\cos x \neq 0$.

Pour $x = \dfrac{\pi}{3}$, elle se vérifie. D'une part, $1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + 3 = 4$. D'autre part, $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{4}$, dont l'inverse vaut 4.

Une ligne à partir d'une autre

Méthode : calculer une ligne trigonométrique à partir d'une autre

1. **Écrire** la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
2. **Isoler** le carré cherché : il donne deux valeurs opposées.
3. **Choisir le signe** par l'intervalle où se trouve x, c'est-à-dire par la position du point sur le cercle.
4. **Conclure**, puis calculer la tangente par quotient si $\cos x \neq 0$.

Rédaction attendue. « D'après $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a $\sin^2 x = \ldots$. Or $x \in \ldots$, donc $\sin x \ldots 0$. Ainsi $\sin x = \ldots$. »

Exemple : Exemple guidé : le sinus à partir du cosinus

Énoncé. Soit $x \in]-\pi, 0[$ tel que $\cos x = \dfrac{1}{3}$. Calcule $\sin x$ et $\tan x$.

Carré. D'après la relation fondamentale :

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Donc $\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\sin x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Signe. Pour $x \in]-\pi, 0[$, le point associé est sous l'axe des abscisses : $\sin x < 0$. Donc $\sin x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Tangente. $\cos x \neq 0$, donc la tangente existe :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2\sqrt{2}.$$

Attention : une tangente exige un cosinus non nul

✗ « $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-1}{0}$. »

✓ Le cosinus de $\frac{3\pi}{2}$ est nul : le quotient n'existe pas, et $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ non plus.

Avant d'écrire une tangente, vérifie que le cosinus est non nul. Dans une formule de tangente, vérifie chaque cosinus en jeu.

À toi : Rédige le calcul d'un cosinus

Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$. Rédige le calcul de $\cos x$, puis de $\tan x$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Indice 2

Tu obtiens $\cos^2 x = \frac{16}{25}$.

Indice 3

Point délicat : le signe de $\cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, puis l'existence de la tangente.

Réponse

« **Carré.** D'après la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Donc $\cos x = \frac{4}{5}$ ou $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Signe. Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$: le point associé n'est pas à droite de l'axe des ordonnées, donc $\cos x \leq 0$.

Ainsi $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Tangente. Ce cosinus est non nul, donc la tangente existe :

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos x = -\frac{4}{5}$ et $\tan x = -\frac{3}{4}$. »

Angles associés

Trois symétries du cercle

Devine : Un point et son reflet

Le point d'abscisse curviligne $-\frac{\pi}{5}$ est le symétrique, par rapport à l'axe des abscisses, du point d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{5}$. Que vaut $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$?

A. $-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Faux.

Cette symétrie garde l'abscisse et change le signe de l'ordonnée.

B. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Faux.

Échanger abscisse et ordonnée, c'est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

C. $-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Faux.

C'est la valeur de $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$: l'ordonnée du symétrique.

D. $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Juste.

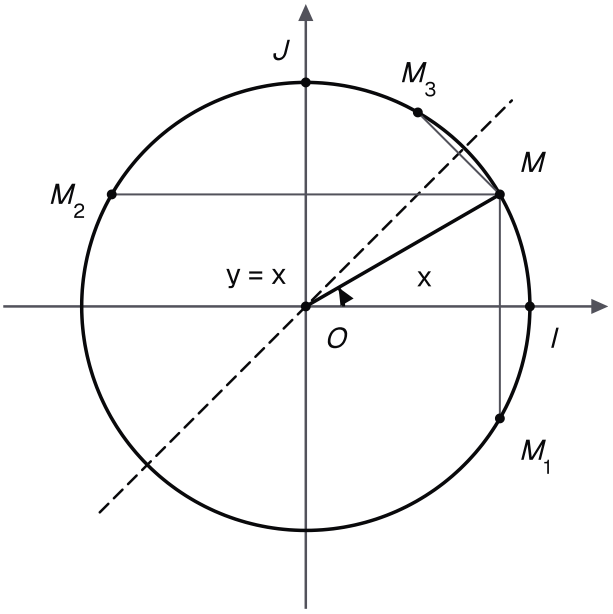
Juste : cette symétrie garde l'abscisse du point.

Correction

Le symétrique du point (a, b) par rapport à l'axe des abscisses est le point $(a, -b)$. Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Trois symétries du cercle font tout le travail : par rapport à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées, et à la droite d'équation $y = x$.

Chacune envoie le point d'abscisse curviligne x sur un point dont on connaît l'abscisse curviligne. On lit alors ses coordonnées.



Les trois symétries des angles associés : M_1 reflète M par rapport à l'axe des abscisses, M_2 par rapport à l'axe des ordonnées, M_3 par rapport à la droite d'équation y = x.

Les angles associés

Propriété : Angles associés

Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Lorsque $\cos x \neq 0$: $\tan(-x) = -\tan x$ et $\tan(\pi - x) = -\tan x$.

Démonstration

Idée de la preuve. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x. Le point d'abscisse $-x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$; le point d'abscisse $\pi - x$, son symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$; le point d'abscisse $\frac{\pi}{2} - x$, son symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$. On lit alors leurs coordonnées : $(\cos x, -\sin x)$, $(-\cos x, \sin x)$ et $(\sin x, \cos x)$. La quatrième ligne s'obtient en appliquant la troisième à $-x$, puis la première. Les tangentes s'obtiennent par quotient. Étapes omises : la justification de ces trois symétries, admise : une symétrie d'axe passant par O conserve les longueurs d'arc et envoie I sur un point connu. Les formules d'addition permettront de contrôler ces égalités sur des exemples, sans les démontrer : leur preuve utilise déjà ces angles associés.

Remarque : ce qui est admis

La preuve de cet énoncé est une **esquisse**. Elle admet les trois symétries annoncées au début du chapitre : elles envoient le point d'abscisse x sur les points d'abscisses $-x$, $\pi - x$ et $\frac{\pi}{2} - x$.

Comme l'enroulement, ces symétries sont des acquis admis. Plus loin, les formules d'addition permettront de contrôler ces égalités sur des exemples, sans les démontrer.

Exemple : trois valeurs exactes

D'après les formules des angles associés :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

De même, le sinus étant impair :

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) &= -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\\ &= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Simplifier une expression

Méthode : simplifier avec les angles associés

1. **Réduire** chaque argument à la forme $\pm x + k\frac{\pi}{2}$, en retirant des multiples de 2π (périodicité).
2. **Appliquer** la formule d'angle associé, en contrôlant le signe sur le cercle.
3. **Regrouper**, puis simplifier.

Rédaction attendue. « D'après la périodicité, $\sin(x + 3\pi) = \sin(x + \pi)$. D'après les angles associés, … Donc $A = \ldots$. »

Exemple : Exemple guidé : simplifier

Énoncé. Pour tout réel x, simplifie :

$$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 3\pi).$$

Réduire. Par périodicité, puis par le demi-tour :

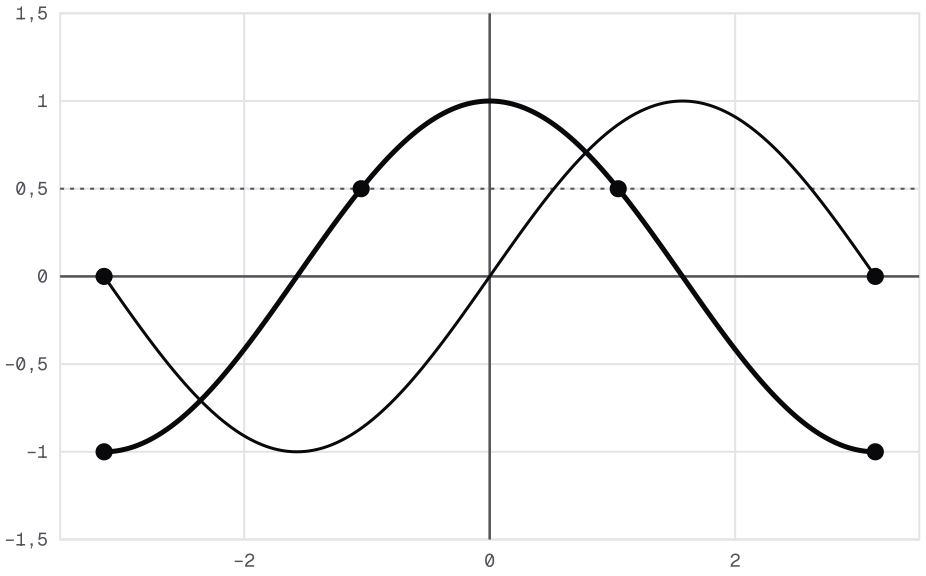
$$\begin{aligned}\sin(x + 3\pi) &= \sin(x + \pi + 2\pi)\\ &= \sin(x + \pi)\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

Appliquer. D'après les angles associés, $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Conclure. Pour tout réel x :

$$A = \sin x + \sin x - \sin x = \sin x.$$

Les courbes le montrent



$y = \cos x$ $y = \sin x$ Point plein $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ Point plein $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ $y = \frac{1}{2}$ Point du graphe

Avant de lire : les deux points marqués ont-ils la même ordonnée ? Les courbes du cosinus et du sinus sur [−π, π]. Les deux points marqués sur la courbe du cosinus, d'abscisses −π/3 et π/3, ont la même ordonnée 1/2 : cos(−x) = cos x.

À toi : Rédige une simplification

Rédige la simplification de $B = \cos(\pi + x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, pour tout réel x. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Traite chaque terme à part : demi-tour ou angle associé.

Indice 2

Pour $\cos(\pi + x)$, pense au demi-tour ; pour $\cos(-x)$, à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Indice 3

Point délicat : contrôle le signe de chaque terme sur le cercle, pour x petit et positif.

Réponse

« Soit x un réel.

Demi-tour. D'après la relation du demi-tour, $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Angles associés. D'après les angles associés, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Regrouper. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} B &= -\cos x + \cos x \\ &\quad + \cos x \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $B = \cos x$. »

Formules d'addition

Chercher la bonne formule

Devine : Un premier test

On cherche une formule pour $\cos(a - b)$. Avec $a = b = \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(a - b) = \cos 0 = 1$. Quelle expression vaut aussi 1 pour ces valeurs ?

A. $\cos a \cos b + \sin a \sin b$

Juste.

Juste : $0 \times 0 + 1 \times 1 = 1$.

B. $\cos a \cos b - \sin a \sin b$

Faux.

Elle vaut $0 - 1 = -1$.

C. $\sin a \cos b - \cos a \sin b$

Faux.

Elle vaut $1 \times 0 - 0 \times 1 = 0$.

D. $\cos a - \cos b$

Faux.

Elle vaut $0 - 0 = 0$.

Correction

Avec $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, seule $\cos a \cos b + \sin a \sin b$ donne 1.

Un seul essai ne prouve rien : le théorème qui suit l'établit pour tous les réels.

Petit rappel. Au tronc commun, en repère orthonormé :

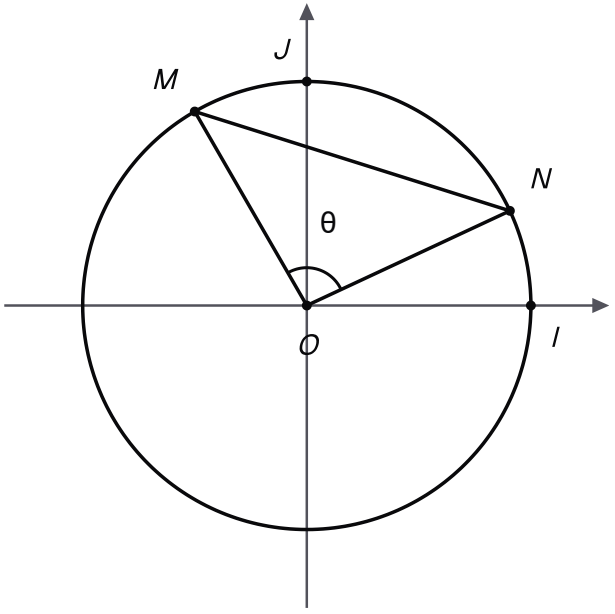
$$MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2.$$

Le produit scalaire donne aussi :

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2\,\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON},$$

avec $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = OM \times ON \times \cos\theta$, où θ mesure l'angle géométrique $\widehat{MON}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Prends les points M et N d'abscisses curvilignes a et b. La **distance** MN se calcule de deux façons : avec les coordonnées, et avec le produit scalaire, qui fait intervenir l'angle. Les deux résultats sont égaux.



Les points M et N d'abscisses curvilignes a et b, la distance MN à calculer de deux façons, et l'angle géométrique θ en O.

Le cosinus d'une différence

Théorème : Cosinus d'une différence

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Démonstration

Étape 1. Soit M et N les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses a et b. D'après F06, $M(\cos a, \sin a)$ et $N(\cos b, \sin b)$, et $OM = ON = 1$.

Étape 2. Le repère étant orthonormé, la distance de deux points (tronc commun) donne $MN^2 = (\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2$. En développant, avec $\cos^2 a + \sin^2 a = \cos^2 b + \sin^2 b = 1$ (F07), $MN^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$.

Étape 3. Or $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$. Par les propriétés et la définition du produit scalaire (tronc commun), $MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2\,\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 2 - 2\cos\theta$, où $\theta \in [0, \pi]$ mesure l'angle géométrique $\widehat{MON}$.

Étape 4. D'après F02, θ est la valeur absolue de la mesure principale de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$, dont $b - a$ est une mesure. Donc $\theta = |b - a + 2k\pi|$ pour un entier k, et $\cos\theta = \cos(a - b)$ par F08 (parité) et F07.

Étape 5. Les étapes 2 à 4 donnent $2 - 2\cos(a - b) = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$, d'où l'égalité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On calcule un même nombre de **deux façons**. La distance en coordonnées donne $MN^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$.

Le produit scalaire donne $MN^2 = 2 - 2\cos\theta$, et θ est relié à la mesure $b - a$ de l'angle orienté.

Ce double calcul est une idée qui resservira.

Vérifie : L'étape délicate

À l'étape 4 de la preuve, pourquoi peut-on remplacer $\cos\theta$ par $\cos(a - b)$?

A. Car $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont de norme 1.

Faux.
Les normes donnent $OM^2 + ON^2 = 2$ à l'étape 3, pas l'angle.

B. Car le cosinus est pair et de période 2π.

Juste.
Juste : $\theta = |b - a + 2k\pi|$ pour un entier k.

C. Car $\theta = a - b$ exactement.

Faux.
Faux en général : θ est dans $[0, \pi]$, alors que $a - b$ peut valoir 5 ou -3.

D. Car le repère est orthonormé.

Faux.
Cette hypothèse sert à l'étape 2, pour la distance en coordonnées.

Correction
θ est la valeur absolue d'une mesure $b - a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le cosinus est pair, donc $\cos\theta = \cos(b-a+2k\pi)$. Il est de période 2π, donc ce nombre vaut $\cos(b-a)$, puis $\cos(a-b)$ par parité.

Exemple : un contrôle de cohérence

Avec $a = \dfrac{\pi}{2}$, la formule donne, pour tout réel b :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right) &= 0\times\cos b \\ &\quad + 1\times\sin b \\ &= \sin b.\end{aligned}$$

On retrouve un angle associé. C'est un **contrôle**, pas une preuve : la preuve du théorème emploie déjà les angles associés, et on tournerait en rond.

Pourquoi est-ce vrai ? Une somme est une différence déguisée : $a+b = a-(-b)$. Un sinus est un cosinus déguisé : $\sin y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$. Les formules suivantes sortent donc toutes du cosinus d'une différence.

Sommes, sinus et tangentes

Propriété : Formules d'addition

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$;
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$;
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$.

Démonstration

Étape 1. On applique F09 à a et $-b$: $\cos(a+b) = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, car $\cos(-b) = \cos b$ et $\sin(-b) = -\sin b$ (F08).

Étape 2. D'après F08, $\sin(a+b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(a+b)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)-b\right)$. Par F09, cette quantité vaut $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)\cos b + \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)\sin b$, soit $\sin a\cos b + \cos a\sin b$ (F08).

Étape 3. On applique l'étape 2 à a et $-b$, avec F08.

Vérifie : Le bon couple

Pour obtenir $\cos(a+b)$, la preuve applique le cosinus d'une différence à quel couple de réels ?

A. À $\dfrac{\pi}{2}-a$ et b.

Faux.
Ce couple sert pour le sinus d'une somme, à l'étape 2.

B. À $a+b$ et 0.

Faux.
On obtient $\cos(a+b)=\cos(a+b)$: rien de nouveau.

C. À a et $-b$.

Juste.
Juste : $a-(-b)=a+b$.

D. À a et b.

Faux.
On obtient $\cos(a-b)$, pas $\cos(a+b)$.

Correction
Comme $a+b=a-(-b)$, la preuve écrit :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos(-b)\\ &\quad+\sin a\sin(-b).\end{aligned}$$

D'après les angles associés, $\cos(-b)=\cos b$ et $\sin(-b)=-\sin b$. D'où, pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b\\ &\quad-\sin a\sin b.\end{aligned}$$

Propriété : Tangente d'une somme et d'une différence

Soit a et b deux réels tels que $\cos a\neq 0$ et $\cos b\neq 0$.

- Si $\cos(a+b)\neq 0$, alors $1-\tan a\tan b\neq 0$ et $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.
- Si $\cos(a-b)\neq 0$, alors $1+\tan a\tan b\neq 0$ et $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$.

Démonstration

Étape 1. D'après F10, $\tan(a+b)=\dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$. On divise le numérateur et le dénominateur par $\cos a\cos b$, non nul par hypothèse : on obtient $\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

Étape 2. Le même calcul montre que $1-\tan a\tan b=\dfrac{\cos(a+b)}{\cos a\cos b}$, qui n'est pas nul puisque $\cos(a+b)\neq 0$.

Étape 3. On applique les étapes 1 et 2 à a et $-b$: $\cos(-b)=\cos b\neq 0$ et $\tan(-b)=-\tan b$ (F08).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout découle du cosinus d'une différence. Remplacer b par $-b$ donne les sommes ; passer par $\frac{\pi}{2} - y$ change un cosinus en sinus.

Pour la tangente, on divise par $\cos a \cos b$: d'où les conditions $\cos a \neq 0$ et $\cos b \neq 0$. La condition sur $\cos(a+b)$ assure un dénominateur non nul.

Exemple : Contre-exemple : une tangente qui n'existe pas

Avec $a = b = \frac{\pi}{4}$, on a $\tan a = \tan b = 1$ et $1 - \tan a \tan b = 0$. La formule donnerait $\frac{2}{0}$.

En effet, $a + b = \frac{\pi}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$: $\tan(a+b)$ n'existe pas. La condition $\cos(a+b) \neq 0$ de l'énoncé est donc nécessaire.

Des valeurs exactes

Vérifie : Une tangente exacte

On donne $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Que vaut $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, avec $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$?

A. $\sqrt{3} + 1$

Faux.

Tu as additionné les tangentes : la tangente d'une somme n'est pas la somme des tangentes.

B. $2 + \sqrt{3}$

Faux.

Le dénominateur $1 - \sqrt{3}$ est négatif : le résultat l'est aussi.

C. $-2 + \sqrt{3}$

Faux.

Recalcule $(\sqrt{3}+1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$: les deux termes changent de signe.

D. $-2 - \sqrt{3}$

Juste.

Juste : le dénominateur $1 - \sqrt{3}$ est négatif.

Correction

Les cosinus de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12}$ sont non nuls : aucun de ces réels n'est de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

La formule de la tangente d'une somme donne, après multiplication par la quantité conjuguée $1 + \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} \\ &= -2-\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Méthode : calculer une valeur exacte avec les formules

1. **Décomposer** l'angle en somme ou différence d'angles remarquables, comme $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$.
2. **Nommer** la formule, puis l'appliquer.
3. **Simplifier** ; pour une racine carrée, justifier son signe.

Rédaction attendue. « On a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. D'après la formule du cosinus d'une différence, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dots$ Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dots$ »

Exemple : Exemple guidé : la valeur du début

Énoncé. Calcule $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Cosinus d'une différence. On écrit $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. D'après la formule du cosinus d'une différence :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

Sinus d'une différence. De même, d'après la formule du sinus d'une différence :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

À toi : Rédige une valeur exacte

Rédige le calcul de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, en écrivant $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Nomme la formule : cosinus d'une somme.
Indice 2
Écris $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
Indice 3
Point délicat : le signe moins de la formule du cosinus d'une somme.

Réponse
« On a $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$. D'après la formule du cosinus d'une somme :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. Donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. »

Duplication, linéarisation, tangente de l'arc moitié

Le cas b = a

Devine : Doubler l'angle

D'après la formule du cosinus d'une somme, que vaut $\cos(2a) = \cos(a+a)$, pour tout réel a ?

A. $\cos^2 a - \sin^2 a$

Juste.

Juste : $\cos a\cos a - \sin a\sin a$.

B. $\cos^2 a + \sin^2 a$

Faux.

Cette somme vaut toujours 1 ; or $\cos(2a) = -1$ pour $a = \frac{\pi}{2}$.

C. $2\sin a\cos a$

Faux.

C'est l'expression de $\sin(2a)$, pas celle de $\cos(2a)$.

D. $2\cos a$

Faux.

Teste avec $a = 0$: $\cos 0 = 1$, alors que $2\cos 0 = 2$.

Correction

Avec $b = a$ dans la formule du cosinus d'une somme, pour tout réel a :

$$\begin{aligned}\cos(a + a) &= \cos a \cos a \\ &\quad - \sin a \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a.\end{aligned}$$

Pourquoi est-ce vrai ? Les formules de duplication sont les formules d'addition avec $b = a$.

La relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donne deux autres écritures de $\cos(2a)$, qu'on retourne pour linéariser. Avec $\dfrac{a}{2}$ à la place de a, on exprime ensuite tout avec $\tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

Duplication et tangente de l'arc moitié

Propriété : Formules de duplication et de linéarisation

Pour tout réel a :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$;
- $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$.

Si $\cos a \neq 0$ et $\cos(2a) \neq 0$: $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.

Démonstration

Étape 1. F10 avec $b = a$ donne $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Étape 2. Comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ (F07), on remplace $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$, puis $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$: on obtient les deux autres écritures de $\cos(2a)$.

Étape 3. On isole $\cos^2 a$ dans $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, puis $\sin^2 a$ dans $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$.

Étape 4. F11 avec $b = a$ donne la formule de $\tan(2a)$.

Vérifie : D'où vient la linéarisation ?

À l'étape 3 de la preuve, de quelle égalité tire-t-on $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$?

A. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
Faux.
Cette formule ne contient aucun carré.

B. $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$
Juste.
Juste : on isole $\sin^2 a$.

C. $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

Faux.
Elle donne $\cos^2 a$, pas $\sin^2 a$.

D. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

Faux.
Elle contient les deux carrés : seule, elle ne permet pas d'isoler $\sin^2 a$.

Correction
On part de $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$. Alors $2\sin^2 a = 1 - \cos(2a)$, donc :

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

Propriété : Expressions en fonction de tan(a/2)

Soit a un réel tel que $\cos\left(\frac{a}{2}\right) \neq 0$, et $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$. Alors :

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin a = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Si de plus $\cos a \neq 0$, alors $t^2 \neq 1$ et $\tan a = \frac{2t}{1 - t^2}$.

Démonstration
Étape 1. On note $c = \cos\left(\frac{a}{2}\right)$ et $s = \sin\left(\frac{a}{2}\right)$, avec $c \neq 0$ et $t = \frac{s}{c}$. Par F12 appliqué à $\frac{a}{2}$:
$\cos a = c^2 - s^2$ et $\sin a = 2sc$.

Étape 2. Comme $c^2 + s^2 = 1$ (F07), $\cos a = \frac{c^2 - s^2}{c^2 + s^2}$ et $\sin a = \frac{2sc}{c^2 + s^2}$. On divise le numérateur et le dénominateur par $c^2 \neq 0$: $\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Étape 3. Si $\cos a \neq 0$, l'étape 2 donne $1 - t^2 \neq 0$, puis $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2t}{1 - t^2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un cas particulier peut être plus utile que la formule générale : $b = a$ donne la duplication. La relation fondamentale fait passer d'une écriture à l'autre.

Diviser par $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)$ exige qu'il soit non nul : chaque condition de l'énoncé vient d'une division de la preuve.

Les expressions en $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$ sont un **Bonus** : leur place au programme reste à confirmer.

Exemple : Contre-exemple : la condition sur le cosinus

Pour $a = \pi$, $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$: $t = \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ n'existe pas. Les expressions en t ne s'appliquent pas, alors que $\cos\pi$ et $\sin\pi$ existent.

Pour $a = \dfrac{\pi}{2}$, on a $t = 1$: on retrouve $\cos a = \dfrac{1-1}{2} = 0$ et $\sin a = \dfrac{2}{2} = 1$. Mais $t^2 = 1$, et $\tan a$ n'existe pas.

Valeurs exactes et pièges

Exemple : Exemple guidé (Bonus) : tout exprimer avec t

Énoncé. Un réel a vérifie $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) \neq 0$ et $\tan\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$. Calcule $\cos a$, $\sin a$ et $\tan a$.

Dénominateur. Avec $t = \dfrac{1}{2}$: $1 + t^2 = \dfrac{5}{4}$ et $1 - t^2 = \dfrac{3}{4}$.

Cosinus et sinus. D'après les expressions en fonction de t : $\cos a = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{5}$ et $\sin a = 1 \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}$.

Tangente. $t^2 \neq 1$, donc $\cos a \neq 0$ et $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{4}{3}$.

Vérifie : Un carré de cosinus

On donne $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Que vaut $\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$?

A. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

Faux.

Tu as oublié le signe moins de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

B. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Faux.

Tu as oublié de diviser par 2 dans la formule de linéarisation.

C. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Faux.

Tu as divisé $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ par 2 : la linéarisation ajoute d'abord 1. Et un carré n'est jamais négatif.

Correction

La formule de linéarisation avec $a = \dfrac{3\pi}{8}$, donc $2a = \dfrac{3\pi}{4}$, donne :

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \frac{1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Exemple : Exemple guidé : une valeur exacte par linéarisation

Énoncé. Calcule $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Linéariser. D'après la formule de linéarisation, avec $a = \frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Signe. $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$: le point associé est à droite de l'axe des ordonnées, donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

Conclure. Le cosinus est la racine carrée positive :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\end{aligned}$$

Attention : une formule ne se distribue pas

✗ « $\cos(2a) = 2\cos a$ », ou « $\cos(a+b) = \cos a + \cos b$ ».

✓ Avec $a = \frac{\pi}{2}$: $\cos(2a) = \cos\pi = -1$, alors que $2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Les vraies formules sont $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.

À toi : Rédige une identité

Rédige la preuve de : pour tout réel x, $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Reconnais une différence de deux carrés.

Indice 2

$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$.

Indice 3

Point délicat : nomme les deux formules employées.

Réponse
« Soit x un réel.

Factoriser. On pose $A = \cos^2 x$ et $B = \sin^2 x$. Alors $\cos^4 x - \sin^4 x = A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

Relation fondamentale. $A + B = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Duplication. D'après la formule de duplication, $A - B = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$. »

Produits et sommes

Ajouter deux formules

Devine : Deux formules ajoutées

On ajoute membre à membre $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Qu'obtient-on ?

A. $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \sin a \sin b$
Faux.
Les termes en $\sin a \sin b$ ont des signes opposés : ils s'éliminent.

B. $\cos(a + b) + \cos(a - b) = \cos(2a)$
Faux.
Le cosinus ne se distribue pas : on n'ajoute pas les arguments.

C. $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 0$
Faux.
Seuls les termes en sinus s'éliminent ; les termes en cosinus s'ajoutent.

D. $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$
Juste.
Juste : les termes en sinus s'éliminent.

Correction
Les termes $- \sin a \sin b$ et $+ \sin a \sin b$ s'éliminent ; les deux termes $\cos a \cos b$ s'ajoutent. Donc :

$$\begin{aligned} &\cos(a + b) + \cos(a - b) \\ &= 2 \cos a \cos b. \end{aligned}$$

Un **produit** s'écrit ainsi comme une **somme**.

Pourquoi est-ce vrai ? Les formules d'addition s'ajoutent ou se soustraient deux à deux, et des termes s'éliminent : un produit devient une somme.

En posant $p = a + b$ et $q = a - b$, on lit ces égalités à l'envers : une somme devient un produit.

Produit en somme, somme en produit

Propriété : Transformation d'un produit en somme

Pour tous réels a et b :

- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$;
- $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$;
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$.

Démonstration

Étape 1. D'après F09 et F10, $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. En additionnant ces deux égalités, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$; en les soustrayant, $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$.

Étape 2. D'après F10, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. En additionnant, $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$.

Étape 3. On divise chaque égalité par 2.

Vérifie : Le changement de variables

Dans la preuve des formules qui changent une somme en produit, on pose $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$. Pourquoi ce choix ?

A. Pour avoir $a+b = p$ et $a-b = q$.

Juste.

Juste : les formules produit-somme font apparaître ces deux arguments.

B. Pour avoir $a = p$ et $b = q$.

Faux.

Avec ce choix, $a+b = p+q$: ce n'est pas l'argument cherché.

C. Pour que a et b soient des angles remarquables.

Faux.

p et q sont des réels quelconques : rien n'est remarquable ici.

D. Pour que $\cos a$ ne soit pas nul.

Faux.

Aucune division n'intervient dans cette preuve.

Correction

Les formules produit-somme font apparaître $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. Pour obtenir $\cos p$ et $\cos q$, il faut $a+b = p$ et $a-b = q$.

En ajoutant puis en soustrayant ces égalités, on trouve :

$$a = \frac{p+q}{2},$$
$$b = \frac{p-q}{2}.$$

Propriété : Transformation d'une somme en produit

Pour tous réels p et q :

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Démonstration

Étape 1. On pose $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$; alors $a + b = p$ et $a - b = q$.

Étape 2. Les trois formules de F14, appliquées à a et b et multipliées par 2, donnent $\cos p + \cos q = 2\cos a\cos b$, $\cos q - \cos p = 2\sin a\sin b$, c'est-à-dire $\cos p - \cos q = -2\sin a\sin b$, et $\sin p + \sin q = 2\sin a\cos b$: ce sont les trois premières formules.

Étape 3. Comme $\sin(-q) = -\sin q$ (F08), $\sin p - \sin q = \sin p + \sin(-q)$. La troisième formule appliquée à p et $-q$ donne $2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Produit vers somme : on **combine** deux formules d'addition, et des termes s'éliminent.

Somme vers produit : on lit les mêmes égalités à l'envers, grâce au **changement de variables** $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.

Aucune hypothèse : ces formules valent pour tous les réels.

Exemple : un produit linéarisé

D'après la formule produit-somme du sinus par le cosinus, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\sin(3x)\cos x\\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(4x) + \sin(2x)\right].\end{aligned}$$

Pour $x = \dfrac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned}&\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\\&= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&= \frac{2+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Factoriser

Vérifie : Une somme de cosinus

Quelle est la factorisation de $\cos(5x) + \cos x$, pour tout réel x ?

A. $-2\sin(3x)\sin(2x)$

Faux.

Cette forme est celle d'une **différence** de deux cosinus.

B. $2\cos(3x)\cos(2x)$

Juste.

Juste : $\dfrac{5x+x}{2} = 3x$ et $\dfrac{5x-x}{2} = 2x$.

C. $2\cos(6x)\cos(4x)$

Faux.

Tu as oublié de diviser par 2 : les arguments sont $\dfrac{p+q}{2}$ et $\dfrac{p-q}{2}$.

D. $\cos(6x)$

Faux.

Le cosinus d'une somme n'est pas la somme des cosinus.

Correction

Avec $p = 5x$ et $q = x$: $\dfrac{p+q}{2} = 3x$ et $\dfrac{p-q}{2} = 2x$.

La formule de la somme de deux cosinus donne, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\cos(5x) + \cos x\\&= 2\cos(3x)\cos(2x).\end{aligned}$$

Méthode : transformer une somme en produit, un produit en somme

1. **Reconnaître** ce qu'on a sous les yeux : deux cosinus (ou deux sinus) ajoutés ou retranchés, ou bien un produit de deux lignes trigonométriques.
2. **Appliquer** la formule somme-produit pour factoriser, ou produit-somme pour linéariser.
3. **Simplifier** les arguments, puis exploiter la forme obtenue : signe, équation, valeur exacte.

Rédaction attendue. « D'après la formule de la différence de deux sinus, appliquée à $p = \ldots$ et $q = \ldots$, on obtient … Donc … »

À toi : Rédige une factorisation

Rédige la factorisation de $\sin(3x) - \sin x$, pour tout réel x. Déduis-en la valeur de $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

C'est une différence de deux sinus : nomme la formule.

Indice 2

Avec $p = 3x$ et $q = x$: $\frac{p+q}{2} = 2x$ et $\frac{p-q}{2} = x$.

Indice 3

Point délicat : dans $\sin p - \sin q$, le cosinus porte sur $\frac{p+q}{2}$.

Réponse

« Soit x un réel.

Factoriser. La formule de la différence de deux sinus, avec $p = 3x$ et $q = x$, donne $\frac{p+q}{2} = 2x$, $\frac{p-q}{2} = x$, et :

$$\begin{aligned} &\sin(3x) - \sin x \\ &= 2\cos(2x)\sin x. \end{aligned}$$

Valeur. Pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Conclusion. Donc $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. »

Transformer a cos x + b sin x

Une somme qui ne dépasse pas

Devine : La plus grande valeur

Lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, le nombre $\cos x + \sin x$ reste entre deux bornes. D'après toi, quelle est sa plus grande valeur ?

A. 2

Faux.

Il faudrait $\cos x = 1$ et $\sin x = 1$ en même temps : impossible, car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

B. 1

Faux.

En $x = \frac{\pi}{4}$, la somme vaut $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, plus que 1.

C. $\sqrt{2}$

Juste.

Juste : elle est atteinte en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

D. $\dfrac{\pi}{4}$

Faux.

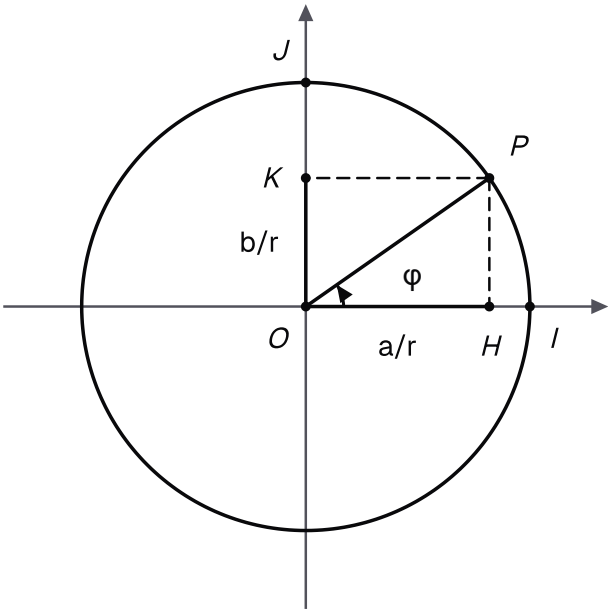
C'est le réel où cette valeur est atteinte, pas la valeur elle-même.

Correction

En $x = \dfrac{\pi}{4}$, la somme vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Le théorème qui suit montre qu'elle ne dépasse jamais $\sqrt{2}$: c'est un cosinus multiplié par $\sqrt{2}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Diviser a et b par $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ fabrique les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique. Le cosinus d'une différence fait le reste.



Diviser a et b par r place le point P sur le cercle : son abscisse est a/r, son ordonnée b/r, et φ est une abscisse curviligne de P.

La forme r cos(x − φ)

Théorème : Transformation de a cos x + b sin x

Soit a et b deux réels non tous deux nuls, et $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il existe un réel φ tel que

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$

et, pour tout réel x :

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi).$$

Démonstration

Étape 1. Comme a et b ne sont pas tous deux nuls, $r > 0$. Le point $P\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ vérifie $OP^2 = \frac{a^2+b^2}{r^2} = 1$ dans le repère orthonormé : P appartient à $\mathcal{C}$.

Étape 2. D'après F01, P a une abscisse curviligne φ ; d'après F06, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.

Étape 3. Pour tout réel x, $a\cos x + b\sin x = r\left(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x\right)$. D'après F09, la parenthèse vaut $\cos(x-\varphi)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On **normalise** : diviser a et b par r donne un point du cercle trigonométrique. Ce point a une abscisse curviligne φ, dont on lit le cosinus et le sinus.

On reconnaît ensuite le cosinus d'une différence. Chaque hypothèse de l'énoncé sert à une étape précise.

Vérifie : Une hypothèse au travail

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « a et b non tous deux nuls » ?

A. À rendre le réel φ unique.

Faux.

φ n'est jamais unique : il est défini à 2π près, comme toute abscisse curviligne.

B. À rendre $a\cos x + b\sin x$ positif pour tout réel x.

Faux.

Cette expression change de signe : pour $a = 1$ et $b = 0$, elle vaut $\cos x$.

C. À obtenir $r = 1$.

Faux.

r vaut $\sqrt{a^2+b^2}$, pas 1 en général ; c'est le point P qui est à la distance 1 de O.

D. À avoir $r > 0$, donc à pouvoir diviser par r.

Juste.

Juste : c'est l'étape 1 ; sans elle, $r = 0$.

Correction

La preuve divise a et b par $r = \sqrt{a^2+b^2}$, pour obtenir un point P du cercle trigonométrique. Cette division exige $r \neq 0$.

Or $r = 0$ si et seulement si $a = b = 0$. L'hypothèse « non tous deux nuls » donne donc $r > 0$.

Exemple : Contre-exemple : une seule condition ne suffit pas

Pour $\cos x - \sin x$, on a $r = \sqrt{2}$. La condition $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est vérifiée par $\dfrac{\pi}{4}$ et par $-\dfrac{\pi}{4}$. Seul $-\dfrac{\pi}{4}$ vérifie aussi $\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Avec $\dfrac{\pi}{4}$, on obtiendrait $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$: ce n'est pas l'expression de départ.

Donc $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Méthode et lecture

Méthode : écrire a cos x + b sin x sous la forme r cos(x − φ)

1. **Calculer** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. **Mettre** r **en facteur** : $a\cos x + b\sin x = r\left(\dfrac{a}{r}\cos x + \dfrac{b}{r}\sin x\right)$.
3. **Trouver** φ avec ses **deux** conditions : $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.
4. **Conclure** par le cosinus d'une différence. Pour résoudre $a\cos x + b\sin x = c$, se ramener à $\cos(x - \varphi) = \dfrac{c}{r}$.

Rédaction attendue. « On a $r = \ldots$, et $\varphi = \ldots$ vérifie $\cos\varphi = \ldots$ et $\sin\varphi = \ldots$. Donc, pour tout réel x, $a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi)$. »

Exemple : Exemple guidé : transformer, puis lire les extremums

Énoncé. Écris $-\cos x + \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$, puis donne ses valeurs extrêmes.

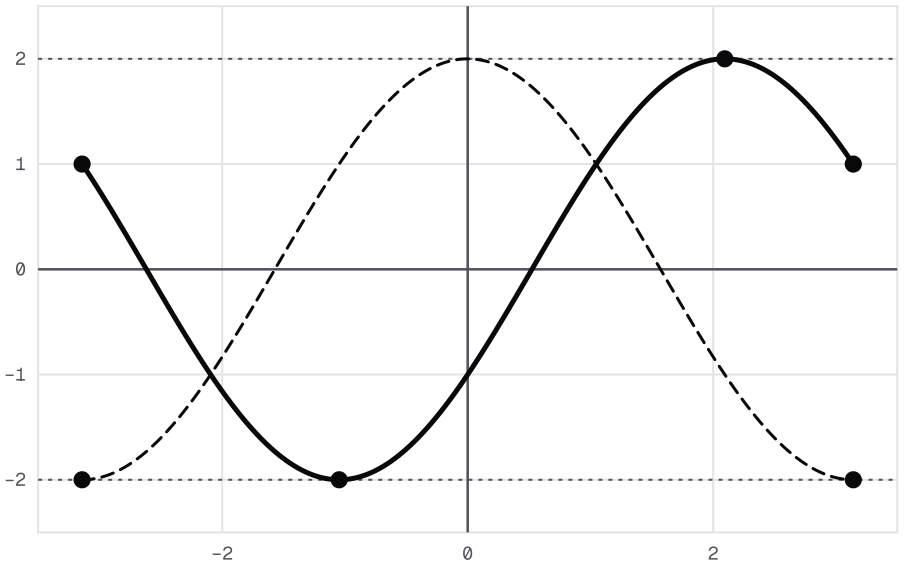
Rayon. Ici $a = -1$ et $b = \sqrt{3}$, donc $r = \sqrt{1 + 3} = 2$.

Angle. Il faut $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ convient.

Conclure. D'après le théorème, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &-\cos x + \sqrt{3}\sin x \\ &= 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Un cosinus est compris entre -1 et 1 : ce nombre est donc entre -2 et 2. Il vaut 2 pour $x = \dfrac{2\pi}{3}$, et -2 pour $x = -\dfrac{\pi}{3}$.



$y = 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ $y = 2\cos x$ Point plein $\left(\frac{2\pi}{3}, 2\right)$ Point plein $\left(-\frac{\pi}{3}, -2\right)$ $y = 2$ $y = -2$ Point du graphe

Avant de lire : de combien la courbe en pointillés est-elle décalée ? Sur [−π, π], la courbe de x ↦ −cos x + √3 sin x, c'est-à-dire de x ↦ 2 cos(x − 2π/3), est celle de x ↦ 2 cos x décalée de 2π/3 vers la droite. Elle atteint 2 en 2π/3 et −2 en −π/3.

À toi : Rédige une transformation

Rédige l'écriture de $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$, puis donne sa plus grande valeur. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $a = b = \sqrt{2}$.

Indice 2

Tu trouves $r = 2$; cherche φ tel que $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Indice 3

Point délicat : écris les deux conditions sur l'angle, puis justifie la plus grande valeur par l'encadrement du cosinus.

Réponse

« **Rayon.** Ici $a = b = \sqrt{2}$, donc $r = \sqrt{2 + 2} = 2$.

Angle. Le réel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ vérifie les deux conditions $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{r}$.

Forme. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x\\ &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Plus grande valeur. Comme un cosinus vaut au plus 1, l'expression vaut au plus 2. Elle vaut 2 pour $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Conclusion. La plus grande valeur de $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$ est 2. »

Équations cos x = cos α, sin x = sin α, tan x = tan α

Deux points sur le cercle

Devine : Combien de solutions ?

Combien de réels x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$ vérifient $\cos x = \dfrac{1}{2}$?

A. Deux : $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

Juste.

Juste : deux points du cercle ont pour abscisse un demi.

B. Deux : $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

Faux.

$\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$: c'est le **sinus** qui est le même en $\dfrac{\pi}{3}$ et en $\dfrac{2\pi}{3}$.

C. Une infinité.

Faux.

Dans $\mathbb{R}$, oui ; mais l'intervalle $]-\pi, \pi]$ ne fait qu'un tour.

D. Un seul : $\dfrac{\pi}{3}$.

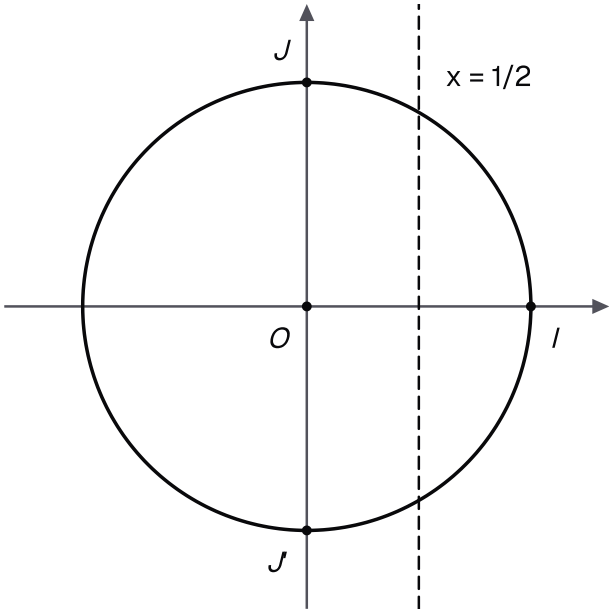
Faux.

Le point d'abscisse curviligne $-\dfrac{\pi}{3}$ a aussi pour abscisse $\dfrac{1}{2}$: c'est le symétrique du premier par rapport à l'axe des abscisses.

Correction

Les points du cercle d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ sont deux, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Leurs abscisses curvilignes principales sont $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

Sur $]-\pi, \pi]$, l'équation a donc deux solutions.



Les données de la question : la droite x = 1/2, verticale, tracée sur le cercle unité.

On commence par le cas le plus simple : quand un sinus est-il **nul** ? Sur le cercle, l'ordonnée est nulle en I et en $I'(-1, 0)$ seulement.

Pourquoi est-ce vrai ? Ces deux points ont des abscisses curvilignes connues. Ensuite, $\cos x - \cos \alpha$ devient un **produit** par une formule somme-produit. Il ne reste qu'à chercher quand un facteur s'annule.

Annulation, puis équations

Propriété : Annulation du sinus et du cosinus

Pour tout réel y :

- $\sin y = 0$ si et seulement si $y \equiv 0\ [\pi]$;
- $\cos y = 0$ si et seulement si $y \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Démonstration

Étape 1. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse y ; d'après F06, $M(\cos y, \sin y)$. Si $\sin y = 0$, alors $\cos^2 y = 1$ (F07), donc $\cos y = 1$ ou $\cos y = -1$: M est le point $I(1, 0)$ ou son symétrique $I'(-1, 0)$ par rapport à O. Réciproquement, ces deux points ont une ordonnée nulle.

Étape 2. Le point I a pour abscisses les réels $2k\pi$; son symétrique I' a pour abscisses les réels $\pi + 2k\pi$ (F01). La réunion de ces deux ensembles est l'ensemble des réels $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Étape 3. D'après F08, $\cos y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$. Par l'étape 2, $\cos y = 0$ si et seulement si $\dfrac{\pi}{2} - y = k\pi$ pour un entier k, c'est-à-dire $y = \dfrac{\pi}{2} - k\pi$, soit $y \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Vérifie : Le premier pas de la preuve

Dans la preuve de l'annulation du sinus, pourquoi $\sin y = 0$ entraîne-t-il $\cos y = 1$ ou $\cos y = -1$?

A. Par lecture de la courbe du sinus.

Faux.

Une lecture graphique ne prouve rien : la preuve s'appuie sur une relation démontrée.

B. Par la relation $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$.

Juste.

Juste : avec $\sin y = 0$, il reste $\cos^2 y = 1$.

C. Par la périodicité du cosinus.

Faux.

La périodicité relie y et $y + 2\pi$; elle ne dit rien de la valeur de $\cos y$.

D. Par la parité du cosinus.

Faux.

La parité relie $\cos y$ et $\cos(-y)$; elle ne fixe pas leur valeur.

Correction

Si $\sin y = 0$, la relation fondamentale $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ donne $\cos^2 y = 1$. Donc $\cos y = 1$ ou $\cos y = -1$: le point d'abscisse curviligne y est $I(1, 0)$ ou $I'(-1, 0)$.

Théorème : Équations cos x = cos α, sin x = sin α, tan x = tan α

Soit α un réel. Pour tout réel x :

- $\cos x = \cos \alpha$ si et seulement si $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\alpha\ [2\pi]$;
- $\sin x = \sin \alpha$ si et seulement si $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \alpha\ [2\pi]$;
- lorsque $\cos \alpha \neq 0$ et $\cos x \neq 0$: $\tan x = \tan \alpha$ si et seulement si $x \equiv \alpha\ [\pi]$.

Démonstration

Étape 1. D'après F15, $\cos x - \cos \alpha = -2 \sin\left(\dfrac{x+\alpha}{2}\right) \sin\left(\dfrac{x-\alpha}{2}\right)$. Ce produit est nul si et seulement si l'un des sinus l'est, soit, par F17, $\dfrac{x+\alpha}{2} = k\pi$ ou $\dfrac{x-\alpha}{2} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$: $x = -\alpha + 2k\pi$ ou $x = \alpha + 2k\pi$.

Étape 2. D'après F15, $\sin x - \sin \alpha = 2 \cos\left(\dfrac{x+\alpha}{2}\right) \sin\left(\dfrac{x-\alpha}{2}\right)$. Par F17, il est nul si et seulement si $\dfrac{x+\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\dfrac{x-\alpha}{2} = k\pi$: $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ ou $x = \alpha + 2k\pi$.

Étape 3. Comme $\cos x \cos \alpha \neq 0$, $\tan x = \tan \alpha$ équivaut à $\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha = 0$, soit $\sin(x - \alpha) = 0$ (F10), soit $x - \alpha \equiv 0\ [\pi]$ (F17).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Résoudre une égalité, c'est annuler une **différence**. La formule somme-produit transforme cette différence en produit ; l'annulation du sinus ou du cosinus traite chaque facteur.

Pour la tangente, on se ramène à $\sin(x-\alpha)=0$, d'où le module π. Les conditions $\cos x \neq 0$ et $\cos \alpha \neq 0$ viennent des quotients.

Exemple : Contre-exemple : les conditions de la tangente

Avec $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, l'égalité $\sin(x-\alpha)=0$ donne $x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Pourtant, ni $\tan x$ ni $\tan \alpha$ n'existent : l'équation $\tan x = \tan \alpha$ n'a pas de sens. Le passage à $\sin(x-\alpha)=0$ n'est une équivalence que si $\cos x \neq 0$ et $\cos \alpha \neq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

Exemple : Exemple guidé : résoudre dans $\mathbb{R}$

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Forme. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$: l'équation s'écrit $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Familles. D'après le théorème des équations, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$.

Soit $2x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=\pi+2k\pi$.

Isoler. En divisant par 2, le module aussi : $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Conclure. Dans $\mathbb{R}$:

$$S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Vérifie : Toutes les familles

Quelles sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x=\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$?

A. $x \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$ seulement.
Faux.
Il manque une famille : deux points du cercle ont la même abscisse.

B. $x \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi-\dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$.
Faux.

C'est la forme des solutions de $\sin x = \sin \alpha$, pas de $\cos x = \cos \alpha$.

C. $x \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$.

Juste.

Juste : deux familles, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

D. $x \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [\pi]$.

Faux.

Le module π est celui des équations en tangente.

Correction

D'après le théorème des équations, $\cos x = \cos \alpha$ si et seulement si $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\alpha\ [2\pi]$.

Avec $\alpha = \dfrac{2\pi}{5}$: $x \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$.

Méthode **: résoudre une équation trigonométrique**

1. **Écrire les conditions** d'existence : tangente, quotient.
2. **Se ramener** à $\cos X = \cos \alpha$, $\sin X = \sin \alpha$ ou $\tan X = \tan \alpha$, avec une valeur remarquable.
3. **Appliquer** le théorème : écrire **toutes** les familles avec $k \in \mathbb{Z}$, puis isoler x en divisant aussi le module.
4. **Sélectionner** les solutions de l'intervalle demandé en encadrant k, et vérifier les conditions.

Rédaction attendue. « L'équation s'écrit $\cos X = \cos \alpha$. Elle équivaut à $X = \alpha + 2k\pi$ ou $X = -\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, soit … Donc $S = \dots$ »

Dans un intervalle, et les pièges

Exemple **: Exemple guidé : résoudre dans un intervalle**

Énoncé. Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\cos(2x) = \cos x$.

Familles. D'après le théorème des équations, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = x + 2k\pi$ ou $2x = -x + 2k\pi$. Soit $x = 2k\pi$ ou $x = \dfrac{2k\pi}{3}$.

La première famille est contenue dans la seconde : $2k\pi = \dfrac{2(3k)\pi}{3}$.

Sélectionner. $-\pi < \dfrac{2k\pi}{3} \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{3}{2} < k \leq \dfrac{3}{2}$, soit $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Conclure. $S = \left\{-\dfrac{2\pi}{3}, 0, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Attention **: ne perds pas une famille**

✗ « $\sin x = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. »

✓ Le réel $\dfrac{5\pi}{6}$ est aussi solution, car $\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Il y a deux familles : $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Seule l'équation $\tan x = \tan \alpha$ n'en donne qu'une, modulo π.

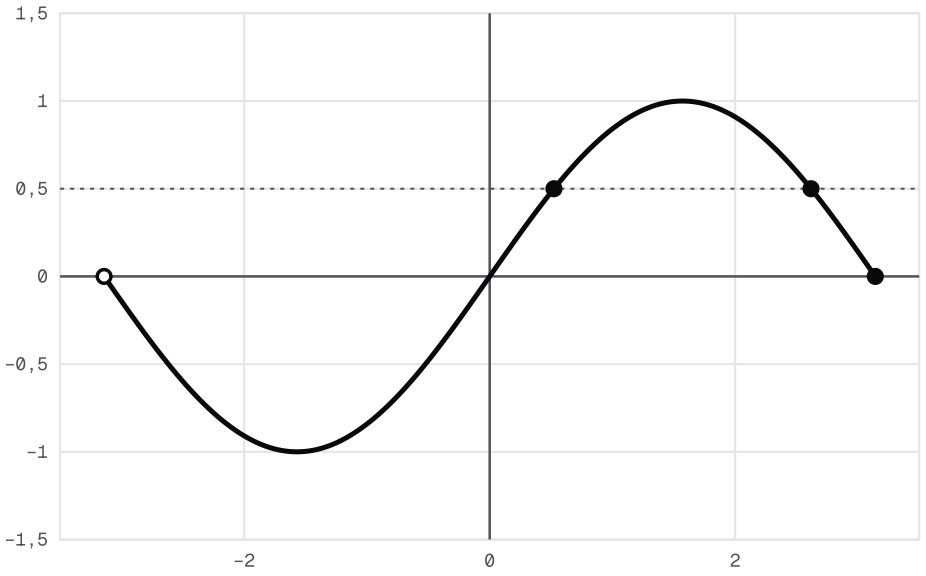
Attention : diviser une congruence

✗ « $4x \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $x \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$. »

✓ $4x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ donne $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$: le module se divise aussi, et $x \equiv \dfrac{\pi}{12}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Sinon on perd des solutions, comme $\dfrac{7\pi}{12}$.

Lire et rédiger



Sur]−π, π], la courbe du sinus coupe la droite d'équation y = 1/2 en deux points, d'abscisses π/6 et 5π/6 : une solution par famille.

Borne exclue en x = −π : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

À toi : Rédige une équation en tangente

Rédige la résolution dans $[0, 2\pi[$ de l'équation $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris la condition d'existence de la tangente, puis $1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Indice 2

Le théorème donne $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Indice 3

Point délicat : encadre k pour rester dans $[0, 2\pi[$, où la borne 2π est exclue.

Réponse

« **Condition.** L'équation a un sens si et seulement si $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0$.

Forme. Comme $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, elle s'écrit $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Famille. D'après le théorème des équations, $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Sélection. La condition $0 \leq \frac{\pi}{12} + k\pi < 2\pi$ donne $-\frac{1}{12} \leq k < \frac{23}{12}$, soit $k \in \{0, 1\}$.

Vérification. Pour ces valeurs, $x + \frac{\pi}{6}$ vaut $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$, de cosinus non nul.

Conclusion. Donc $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right\}$. »

Équations qui s'y ramènent

Un second degré caché

Devine : Une condition à ne pas oublier

Dans l'équation $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, tu poses $X = \cos x$. Quelle condition dois-tu garder sur X ?

A. $X \geq 0$

Faux.

Un cosinus peut être négatif : $\cos \pi = -1$.

B. $X \neq 0$

Faux.

Aucun quotient ici : rien n'interdit $\cos x = 0$.

C. Aucune condition.

Faux.

Une racine $X = 2$ ne donnerait aucun réel x.

D. $X \in [-1, 1]$

Juste.

Juste : un cosinus est toujours entre -1 et 1.

Correction

Pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$. Une racine X de l'équation du second degré ne donne des solutions en x que si $-1 \leq X \leq 1$.

Rappel : si $a \neq 0$, l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ a pour discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, ses racines sont $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple : Exemple guidé : un second degré en cos x

Énoncé. Résous dans $]-\pi, \pi]$: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

Changer d'inconnue. Avec $X = \cos x$, l'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0$. Le discriminant vaut $9 - 8 = 1$, d'où $X = 1$ ou $X = \dfrac{1}{2}$. Ces deux valeurs sont dans $[-1, 1]$.

Revenir à x. Sur $]-\pi, \pi]$, $\cos x = 1$ donne $x = 0$. Et $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ donne $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}$, d'après le théorème des équations.

Conclure. $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3}, 0, \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

Avec la forme r cos(x – φ)

Exemple : Exemple guidé : a cos x + b sin x = c

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: $\cos x + \sin x = 1$.

Transformer. Ici $r = \sqrt{2}$, et $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ vérifie $\cos\varphi = \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. L'équation s'écrit $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, elle équivaut à $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Familles. D'après le théorème des équations, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$. Soit $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$.

Conclure. $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Vérifie : Une équation sans solution ?

L'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 3$ a-t-elle des solutions réelles ?

A. Non, car l'expression vaut au plus 2.

Juste.

Juste : $r = 2$ et un cosinus vaut au plus 1.

B. Oui, deux familles, comme toute équation en cosinus.

Faux.

Il faut d'abord que $\dfrac{c}{r}$ soit dans $[-1, 1]$.

C. Oui, car l'expression atteint $\sqrt{3} + 1$, proche de 3.

Faux.

$\cos x$ et $\sin x$ ne valent pas 1 en même temps : la plus grande valeur est 2, et $2 < 3$.

D. Oui, car pour $x = 0$ le cosinus vaut 1.

Faux.

En $x = 0$, l'expression vaut $\sqrt{3}$, pas 3 : compare 3 à sa plus grande valeur.

Correction

Ici $r = \sqrt{3+1} = 2$, et $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ convient. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}\cos x + \sin x\\ &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

L'équation s'écrit donc $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}$. Or un cosinus vaut au plus 1 : l'équation n'a aucune solution, et $S = \varnothing$.

Factoriser d'abord

Exemple : Exemple guidé : une somme factorisée

Énoncé. Résous dans $[0, \pi]$: $\sin(3x) + \sin x = 0$.

Factoriser. Par la formule de la somme de deux sinus, $\sin(3x) + \sin x = 2\sin(2x)\cos x$. L'équation équivaut à $\sin(2x) = 0$ ou $\cos x = 0$.

Annuler. D'après l'annulation du sinus et du cosinus, avec $k \in \mathbb{Z}$:

- $\sin(2x) = 0$ donne $x = \dfrac{k\pi}{2}$; dans $[0, \pi]$, ce sont 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π ;
- $\cos x = 0$ donne $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; dans $[0, \pi]$, c'est $\dfrac{\pi}{2}$.

Conclure. Dans $[0, \pi]$: $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

Exemple : Exemple guidé : par la duplication

Énoncé. Résous dans $]-\pi, \pi]$: $\sin(2x) = \cos x$.

Duplication. $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$: l'équation s'écrit $\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$.

Annuler. Sur $]-\pi, \pi]$, $\cos x = 0$ donne $x = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Et $2\sin x - 1 = 0$ équivaut à $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, qui donne $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Conclure. $S = \left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Rédiger comme en devoir

À toi : Rédige un second degré en sin x

Rédige la résolution dans $[0, 2\pi[$ de l'équation $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pose $X = \sin x$, avec $X \in [-1, 1]$.
Indice 2
Le discriminant de $2X^2 + X - 1$ vaut 9 : les racines sont $\frac{1}{2}$ et -1.
Indice 3
Point délicat : pour chaque racine, écris toutes les solutions de $[0, 2\pi[$.

Réponse
« **Changer d'inconnue.** On pose $X = \sin x$, avec $-1 \leq X \leq 1$. L'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0$, de discriminant $1 + 8 = 9$.

Ses racines sont $X = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $X = \dfrac{-1-3}{4} = -1$, toutes deux dans $[-1, 1]$.

Première racine. $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ donne $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$ dans $[0, 2\pi[$.

Seconde racine. $\sin x = -1$ donne $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Conclusion. Donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$. »

Remarque : Coin devoir : « résoudre dans un intervalle »

En devoir surveillé, une question d'équation se présente ainsi : « Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation … ». La rédaction attendue a trois temps visibles :

- la transformation, avec la formule nommée ;
- toutes les familles, avec « $k \in \mathbb{Z}$ » ;
- la sélection dans l'intervalle, et l'ensemble S.

Une question « en déduire » réutilise une factorisation ou une forme $r\cos(x - \varphi)$ obtenue juste avant : cite-la au lieu de la refaire.

Inéquations trigonométriques

Des arcs de cercle

Devine : Un cosinus positif

Sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$, pour quels réels x a-t-on $\cos x \geq 0$?

A. Sur $]-\pi, \pi]$ tout entier.

Faux.

$\cos \pi = -1 < 0$: tout l'intervalle ne convient pas.

B. Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Juste.

Juste : c'est la moitié droite du cercle, bornes comprises.

C. Sur $[0, \pi]$.

Faux.

C'est sur $[0, \pi]$ que le **sinus** est positif ; le cosinus est négatif après $\frac{\pi}{2}$.

D. Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Faux.

Les bornes conviennent : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, et l'inégalité est large.

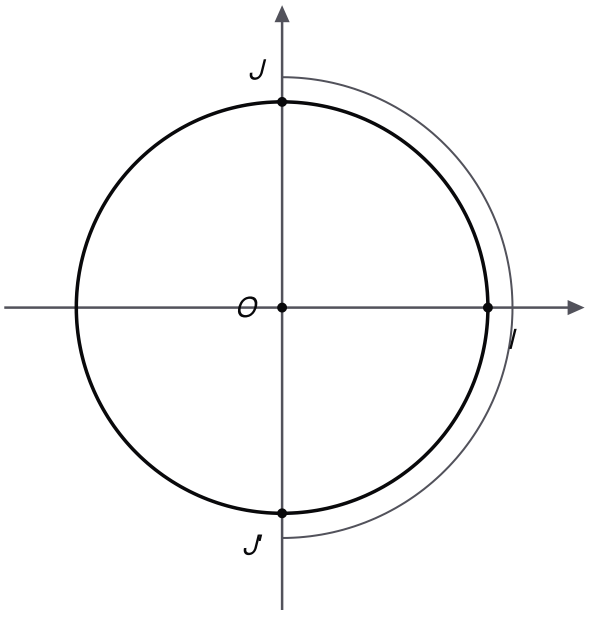
Correction

$\cos x$ est l'abscisse du point associé. Elle est positive ou nulle sur la moitié droite du cercle, de J' à J.

Sur $]-\pi, \pi]$, cela donne $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, bornes comprises car le cosinus y est nul.

Une inéquation se lit sur le cercle. On cherche l'**arc** des points dont l'abscisse, ou l'ordonnée, dépasse un seuil.

Les extrémités de cet arc sont les solutions de l'équation associée. L'intervalle d'étude fixe ensuite la façon d'écrire l'arc.



La moitié droite du cercle, doublée d'un trait extérieur de J' à J en passant par I : ce sont les points d'abscisse positive ou nulle.

Méthode : résoudre une inéquation trigonométrique

1. **Fixer l'intervalle d'étude** : $]-\pi, \pi]$, $[0, 2\pi[$ ou celui de l'énoncé.
2. **Résoudre l'équation associée** sur cet intervalle.
3. **Lire** l'arc sur le cercle, ou les intervalles sur la courbe du cosinus ou du sinus. Pour un produit, dresser un tableau de signes.
4. **Conclure** par une réunion d'intervalles, en précisant chaque borne : incluse ou exclue.

Rédaction attendue. « On résout sur $]-\pi, \pi]$. L'équation associée a pour solutions … Le point associé à x est sur l'arc … si et seulement si … Donc $S = \dots$ »

Lire un arc

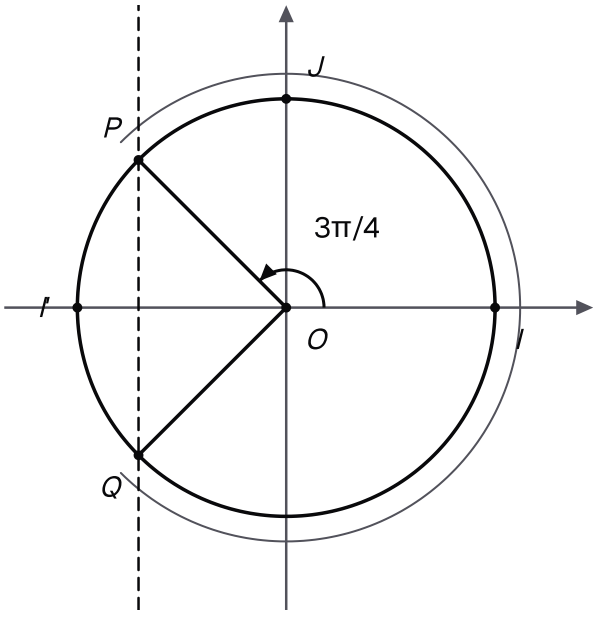
Exemple : Exemple guidé : un cosinus minoré

Énoncé. Résous sur $]-\pi, \pi]$: $\cos x \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Équation associée. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ donne, d'après le théorème des équations, $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Lire l'arc. Les points d'abscisse au moins $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ forment l'arc qui contient I, de $-\dfrac{3\pi}{4}$ à $\dfrac{3\pi}{4}$.

Conclure. $S = \left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.



L'arc solution de l'exemple : les points d'abscisse au moins −√2/2, de Q à P en passant par I, bornes comprises.



$y = \cos x$ ● Point plein $-\frac{3\pi}{4}$ ● Point plein $\frac{3\pi}{4}$ ------ $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ● Point du graphe

○ Point exclu du graphe

Sur]–π, π], la courbe du cosinus est au-dessus de la droite d'équation y = –√2/2 exactement entre –3π/4 et 3π/4, bornes comprises.

Borne exclue en x = –π : point creux à l'ordonnée estimée ≈ –1.

Vérifie : Un sinus majoré

Sur $[0, 2\pi[$, quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin x < \frac{1}{2}$?

A. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right[$

Faux.

En $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{5\pi}{6}$, $\sin x = \frac{1}{2}$: l'inégalité stricte les exclut.

B. $\left]-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$

Faux.

Cet intervalle sort de $[0, 2\pi[$: écris les solutions dans l'intervalle d'étude.

C. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right[$

Juste.

Juste : l'arc passe par le bas du cercle, extrémités exclues.

D. $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$

Faux.

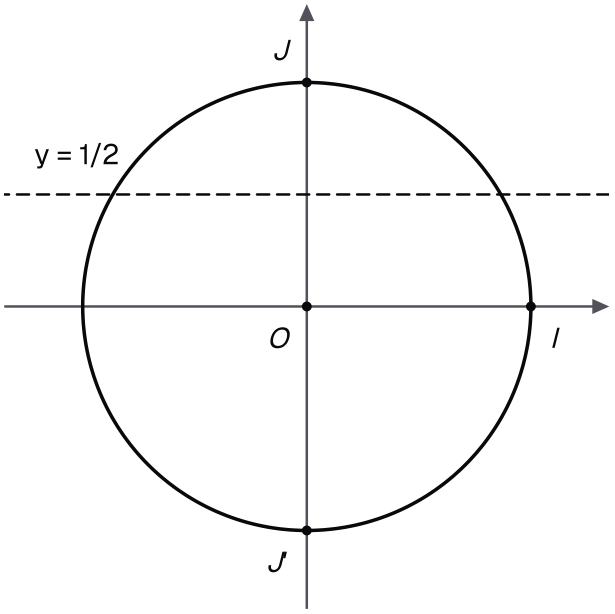
C'est l'ensemble où $\sin x > \frac{1}{2}$: tu as inversé l'inégalité.

Correction

Sur $[0, 2\pi[$, l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$ a pour solutions $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

Les points d'ordonnée strictement inférieure à $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc qui va de $\dfrac{5\pi}{6}$ à $\dfrac{\pi}{6}$ en passant par J', extrémités exclues.

Sur $[0, 2\pi[$, cet arc s'écrit $\left]0, \dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right[$.



Les données de la question : le cercle et la droite horizontale des points d'ordonnée 1/2.

Un tableau de signes

Exemple : Exemple guidé : factoriser, puis étudier le signe

Énoncé. Résous sur $[0, \pi]$ l'inéquation $\sin(2x) > \sin x$.

Factoriser. D'après la formule de duplication, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &\sin(2x) - \sin x \\ &= 2\sin x \cos x - \sin x \\ &= \sin x\,(2\cos x - 1). \end{aligned}$$

Signes des facteurs. Sur $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$, avec égalité seulement en 0 et en π. Et $2\cos x - 1 > 0$ équivaut à $\cos x > \dfrac{1}{2}$, soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

Signe du produit. Le produit est strictement positif quand ses deux facteurs sont non nuls et de même signe. Le premier est positif ou nul : il faut donc $\sin x > 0$ et $2\cos x - 1 > 0$, ce qui n'a lieu que sur $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

Conclusion. Donc $S = \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

Signe de sin x (2 cos x − 1) sur [0, π] : nul en 0, en π/3 et en π. Pour rédiger, écris une ligne par facteur, puis la ligne du produit.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\sin x\,(2\cos x - 1)$	+	−	

Attention : l'intervalle d'étude change l'écriture

✗ « Sur $[0, 2\pi[$, l'inéquation $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. »

✓ Cet intervalle sort de $[0, 2\pi[$. Sur $[0, 2\pi[$, le même arc s'écrit $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$, car $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$.

Nomme toujours l'intervalle d'étude avant de lire l'arc.

Rédiger comme en devoir

À toi : Rédige une inéquation

Rédige la résolution sur $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation $2\sin x + \sqrt{3} > 0$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Isole $\sin x$: l'inéquation équivaut à $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Indice 2

Résous l'équation associée $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi, \pi]$: elle a deux solutions.

Indice 3

Point délicat : les bornes de l'arc, et le point d'abscisse curviligne π.

Réponse

« **Intervalle.** On résout sur $]-\pi, \pi]$.

Équation associée. L'inéquation équivaut à $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. D'après le théorème des équations, sur cet intervalle, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions $-\frac{\pi}{3}$ et $-\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$.

Lire l'arc. Le sinus est inférieur ou égal à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ exactement sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right]$, l'arc du bas du cercle entre ces deux points.

Conclusion. Donc $S = \left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. »

Remarque : Coin devoir : « résoudre une inéquation »

En devoir surveillé, l'énoncé fixe l'intervalle : « Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation … ». La rédaction attendue :

- nomme cet intervalle et résout l'équation associée ;
- justifie le signe : lecture de l'arc, ou tableau de signes après factorisation ;
- conclut par S, réunion d'intervalles aux bornes exactes.

Une borne où une inégalité stricte devient une égalité est toujours exclue.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

- Une mesure d'angle orienté est une différence d'abscisses curvilignes ; la mesure principale est dans $]-\pi, \pi]$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; une tangente exige un cosinus non nul.
- Tout vient du cosinus d'une différence : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- $a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$, avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et les **deux** conditions sur φ.
- Une équation donne toutes ses familles, avec $k \in \mathbb{Z}$, puis l'ensemble S.
- Une inéquation nomme son intervalle d'étude et conclut par une réunion d'intervalles.

Le mot du prof. Tu sais maintenant mesurer un angle orienté, calculer des valeurs exactes sans calculatrice et résoudre des équations trigonométriques. Surtout, tu sais **démontrer** les formules que tu emploies. Le produit scalaire analytique, puis la rotation, réutiliseront ces outils.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul trigonométrique » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)