BURHAN

Résumé : Le barycentre dans le plan

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/resume

Chapitre	Semestre
Le barycentre dans le plan	Semestre 1

Barycentre de deux points pondérés

À retenir : Le réflexe : la somme des coefficients d'abord

Avant d'écrire $G = \mathrm{Bar}\{\dots\}$, calcule la somme s des coefficients. Si $s \neq 0$, le barycentre existe et il est unique. Si $s = 0$, il n'existe pas.

Avec des coefficients positifs, pense à une tige qui porte des masses : le barycentre est son point d'équilibre.

Définition : Point pondéré

Un **point pondéré** est un couple (A, α) formé d'un point A du plan et d'un réel α, appelé **coefficient** de A.

Un **système de points pondérés** est une liste finie $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ de points pondérés ; dans ce chapitre, $n \in \{2, 3, 4\}$. On note $s = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ la **somme des coefficients**.

Théorème : Existence et unicité du barycentre de deux points pondérés

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un unique point G du plan tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point vérifie $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.

Définition : Barycentre de deux points pondérés ; isobarycentre

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. L'unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (F02) est le **barycentre** du système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$. On note

$$G = \mathrm{Bar}\{(A, \alpha), (B, \beta)\}.$$

Lorsque $\alpha = \beta$ (et $\alpha \neq 0$), G est appelé l'**isobarycentre** de A et B : c'est le milieu du segment $[AB]$, car F02 donne alors $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\alpha}{2\alpha}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Méthode : construire le barycentre de deux points

1. **Vérifier** que $\alpha + \beta \neq 0$.
2. **Simplifier** les coefficients si c'est utile, par homogénéité (F07).
3. **Écrire** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, puis placer G en partant de A.
4. **Contrôler** la position avec le signe de $\alpha\beta$ (position du barycentre, F04).

Rédaction : « $\alpha + \beta = \ldots \neq 0$, donc G existe et, d'après le théorème d'existence (F02), $\overrightarrow{AG} = \ldots$ ».

Exemple

Énoncé. Soit A et B deux points tels que $AB = 8$ cm. Place $G = \mathrm{Bar}\{(A,6),(B,10)\}$.

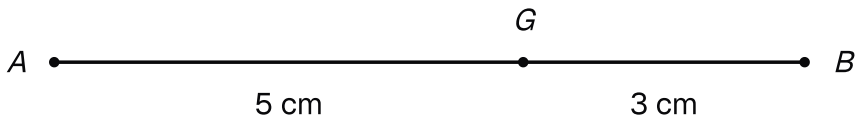
Somme. $6 + 10 = 16 \neq 0$: G existe. Par homogénéité, avec $k = \dfrac{1}{2}$, $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,5)\}$.

Relation. D'après le théorème d'existence (F02) :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}.$$

Donc $AG = 5$ cm. Le point G est sur $[AB]$, car $3 \times 5 > 0$.

Équilibre. $GB = 3$ cm, et $3 \times GA = 5 \times GB = 15$: la tige est en équilibre en G.



Sur [AB] long de 8 cm, le point G des coefficients 6 et 10 laisse 5 cm du côté de A et 3 cm du côté de B.

Attention : Somme nulle : aucun barycentre

Le système $\{(A,7),(B,-7)\}$ n'a pas de barycentre. Pour tout point M, la relation de Chasles donne :

$$7\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} = 7\overrightarrow{BA}.$$

Ce vecteur n'est jamais nul lorsque $A \neq B$.

Attention : Des vecteurs issus de G

La relation s'écrit avec des vecteurs **issus de** G. Écrire $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$ au lieu de $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ change le signe du second coefficient.

On obtient alors $\mathrm{Bar}\{(A,1),(B,-3)\}$, tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB},$$

et non $\mathrm{Bar}\{(A,1),(B,3)\}$, tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Où se trouve le barycentre de deux points ?

Propriété : Position du barycentre de deux points

Soit A et B deux points distincts, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$.

- G appartient à la droite (AB).
- G appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $\alpha\beta \geq 0$.
- $G = A$ si et seulement si $\beta = 0$; $G = B$ si et seulement si $\alpha = 0$.

À retenir : Lire la position avec t

Pose $t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$, de sorte que $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$.

- Si $0 \leq t \leq 1$, le point G est sur $[AB]$.
- Si $t < 0$, il est hors du segment, du côté de A.
- Si $t > 1$, il est au-delà de B.

Enfin, G est plus près du point dont le coefficient a la plus grande valeur absolue.

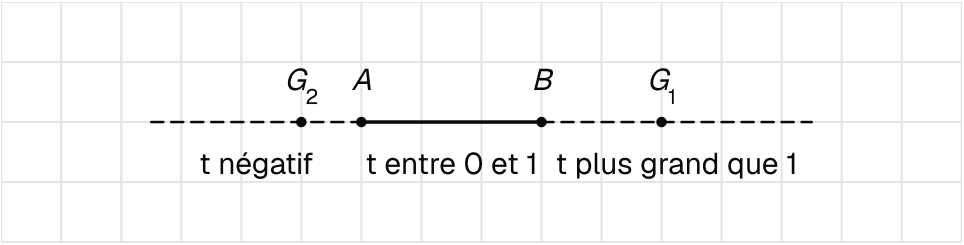
Exemple

Énoncé. Soit A et B deux points distincts. Situe $G_1 = \mathrm{Bar}\{(A,-2),(B,5)\}$ et $G_2 = \mathrm{Bar}\{(A,4),(B,-1)\}$ sur la droite (AB).

Premier point. La somme vaut $3 \neq 0$ et $t = \dfrac{5}{3} > 1$: G_1 est au-delà de B.

Second point. La somme vaut $3 \neq 0$ et $t = -\dfrac{1}{3} < 0$: G_2 est hors de $[AB]$, du côté de A.

Dans les deux cas, les coefficients sont de signes contraires, comme l'annonçait la propriété de position (F04).



G1 dans la zone où t dépasse 1, G2 dans celle où t est négatif : aucun des deux n'appartient à [AB].

Attention : Coefficients de signes contraires : hors du segment

« Barycentre » ne veut pas dire « entre les deux points ». Le point $\mathrm{Bar}\{(A,5),(B,-3)\}$ vérifie :

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Il est sur la droite (AB), mais hors de $[AB]$, du côté de A.

Barycentre de trois ou quatre points

Théorème : Existence et unicité du barycentre de trois ou quatre points pondérés

Soit $n \in \{3,4\}$ et $(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés dont la somme des coefficients $s = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ est non nulle. Il existe un unique point G du plan tel que

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Ce point vérifie :

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{s}\Big(\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}\Big).$$

Définition : Barycentre de trois ou quatre points ; isobarycentre ; centre de gravité

Soit $n \in \{3,4\}$ et $(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$. L'unique point G de F05 est le **barycentre** de ce système. On note

$$G = \mathrm{Bar}\{(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)\}.$$

Lorsque tous les coefficients sont égaux et non nuls, G est appelé l'**isobarycentre** des points $A_1,\ldots,A_n$. L'isobarycentre des trois sommets d'un triangle est appelé le **centre de gravité** de ce triangle.

Exemple

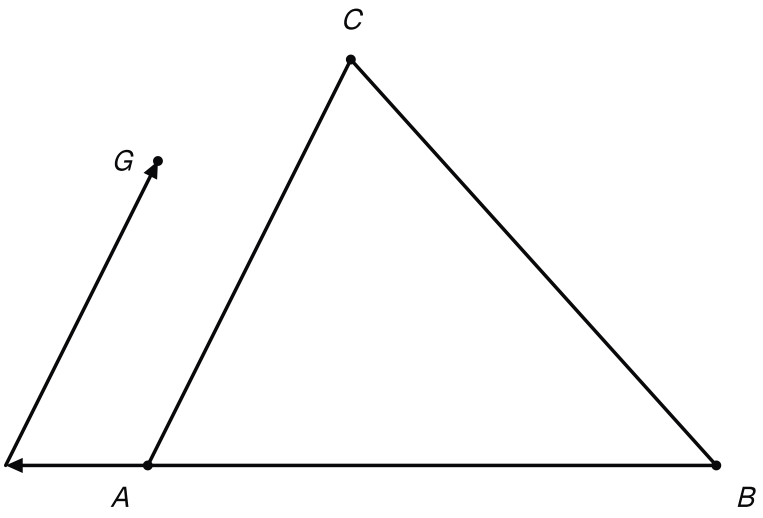
Énoncé. Soit ABC un triangle. Construis $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,-1),(C,3)\}$.

Somme. $2 - 1 + 3 = 4 \neq 0$: G existe.

Relation depuis A. D'après le théorème d'existence (F05) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Construction. Depuis A, recule d'un quart de $\overrightarrow{AB}$, puis avance des trois quarts de $\overrightarrow{AC}$.



Construction de G pour les poids 2, -1 et 3 : recul d'un quart de AB depuis A, puis avancée des trois quarts de AC.

Remarque

Le centre de gravité d'un triangle ABC est $\mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$, ou $\mathrm{Bar}\{(A,5),(B,5),(C,5)\}$ par homogénéité.

Pour un parallélogramme, l'isobarycentre des quatre sommets est son centre, milieu commun des deux diagonales.

Homogénéité, propriété caractéristique, réduction

Propriété : Homogénéité du barycentre

Soit $n \in \{2,3,4\}$ et $(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$. Pour tout réel $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bar}\{(A_1,k\alpha_1),\ldots,(A_n,k\alpha_n)\} \\ &= \mathrm{Bar}\{(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)\}.\end{aligned}$$

En particulier, on peut toujours choisir des coefficients de somme égale à 1, en multipliant chacun par $\dfrac{1}{s}$.

Théorème : Propriété caractéristique du barycentre

Soit $n \in \{2, 3, 4\}$, $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$, et G leur barycentre. Pour tout point M du plan :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = s\,\overrightarrow{MG}.$$

Réciproquement, si un point G' vérifie $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = s\,\overrightarrow{MG'}$ pour au moins un point M, alors $G' = G$.

Propriété : Somme des coefficients nulle

Soit $n \in \{2, 3, 4\}$ et $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés dont la somme des coefficients est **nulle**. Pour tout point M :

$$\begin{aligned}&\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \\ &= \alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{A_1A_n}.\end{aligned}$$

Ce vecteur, noté $\vec{u}$, ne dépend donc pas de M.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point G ne vérifie $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$; si $\vec{u} = \vec{0}$, tous les points la vérifient. Dans les deux cas, ce système n'a pas de barycentre.

Méthode : réduire une somme vectorielle

1. **Calculer** la somme s des coefficients.
2. **Si** $s \neq 0$, nommer le barycentre G et remplacer la somme par $s\,\overrightarrow{MG}$ (propriété caractéristique, F08).
3. **Si** $s = 0$, calculer le vecteur constant en prenant pour M l'un des points du système (somme des coefficients nulle, F09).

Rédaction : « $s = \ldots \neq 0$; d'après la propriété caractéristique, pour tout point M, la somme vaut $s\,\overrightarrow{MG}$ ».

Exemple

Énoncé. Soit ABC un triangle. Pour tout point M, on pose $\vec{v} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Réduis $\vec{v}$, puis $\vec{u}$.

Somme non nulle. Pour $\vec{v}$, $s = 4 - 1 - 1 = 2 \neq 0$. Avec $G = \mathrm{Bar}\{(A, 4), (B, -1), (C, -1)\}$, la propriété caractéristique (F08) donne, pour tout point M :

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{MG}.$$

Somme nulle. Pour $\vec{u}$, $s = 1 + 1 - 2 = 0$: le vecteur $\vec{u}$ ne dépend pas de M (somme des coefficients nulle, F09). En prenant $M = C$, on obtient, pour tout point M :

$$\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Attention : Le facteur s ne disparaît pas

La propriété caractéristique fait apparaître le facteur s. Avec $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,-1)\}$, de somme 2, on a $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$ pour tout point M.

La condition $\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = 4$ s'écrit donc $2\,MG = 4$, soit $MG = 2$, et non $MG = 4$.

Associativité : le barycentre partiel

Théorème : Associativité du barycentre (barycentre partiel)

Soit $n \in \{3,4\}$, $(A_1,\alpha_1),\ldots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$, et G leur barycentre. On choisit une partie de ces points pondérés (au moins deux, pas tous) dont la somme des coefficients s' est **non nulle**, et on note H le barycentre de cette partie.

Alors G est le barycentre du système obtenu en remplaçant les points de cette partie par le seul point pondéré (H, s').

Par exemple, si $\alpha+\beta \neq 0$, $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $H = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, alors :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}\\ &= \mathrm{Bar}\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}.\end{aligned}$$

Méthode : construire par un barycentre partiel

1. **Vérifier** que la somme de tous les coefficients est non nulle ; soit G le barycentre cherché.
2. **Choisir** un groupe de points dont la somme partielle s' est non nulle, et **nommer** son barycentre H.
3. **Remplacer** ce groupe par le seul point pondéré (H, s') (associativité, F10), puis construire le barycentre G du système réduit. S'il ne reste qu'un point (C,γ), avec $H \neq C$, alors $\overrightarrow{HG} = \dfrac{\gamma}{s'+\gamma}\overrightarrow{HC}$ (théorème d'existence, F02).

Rédaction : « $s' = \ldots \neq 0$; soit $H = \ldots$; d'après l'associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(H,s'),\ldots\}$ ».

Exemple

Énoncé. Soit ABC un triangle. Place $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,4)\}$.

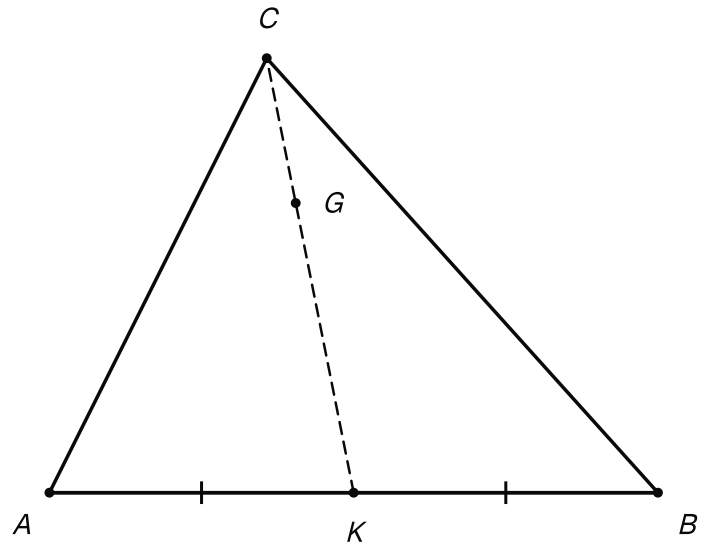
Somme. $1+1+4 = 6 \neq 0$: G existe.

Regroupement. Le milieu K de $[AB]$ est $\mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1)\}$, de somme partielle $2 \neq 0$. D'après l'associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(K,2),(C,4)\}$.

Position. D'après le théorème d'existence (F02) :

$$\overrightarrow{KG} = \frac{4}{6}\overrightarrow{KC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KC}.$$

Le point G est donc sur la médiane issue de C.



K milieu de [AB] remplace A et B ; G se place sur la médiane [KC], aux deux tiers en partant de K.

Attention : Une somme partielle nulle ne se regroupe pas

Dans $\{(A, 2), (B, -2), (C, 5)\}$, les coefficients de A et B ont une somme nulle : on ne peut pas remplacer ces deux points par un barycentre partiel. Groupe plutôt A avec C, de somme 7, ou B avec C, de somme 3.

Coordonnées ; exprimer un point comme barycentre

Propriété : Coordonnées du barycentre

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $n \in \{2, 3, 4\}$, $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$, où $A_i(x_i, y_i)$, et G leur barycentre. Alors :

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{s}$$

et

$$y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n}{s}.$$

Méthode : calculer les coordonnées d'un barycentre

1. **Vérifier** que $s \neq 0$.

2. **Calculer** séparément x_G et y_G : chaque coordonnée est la somme des coordonnées pondérées par les coefficients, divisée par s.
3. **Contrôler** le résultat : la relation vectorielle, calculée en coordonnées, doit donner le vecteur nul.

Rédaction : « $s = \ldots \neq 0$, donc, d'après la formule des coordonnées du barycentre (F11), $x_G = \ldots$ et $y_G = \ldots$ ».

Exemple

Énoncé. Le plan est muni d'un repère. On donne $U(-1, 5)$, $V(3, 0)$ et $W(6, 2)$. Calcule les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}\{(U, 1), (V, 2), (W, -1)\}$.

Somme. $1 + 2 - 1 = 2 \neq 0$.

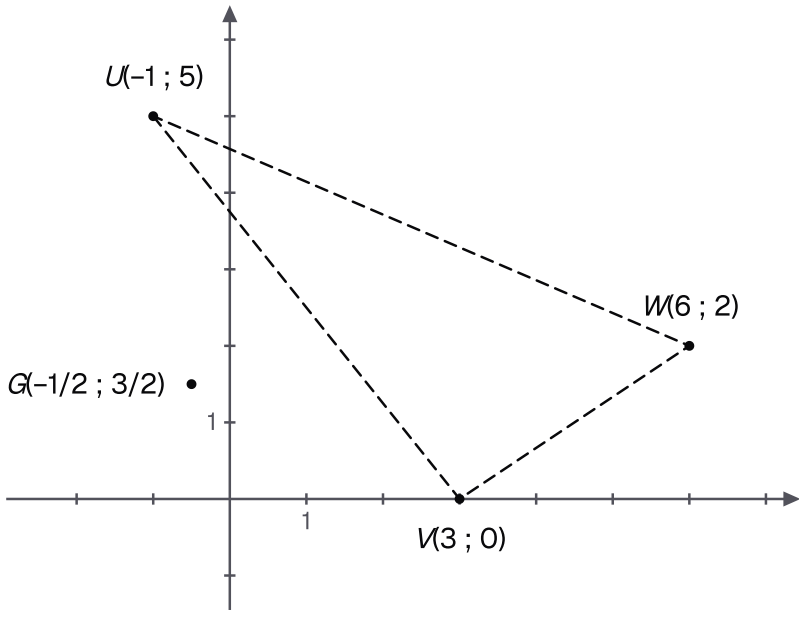
Coordonnées. D'après la formule des coordonnées du barycentre (F11) :

$$x_G = \frac{-1 + 6 - 6}{2} = -\frac{1}{2}$$

et

$$y_G = \frac{5 + 0 - 2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Donc $G\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



U, V, W et le point G calculé, qui tombe à gauche de l'axe des ordonnées.

Méthode : exprimer un point comme barycentre

1. **Partir** de la relation vectorielle qui définit le point N.

2. **Faire apparaître**, par la relation de Chasles, des vecteurs tous issus de N, puis tout regrouper dans un seul membre.
3. **Lire** les coefficients, vérifier que leur somme est non nulle, et conclure par la définition du barycentre (F03 ou F06).

Rédaction : « on obtient $\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}=\vec{0}$ avec $\alpha+\beta\neq 0$, donc $N=\mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ ».

Exemple

Énoncé. Soit B et C deux points distincts, et N le point tel que $\overrightarrow{BN}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{BC}$. Écris N comme barycentre de B et C.

Chasles. On multiplie par 8, puis on fait passer $\overrightarrow{BC}$ par N :

$$\begin{aligned}8\overrightarrow{BN}&=3\overrightarrow{BC}\\&=3\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{NC}.\end{aligned}$$

Donc $5\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NC}$, soit $5\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Conclure. La somme $5+3=8$ est non nulle : $N=\mathrm{Bar}\{(B,5),(C,3)\}$.

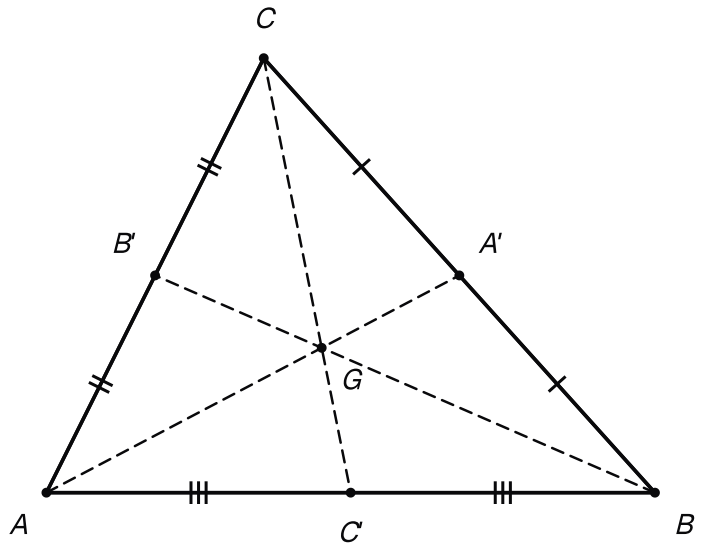
Alignement et concours de droites

Propriété : Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, et A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'},\\\overrightarrow{BG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'},\\\overrightarrow{CG}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'},\end{aligned}$$

et les trois médianes (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.



Médianes [AA'], [BB'] et [CC'] concourantes au centre de gravité G du triangle.

Propriété : Droite et segment comme ensembles de barycentres

Soit A et B deux points distincts.

- Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe deux réels α et β, avec $\alpha+\beta\neq 0$, tels que $M=\mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.
- Un point M appartient au segment $[AB]$ si et seulement s'il existe deux réels $\alpha\geq 0$ et $\beta\geq 0$, avec $\alpha+\beta\neq 0$, tels que $M=\mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si l'un d'eux est un barycentre des deux autres.

Méthode : démontrer un alignement ou un concours

1. **Pour un alignement**, écrire l'un des points comme barycentre des deux autres, au besoin après un regroupement par associativité (F10), puis conclure par la caractérisation de la droite (F13).
2. **Pour un concours**, choisir le barycentre G d'un système qui contient tous les points, puis montrer par associativité que chaque droite passe par G.
3. **Conclure** en nommant le point commun et chaque barycentre partiel employé.

Rédaction : « d'après l'associativité, $G=\mathrm{Bar}\{(A,\dots),(H,\dots)\}$, donc $G\in(AH)$ ».

Exemple

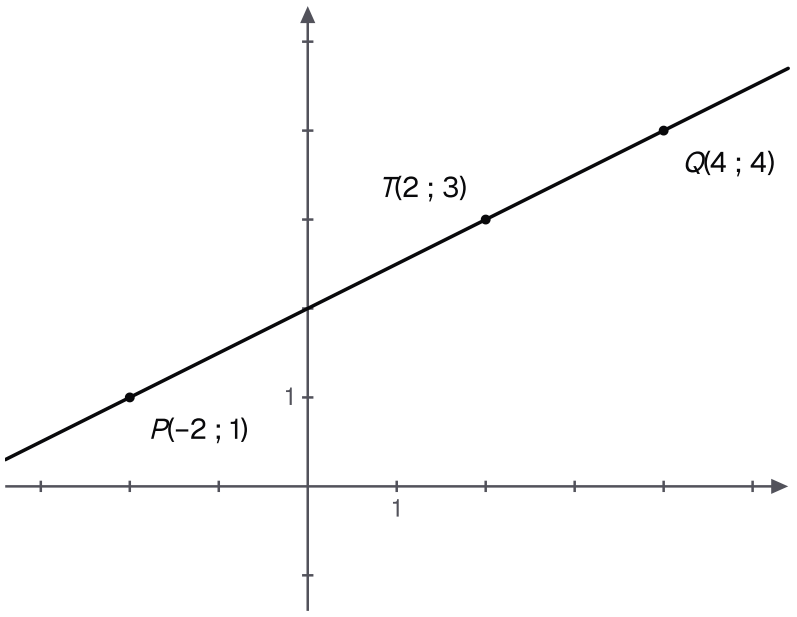
Énoncé. Le plan est muni d'un repère. On donne $P(-2,1)$, $Q(4,4)$ et $T(2,3)$. Les points P, Q, T sont-ils alignés ?

Vecteurs. $\overrightarrow{PT}(4,2)$ et $\overrightarrow{PQ}(6,3)$, donc :

$$\overrightarrow{PT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}.$$

Barycentre. Comme $1+2=3\neq 0$, le théorème d'existence (F02) s'applique : le point $\mathrm{Bar}\{(P,1),(Q,2)\}$ vérifie la même relation, c'est donc T.

Conclure. D'après la caractérisation de la droite par les barycentres (F13), P, Q et T sont alignés. Les coefficients étant positifs, T est même sur $[PQ]$.



P, T et Q sur une même droite du repère, T étant aux deux tiers du trajet de P vers Q.

Exemple

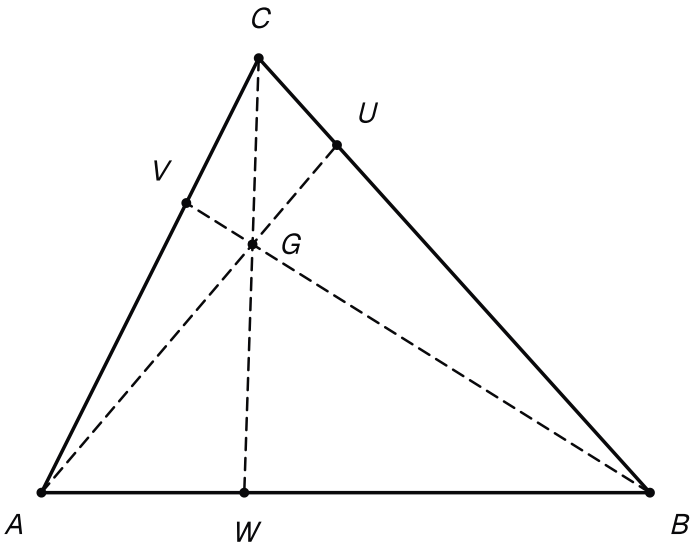
Énoncé. Dans un triangle ABC, on pose $U=\mathrm{Bar}\{(B,1),(C,4)\}$, $V=\mathrm{Bar}\{(A,2),(C,4)\}$ et $W=\mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$. Montre que (AU), (BV) et (CW) sont concourantes.

Point commun. $G=\mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1),(C,4)\}$ existe, car $2+1+4=7\neq 0$.

Associativité. Les sommes partielles 5, 6 et 3 sont non nulles, donc :

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{Bar}\{(A,2),(U,5)\} \\ &= \mathrm{Bar}\{(B,1),(V,6)\} \\ &= \mathrm{Bar}\{(C,4),(W,3)\}. \end{aligned}$$

Conclure. Les droites (AU), (BV) et (CW) passent par G : elles sont concourantes en G.



U sur [BC], V sur [AC], W sur [AB] : les trois droites (AU), (BV) et (CW) se coupent en G.

Lieux géométriques

Propriété : Lieu des points M tels que la norme d'une somme vectorielle soit constante

Soit $n \in \{2,3,4\}$, $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés de somme s, k un réel positif ou nul, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right\| = k.$$

- Si $s \neq 0$ et G est le barycentre du système : $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{k}{|s|}$ lorsque $k>0$, et $\mathcal{E}=\{G\}$ lorsque $k=0$.
- Si $s=0$ et $\vec{u}$ est le vecteur constant de F09 : $\mathcal{E}$ est le plan tout entier lorsque $\|\vec{u}\|=k$, et $\mathcal{E}$ est vide sinon.

Propriété : Lieu des points M tels que deux sommes vectorielles aient la même norme

Soit G le barycentre d'un système $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ de somme $s\neq 0$, et H le barycentre d'un système $(B_1,\beta_1),\dots,(B_p,\beta_p)$ de somme $\sigma\neq 0$, avec n et p dans $\{2,3,4\}$. On suppose $|s|=|\sigma|$ et $G\neq H$.

L'ensemble des points M du plan tels que

$$\begin{aligned}&\left\|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right\|\\&=\left\|\beta_1\overrightarrow{MB_1}+\cdots+\beta_p\overrightarrow{MB_p}\right\|\end{aligned}$$

est la médiatrice du segment $[GH]$.

Propriété : Lieu des points M tels qu'une somme vectorielle ait une direction donnée

Soit $n \in \{2,3,4\}$, $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$, G leur barycentre, et $\vec{w}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires est la droite passant par G et de vecteur directeur $\vec{w}$.

Méthode : déterminer un lieu géométrique

1. **Réduire** chaque somme vectorielle de la condition, par la méthode de réduction.
2. **Traduire** la condition : une distance MG fixée, une égalité $MG = MH$, ou la colinéarité de $\overrightarrow{MG}$ avec un vecteur donné.
3. **Décrire** l'ensemble complètement : cercle (centre et rayon), médiatrice (segment nommé), droite (point et vecteur directeur), point seul, plan entier ou ensemble vide.

Rédaction : « la condition équivaut à $MG = \dots$, donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon $\dots$ ».

Exemple

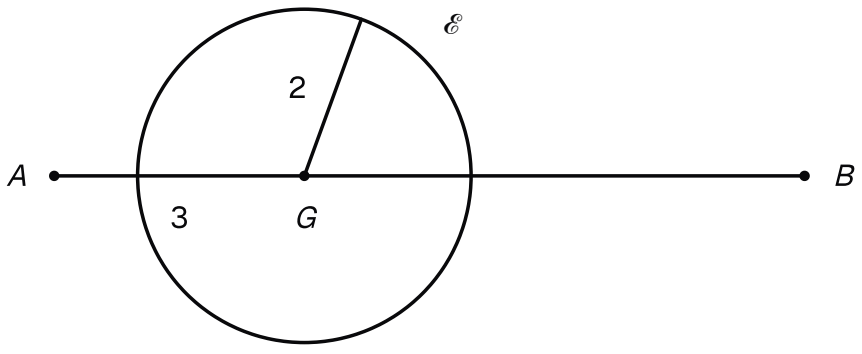
Énoncé. On a $AB = 9$ et $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$. Détermine l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = 6$.

Réduire. La somme vaut $3 \neq 0$, donc, d'après la propriété caractéristique, pour tout point M :

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Traduire. La condition s'écrit $3\,MG = 6$, soit $MG = 2$.

Décrire. $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon 2, où $AG = \dfrac{1}{3}AB = 3$.



Le cercle $\mathscr{E}$ de centre G et de rayon 2, avec G placé à 3 unités de A sur [AB], long de 9.

Exemple

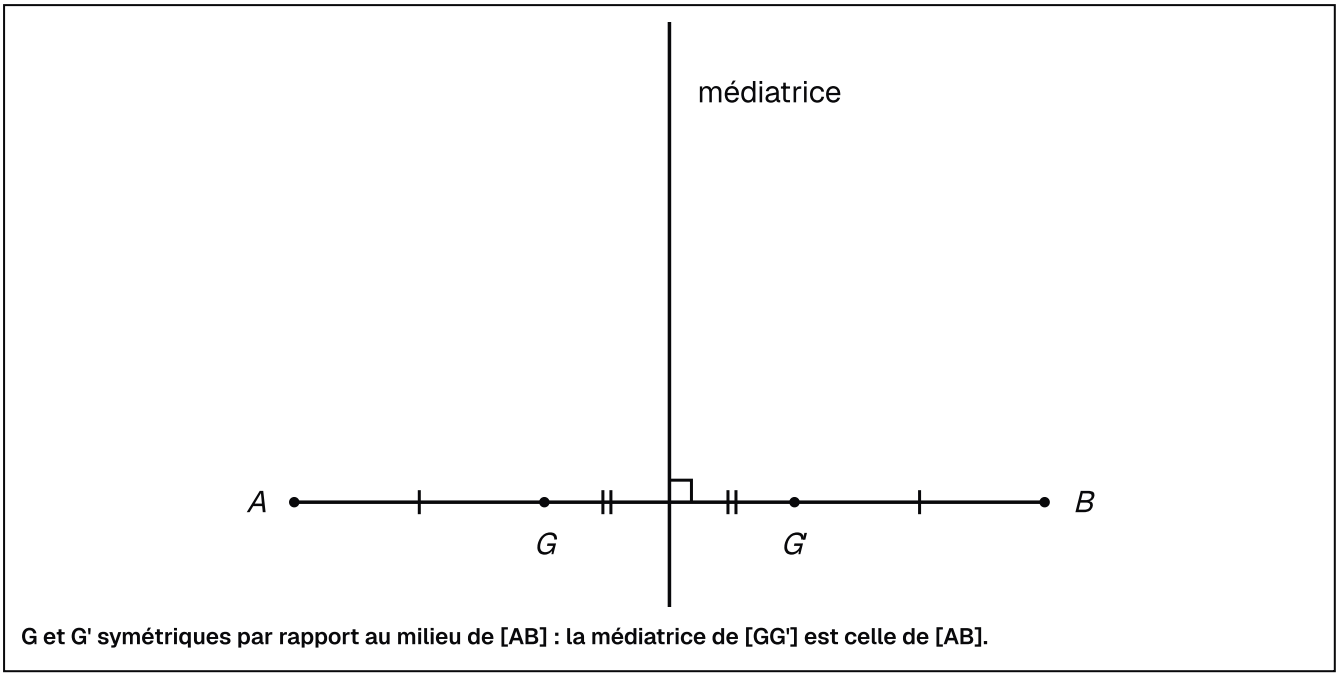
Énoncé. Avec les mêmes points, et $G' = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$, décris l'ensemble des points M tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|.$$

Médiatrice. Les deux sommes valent $3 \neq 0$: la condition s'écrit $MG = MG'$, avec $G \neq G'$. D'après le lieu de deux normes égales (F15), c'est la médiatrice de $[GG']$.

Comme $AG = BG' = 3$, les segments $[GG']$ et $[AB]$ ont le même milieu : c'est aussi la médiatrice de $[AB]$.

Droite. Les points M tels que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ forment la droite passant par G et dirigée par $\overrightarrow{AB}$ (lieu d'une direction donnée, F16), c'est-à-dire (AB).



G et G' symétriques par rapport au milieu de [AB] : la médiatrice de [GG'] est celle de [AB].

Attention : Décrire un lieu jusqu'au bout

« C'est un cercle » n'est pas une réponse complète : donne son centre et son rayon. Pour une médiatrice, nomme le segment ; pour une droite, donne un point et un vecteur directeur.

Examine aussi les cas limites : un rayon nul donne un seul point, et une somme de coefficients nulle donne le plan entier ou l'ensemble vide.

À retenir : Coin devoir : les formes de questions

Un devoir surveillé enchaîne des questions types.

- « Montrer que G existe » : la somme des coefficients, écrite et non nulle.

> - « Montrer que G appartient à une droite » : un barycentre partiel nommé, puis l'associativité.
> - « Réduire » : la propriété caractéristique, avec son facteur s.
> - « Déterminer l'ensemble » : réduire, traduire, décrire.

Rédige chaque réponse comme une courte preuve. Écris la somme des coefficients et vérifie qu'elle est non nulle.

Nomme la propriété employée : propriété caractéristique, homogénéité, associativité ou relation de Chasles. Conclus par une phrase complète, et décris chaque lieu jusqu'au bout.