BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Niveau examen	5

Exercice 1 10 pts

Problème : Barycentres dans un triangle

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. On considère le point $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1),(C,1)\}$.

1. 1 pts

Justifier l'existence de G, puis montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Le milieu I est le barycentre de $\{(B,1),(C,1)\}$: remplace ces deux points par I.

2. 1 pts

On note $E = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1)\}$ et $F = \mathrm{Bar}\{(A,3),(C,1)\}$. Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, et en déduire que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

3. 1,5 pts

Montrer que G appartient à la droite (CE) et à la droite (BF), en précisant $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FG}$.

4. 1 pts

En déduire que les droites (AI), (CE) et (BF) sont concourantes.

5. 1 pts

Montrer que, pour tout point M du plan, $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$.

INDICE

Pour la seconde somme, les coefficients ont une somme nulle : calcule-la en $M = A$, puis fais apparaître I.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $\left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\|$. Montrer que A appartient à Γ_1.

7. 1,5 pts

On note $H = \mathrm{Bar}\{(B,4),(C,1)\}$. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $\left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|$.

8. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires. Montrer que Δ coupe la droite (AB) au point N tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AG}$, puis utilise $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Exercice 2 — 10 pts

Problème : Un quadrilatère en coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(-2, 0)$, $B(4, -2)$, $C(5, 3)$ et $D(-1, 4)$. On note $E = \mathrm{Bar}\{(A, 3), (B, 1)\}$ et $F = \mathrm{Bar}\{(C, 1), (D, 3)\}$.

1. — 1,5 pts

Calculer les coordonnées des points E et F.

2. — 2 pts

Montrer que le système $\{(A, 3), (B, 1), (C, 1), (D, 3)\}$ admet un barycentre H, et que H est le milieu de $[EF]$. En déduire les coordonnées de H.

INDICE

Remplace $\{(A, 3), (B, 1)\}$ par $(E, 4)$ et $\{(C, 1), (D, 3)\}$ par $(F, 4)$.

3. — 1,5 pts

On note K et L les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$. Montrer que $H = \mathrm{Bar}\{(K, 6), (L, 2)\}$ et en déduire que $\overrightarrow{KH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{KL}$. Vérifier avec les coordonnées.

4. — 1 pts

Montrer que E n'appartient pas à la droite (KL). En déduire que les droites (EF) et (KL) sont sécantes en H.

INDICE

Calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{KE}$ et $\overrightarrow{KL}$.

5. — 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right\| = 13$. Montrer que Γ passe par l'origine O.

6. — 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{KL}$ soient colinéaires.

7. — 1 pts

Soit I le milieu de $[AC]$. Déterminer l'ensemble Λ des points M du plan tels que $\left\| 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right\| = \left\| 4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MC} \right\|$.

INDICE

Les deux sommes de coefficients valent 8 : compare les distances MH et MI.

Exercice 3 10 pts

Problème : Un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. On note $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$.

1. 1 pts

Montrer que $D = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ avec la relation de Chasles et l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2. 1,5 pts

Montrer que G est le milieu du segment $[OB]$.

3. 1 pts

On note $E = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$. Montrer que G appartient à la droite (EC) et préciser $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{EC}$.

4. 1 pts

En déduire, à l'aide de la question 1, que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}.$$

5. 1,5 pts

Montrer que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$$

et

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BD}.$$

INDICE

Pour la seconde somme, les coefficients ont une somme nulle : prends $M = B$.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$. Montrer que Γ est le cercle de diamètre $[OB]$.

7. 1 pts

Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

8. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Λ des points M du plan tels que $\left\|4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

INDICE

Les deux sommes de coefficients valent 4. Par homogénéité, quel est le barycentre de $\{(A,4),(B,-4),(C,4)\}$?

Exercice 4 10 pts

Problème : Un trapèze

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$, les points A, B et C n'étant pas alignés : $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[DC]$.

1. 1,5 pts

Montrer que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

Le système $\{(A,1),(B,-1),(C,2),(D,-2)\}$ admet-il un barycentre ? Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ soit égale à AB.

INDICE

La somme des coefficients est nulle : calcule le vecteur en $M = A$, puis utilise $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$.

2. 1,5 pts

On note $O = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,2)\}$. Déduire de la question 1 que $O = \mathrm{Bar}\{(B,1),(D,2)\}$, puis que les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O.

INDICE

Écris la relation de la question 1 sous la forme $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MD}$, puis réduis le premier membre.

3. 1,5 pts

On note $S = \mathrm{Bar}\{(A,1),(D,-2)\}$. Montrer de même que $S = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,-2)\}$. En déduire que les droites (AD) et (BC) se coupent en S, que D est le milieu de $[AS]$ et que C est le milieu de $[BS]$.

4. 1,5 pts

Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,2),(D,2)\}$. Montrer que $G = O$, puis que $\overrightarrow{IO} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

5. 1,5 pts

Montrer que S est le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,-2),(D,-2)\}$ et que $\overrightarrow{IS} = 2\overrightarrow{IJ}$. En déduire que les points I, J, O et S sont alignés.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ soient colinéaires.

INDICE

Réduis les deux sommes, puis traduis la colinéarité de $\overrightarrow{MO}$ et de $\overrightarrow{MS}$ par un alignement de trois points.

7. 1 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$. Préciser l'intersection de Γ et de la droite Δ de la question 6.

Exercice 5 10 pts

Problème : Des coefficients à retrouver

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne les points $A(1,-5)$, $B(7,-1)$, $C(-2,2)$ et $K(1,-2)$.

1. 1 pts

Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. 2 pts

Déterminer deux réels β et γ tels que $3+\beta+\gamma\neq 0$ et $K=\mathrm{Bar}\{(A,3),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

INDICE

Pose $s=3+\beta+\gamma$ et écris les deux égalités des coordonnées du barycentre (F11) sous la forme $3x_A+\beta x_B+\gamma x_C = s\,x_K$, puis de même pour les ordonnées.

3. 1,5 pts

On note $L=\mathrm{Bar}\{(B,1),(C,2)\}$. Montrer que K est le milieu du segment $[AL]$ et que L appartient au segment $[BC]$. Vérifier avec les coordonnées de L.

4. 1,5 pts

On note $E=\mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1)\}$. Calculer les coordonnées de E, montrer que $\overrightarrow{CK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$, et en déduire que la droite (CK) coupe la droite (AB) en E.

5. 1 pts

Montrer que, pour tout point M du plan, $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{CK}$.

INDICE

La somme des coefficients est nulle : calcule le vecteur en $M=C$ et compare avec la propriété caractéristique de K écrite en $M=C$.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right\|$. Montrer que C appartient à Γ.

7. 1,5 pts

On note $C'=\mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1),(C,-1)\}$. Calculer les coordonnées de C' et montrer que K est le milieu de $[CC']$. En déduire que C' appartient à Γ et que $[CC']$ est un diamètre de Γ.