BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Niveau examen	5

Exercice 1 10 pts

Problème : Barycentres dans un triangle

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. On considère le point $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1),(C,1)\}$.

1. 1 pts

Justifier l'existence de G, puis montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Le milieu I est le barycentre de $\{(B,1),(C,1)\}$: remplace ces deux points par I.

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $3+1+1=5\neq 0$: le point G existe (F05).

Barycentre partiel. La somme partielle $1+1=2$ est non nulle, et $I=\mathrm{Bar}\{(B,1),(C,1)\}$ (isobarycentre, F03). D'après l'associativité du barycentre (F10), $G=\mathrm{Bar}\{(A,3),(I,2)\}$.

Vecteur $\overrightarrow{AG}$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02), avec la somme 5 :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AI}.$$

Conclusion. G existe et $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$.

2. 1 pts

On note $E=\mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1)\}$ et $F=\mathrm{Bar}\{(A,3),(C,1)\}$. Montrer que $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, et en déduire que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

CORRIGÉ

Position de E et de F. Les deux sommes valent $3+1=4\neq 0$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02), $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Vecteur $\overrightarrow{EF}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\\&=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$: ces vecteurs sont colinéaires, donc les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

3. 1,5 pts

Montrer que G appartient à la droite (CE) et à la droite (BF), en précisant $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FG}$.

CORRIGÉ

Droite (CE). La somme partielle de $\{(A,3),(B,1)\}$ vaut $4 \neq 0$, et son barycentre est E. D'après l'associativité du barycentre (F10), $G = \mathrm{Bar}\{(E,4),(C,1)\}$, puis, d'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

$$\overrightarrow{EG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{EC}.$$

Droite (BF). De même, la somme partielle de $\{(A,3),(C,1)\}$ vaut $4 \neq 0$, donc $G = \mathrm{Bar}\{(F,4),(B,1)\}$ et :

$$\overrightarrow{FG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{FB}.$$

Conclusion. G appartient à la droite (CE), avec $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{EC}$, et à la droite (BF), avec $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{FB}$.

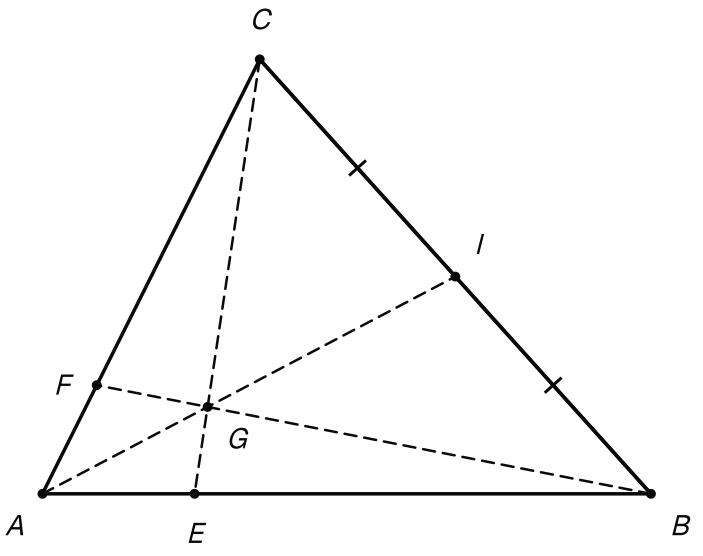
4. 1 pts

En déduire que les droites (AI), (CE) et (BF) sont concourantes.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AI}$, donc G appartient à (AI). D'après la question 3, G appartient aussi à (CE) et à (BF).

Conclusion. Les trois droites (AI), (CE) et (BF) passent par le même point G : elles sont concourantes en G.



Les droites (AI), (CE) et (BF) passent toutes par G, aux deux cinquièmes de [AI] en partant de A.

5. 1 pts

Montrer que, pour tout point M du plan, $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{IA}$.

INDICE

Pour la seconde somme, les coefficients ont une somme nulle : calcule-la en $M=A$, puis fais apparaître I.

CORRIGÉ

Première égalité. La somme des coefficients vaut $5\neq 0$. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), appliquée à G, pour tout point M :

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}.$$

Seconde égalité. La somme des coefficients vaut $2-1-1=0$: d'après la propriété des sommes de coefficients nulles (F09), le vecteur ne dépend pas de M. En $M=A$, il vaut $-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Or F08, appliquée au milieu I en $M=A$, donne $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$. Donc, pour tout point M :

$$\begin{aligned}&2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\\&=-2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IA}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout point M du plan, $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{IA}$.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$. Montrer que A appartient à Γ_1.

CORRIGÉ

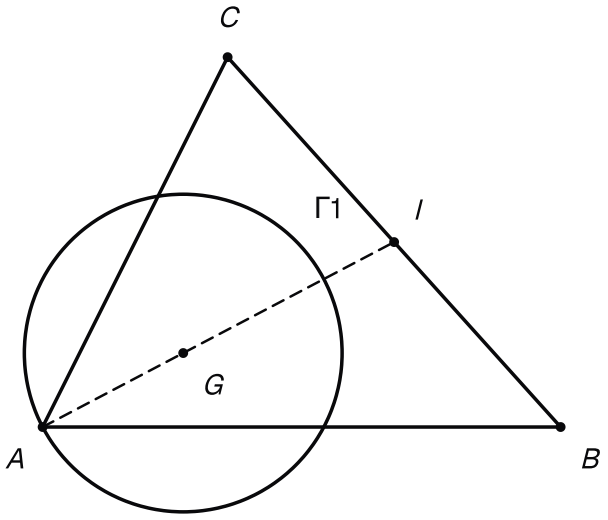
Traduction. D'après la question 5, la condition s'écrit $5MG = 2IA$, soit :

$$MG = \frac{2}{5}AI.$$

Ensemble Γ_1. Comme $A \notin (BC)$, on a $AI > 0$. D'après le lieu des points de norme constante (F14), Γ_1 est un cercle de centre G.

Le point A. D'après la question 1, $AG = \frac{2}{5}AI$: le point A appartient à Γ_1.

Conclusion. Γ_1 est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{5}AI$: c'est le cercle de centre G passant par A.



Γ1 : le cercle de centre G qui passe par A, de rayon égal aux deux cinquièmes de AI.

7. 1,5 pts

On note $H = \mathrm{Bar}\{(B,4),(C,1)\}$. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

CORRIGÉ

Réductions. La somme $4+1=5$ est non nulle. D'après la propriété caractéristique (F08), pour tout point M, $4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MH}$. Avec la question 5, la condition s'écrit $5MG = 5MH$, soit $MG = MH$.

Les points G et H sont distincts. Le point H appartient à la droite (BC) (F04). Le point G n'y appartient pas : la droite (AI) ne coupe (BC) qu'en I, et $G \neq I$ car $AG = \frac{2}{5}AI \neq AI$. Donc $G \neq H$.

Conclusion. D'après le lieu des points où deux sommes ont la même norme (F15), Γ_2 est la médiatrice du segment $[GH]$.

8. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires. Montrer que Δ coupe la droite (AB) au point N tel que $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AG}$, puis utilise $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

CORRIGÉ

Ensemble Δ. D'après la question 5, le vecteur vaut $5\overrightarrow{MG}$; comme $5\neq 0$, il est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ si et seulement si $\overrightarrow{GM}$ l'est. D'après le lieu des points de direction donnée (F16), Δ est la droite passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire la parallèle à (BC) passant par G.

Le point N. Soit N le point tel que $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; il appartient à (AB). Avec la question 1 et la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AG}\\&=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AI}\\&=\frac{2}{5}\overrightarrow{IB}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{IB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Le vecteur $\overrightarrow{GN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, donc $N\in\Delta$.

Unicité. La droite Δ est parallèle à (BC), qui coupe (AB) en B : Δ n'est donc pas parallèle à (AB), et ces deux droites ont un seul point commun.

Conclusion. Δ est la parallèle à (BC) passant par G, et elle coupe la droite (AB) au point N tel que $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 — 10 pts

Problème : Un quadrilatère en coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(-2, 0)$, $B(4, -2)$, $C(5, 3)$ et $D(-1, 4)$. On note $E = \mathrm{Bar}\{(A, 3), (B, 1)\}$ et $F = \mathrm{Bar}\{(C, 1), (D, 3)\}$.

1. — 1,5 pts

Calculer les coordonnées des points E et F.

CORRIGÉ

Les deux sommes de coefficients valent $4 \neq 0$. D'après les coordonnées du barycentre (F11) :

- $E\left(\dfrac{-6+4}{4}, \dfrac{0-2}{4}\right)$, soit $E\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$;
- $F\left(\dfrac{5-3}{4}, \dfrac{3+12}{4}\right)$, soit $F\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$.

Conclusion. $E\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ et $F\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$.

2. — 2 pts

Montrer que le système $\{(A, 3), (B, 1), (C, 1), (D, 3)\}$ admet un barycentre H, et que H est le milieu de $[EF]$. En déduire les coordonnées de H.

INDICE

Remplace $\{(A, 3), (B, 1)\}$ par $(E, 4)$ et $\{(C, 1), (D, 3)\}$ par $(F, 4)$.

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $3 + 1 + 1 + 3 = 8 \neq 0$: le point H existe (F05).

Milieu de $[EF]$. Les deux sommes partielles valent $4 \neq 0$. D'après l'associativité du barycentre (F10), appliquée aux deux parties, $H = \mathrm{Bar}\{(E, 4), (F, 4)\}$. Les coefficients sont égaux : H est le milieu de $[EF]$ (F03).

Coordonnées. On prend la demi-somme des coordonnées de E et F :

$$x_H = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0,$$
$$y_H = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{15}{4}\right) = \frac{13}{8}.$$

Conclusion. Le système admet un barycentre H, milieu de $[EF]$, et $H\left(0, \dfrac{13}{8}\right)$.

3. 1,5 pts

On note K et L les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$. Montrer que $H = \mathrm{Bar}\{(K,6),(L,2)\}$ et en déduire que $\overrightarrow{KH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{KL}$. Vérifier avec les coordonnées.

CORRIGÉ

Barycentres partiels. Par homogénéité (F07), $K = \mathrm{Bar}\{(A,3),(D,3)\}$, de somme partielle $6 \neq 0$, et $L = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,1)\}$, de somme partielle $2 \neq 0$. D'après l'associativité du barycentre (F10), $H = \mathrm{Bar}\{(K,6),(L,2)\}$.

Vecteur $\overrightarrow{KH}$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02), avec la somme 8 :

$$\overrightarrow{KH} = \frac{2}{8}\overrightarrow{KL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{KL}.$$

Vérification. On a $K\left(-\frac{3}{2},2\right)$ et $L\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{KL}\left(6,-\frac{3}{2}\right)$. Avec $H\left(0,\frac{13}{8}\right)$, on trouve $\overrightarrow{KH}\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{8}\right)$, et en effet $\frac{1}{4}\times 6 = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{8}$.

Conclusion. $H = \mathrm{Bar}\{(K,6),(L,2)\}$ et $\overrightarrow{KH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{KL}$.

4. 1 pts

Montrer que E n'appartient pas à la droite (KL). En déduire que les droites (EF) et (KL) sont sécantes en H.

INDICE

Calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{KE}$ et $\overrightarrow{KL}$.

CORRIGÉ

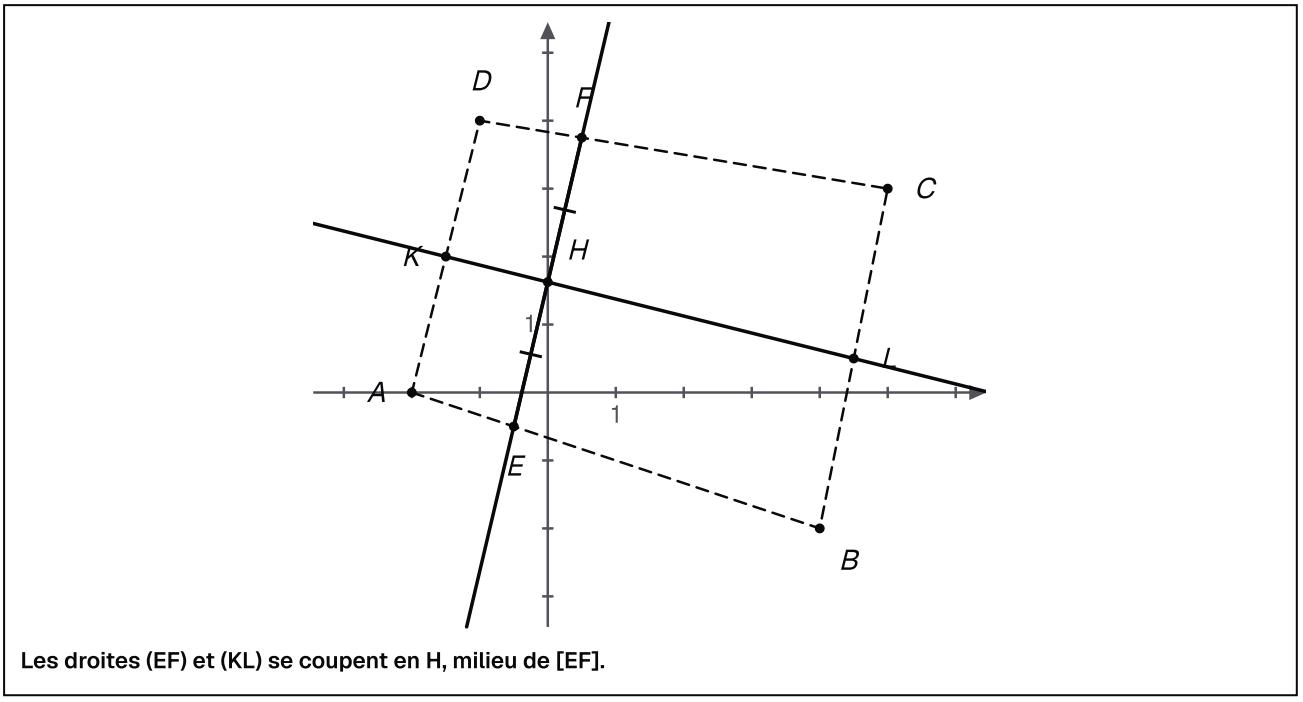
Le point E hors de (KL). On a $\overrightarrow{KE}\left(1, -\frac{5}{2}\right)$ et $\overrightarrow{KL}\left(6, -\frac{3}{2}\right)$. Leur déterminant vaut :

$$1 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right) \times 6$$
$$= -\frac{3}{2} + 15 = \frac{27}{2} \neq 0.$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : $E \notin (KL)$.

Droites sécantes. Les droites (EF) et (KL) sont donc distinctes. D'après la question 2, H, milieu de $[EF]$, appartient à (EF) ; d'après la question 3, $\overrightarrow{KH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{KL}$, donc H appartient à (KL).

Conclusion. E n'appartient pas à (KL), et les droites (EF) et (KL) sont sécantes en H.



Les droites (EF) et (KL) se coupent en H, milieu de [EF].

5. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\|=13$. Montrer que Γ passe par l'origine O.

CORRIGÉ

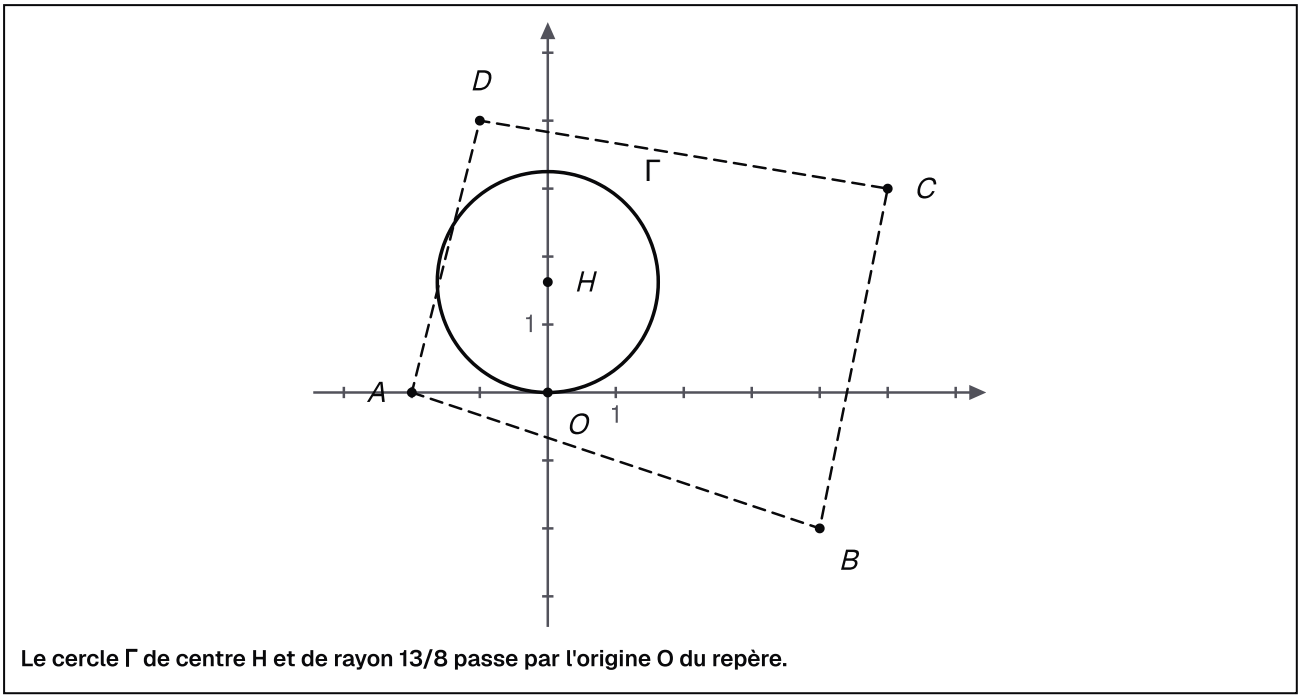
Traduction. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), pour tout point M, la somme vaut $8\overrightarrow{MH}$. La condition s'écrit $8MH=13$, soit :

$$MH=\frac{13}{8}.$$

Ensemble Γ. D'après le lieu des points de norme constante (F14), Γ est le cercle de centre $H\left(0,\frac{13}{8}\right)$ et de rayon $\frac{13}{8}$.

Le point O. Le repère est orthonormé et $x_H=0$, donc $OH=|y_H|=\frac{13}{8}$.

Conclusion. Γ est le cercle de centre H et de rayon $\frac{13}{8}$, et il passe par l'origine O.



Le cercle Γ de centre H et de rayon 13/8 passe par l'origine O du repère.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{KL}$ soient colinéaires.

CORRIGÉ

Réduction. La somme vaut $8\overrightarrow{MH}$, et $8\neq 0$: elle est colinéaire à $\overrightarrow{KL}$ si et seulement si $\overrightarrow{HM}$ l'est. Le vecteur $\overrightarrow{KL}$ est non nul. D'après le lieu des points de direction donnée (F16), Δ est la droite passant par H et de vecteur directeur $\overrightarrow{KL}$.

Conclusion. Comme H appartient à (KL) (question 3), cette droite est (KL) : $\Delta=(KL)$.

7. 1 pts

Soit I le milieu de $[AC]$. Déterminer l'ensemble Λ des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MC}\right\|$.

INDICE

Les deux sommes de coefficients valent 8 : compare les distances MH et MI.

CORRIGÉ

Réductions. Le milieu I de $[AC]$ a pour coordonnées $I\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, et, par homogénéité, $I = \mathrm{Bar}\{(A,4),(C,4)\}$, de somme 8. D'après la propriété caractéristique (F08), $4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MC}=8\overrightarrow{MI}$; le premier membre vaut $8\overrightarrow{MH}$. La condition s'écrit $8MH = 8MI$, soit $MH = MI$.

Les points H et I sont distincts. On a $x_I = \frac{3}{2}$ et $x_H = 0$, donc $H \neq I$.

Conclusion. D'après le lieu des points où deux sommes ont la même norme (F15), Λ est la médiatrice du segment $[HI]$.

Exercice 3 10 pts

Problème : Un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. On note $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$.

1. 1 pts

Montrer que $D = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ avec la relation de Chasles et l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

CORRIGÉ

Calcul. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}$. Donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Conclusion. La somme des coefficients vaut $1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$. D'après la définition du barycentre de trois points (F06), $D = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$.

2. 1,5 pts

Montrer que G est le milieu du segment $[OB]$.

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $1 + 2 + 1 = 4 \neq 0$: le point G existe.

Barycentre partiel. Le centre O est le milieu de la diagonale $[AC]$, donc $O = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,1)\}$, de somme partielle $2 \neq 0$. D'après l'associativité du barycentre (F10), $G = \mathrm{Bar}\{(O,2),(B,2)\}$.

Conclusion. Les deux coefficients sont égaux : G est le milieu du segment $[OB]$ (F03).

3. 1 pts

On note $E = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$. Montrer que G appartient à la droite (EC) et préciser $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{EC}$.

CORRIGÉ

La somme partielle $1 + 2 = 3$ est non nulle, et le barycentre de $\{(A,1),(B,2)\}$ est E. D'après l'associativité du barycentre (F10), $G = \mathrm{Bar}\{(E,3),(C,1)\}$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02), avec la somme 4 :

$$\overrightarrow{EG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EC}.$$

Conclusion. G appartient à la droite (EC), et $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EC}$.

4. 1 pts

En déduire, à l'aide de la question 1, que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}.$$

CORRIGÉ

D'après la question 1, D est le barycentre de $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$, dont la somme des coefficients vaut 1. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), pour tout point M :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\\ &= 1 \times \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$.

5. 1,5 pts

Montrer que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$$

et

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BD}.$$

INDICE

Pour la seconde somme, les coefficients ont une somme nulle : prends $M = B$.

CORRIGÉ

Première égalité. C'est la propriété caractéristique du barycentre (F08), appliquée à G, de somme 4.

Seconde égalité. La somme des coefficients vaut $1 - 2 + 1 = 0$: d'après la propriété des sommes de coefficients nulles (F09), le vecteur ne dépend pas de M. En $M = B$, où $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$, il vaut $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, la règle du parallélogramme donne :

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.$$

Conclusion. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BD}$.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$. Montrer que Γ est le cercle de diamètre $[OB]$.

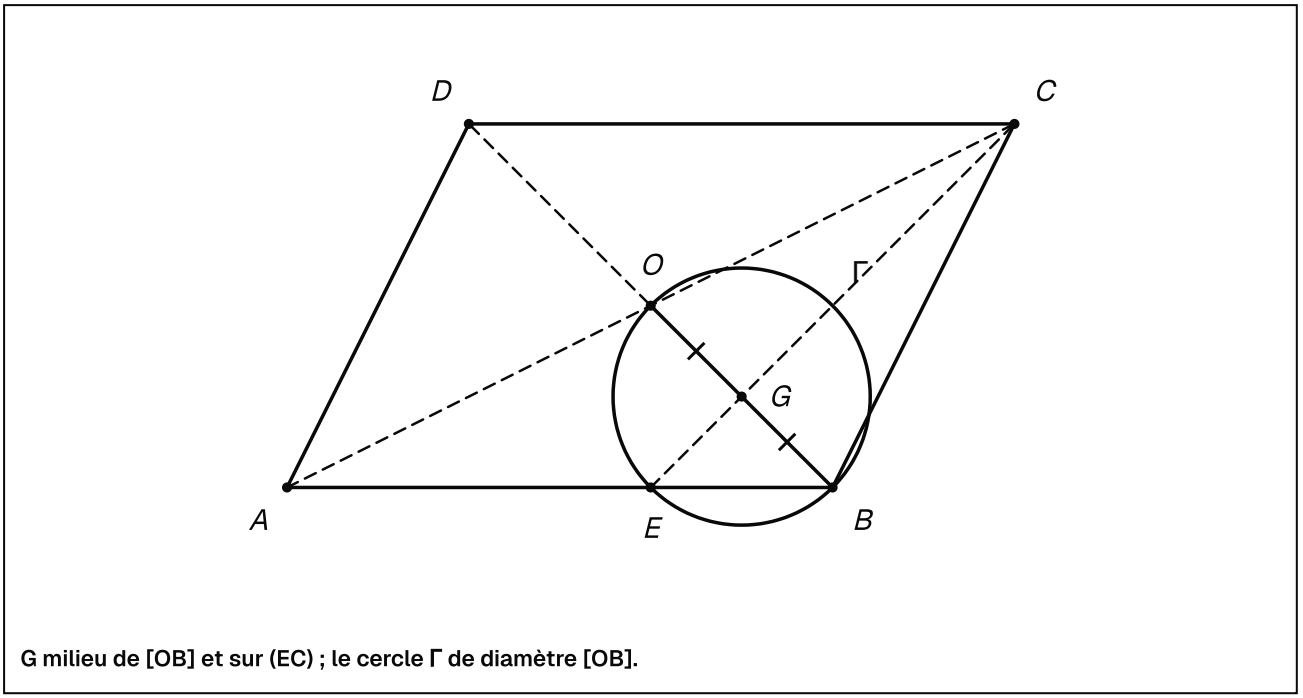
CORRIGÉ

Traduction. D'après la question 5, la condition s'écrit $4MG = BD$, soit $MG = \frac{1}{4}BD$. Comme $B \neq D$, d'après le lieu des points de norme constante (F14), Γ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{4}BD$.

Rayon. Le point O est le milieu de $[BD]$, donc $OB = \frac{1}{2}BD$. Le point G est le milieu de $[OB]$ (question 2), donc :

$$GO = GB = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{4}BD.$$

Conclusion. Γ est le cercle de centre G passant par O et par B ; son centre est le milieu de $[OB]$: c'est le cercle de diamètre $[OB]$.



G milieu de [OB] et sur (EC) ; le cercle Γ de diamètre [OB].

7. 1 pts

Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

CORRIGÉ

D'après la question 5, le vecteur vaut $4\overrightarrow{MG}$, et $4 \neq 0$: il est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ si et seulement si $\overrightarrow{GM}$ l'est. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est non nul. D'après le lieu des points de direction donnée (F16), Δ est la droite passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$.

Conclusion. Δ est la parallèle à la diagonale (AC) passant par G.

8. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Λ des points M du plan tels que $\left\|4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

INDICE

Les deux sommes de coefficients valent 4. Par homogénéité, quel est le barycentre de $\{(A,4),(B,-4),(C,4)\}$?

CORRIGÉ

Réductions. Par homogénéité (F07), avec $k=4$, $D=\mathrm{Bar}\{(A,4),(B,-4),(C,4)\}$, de somme 4. D'après la propriété caractéristique (F08), le premier vecteur vaut $4\overrightarrow{MD}$; d'après la question 5, le second vaut $4\overrightarrow{MG}$. La condition s'écrit $4MD=4MG$, soit $MD=MG$.

Les points D et G sont distincts. Le point G appartient au segment $[OB]$, avec $G\neq O$. Comme O est le milieu de $[BD]$, le point D est sur la demi-droite d'origine O opposée à $[OB)$, avec $D\neq O$. Donc $D\neq G$.

Conclusion. D'après le lieu des points où deux sommes ont la même norme (F15), Λ est la médiatrice du segment $[DG]$.

Exercice 4 10 pts

Problème : Un trapèze

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$, les points A, B et C n'étant pas alignés : $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[DC]$.

1. 1,5 pts

Montrer que, pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\\ &\quad + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Le système $\{(A,1),(B,-1),(C,2),(D,-2)\}$ admet-il un barycentre ? Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que la norme du vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ soit égale à AB.

INDICE

La somme des coefficients est nulle : calcule le vecteur en $M = A$, puis utilise $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$.

CORRIGÉ

Vecteur constant. La somme des coefficients vaut $1 - 1 + 2 - 2 = 0$: d'après la propriété des sommes de coefficients nulles (F09), le vecteur ne dépend pas de M. En $M = A$, il vaut :

$$\begin{aligned}&-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}\\ &= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0},\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ (relation de Chasles) et $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC}$. La relation est donc vraie pour tout point M.

Barycentre. Tous les points du plan vérifient la relation : d'après F09, ce système n'a pas de barycentre (W01).

Ensemble. La norme considérée vaut 0 pour tout point M, alors que $AB \neq 0$ car $A \neq B$. D'après le lieu des points de norme constante (F14, somme nulle, vecteur constant de norme $0 \neq AB$), l'ensemble cherché est vide.

Conclusion. La relation est vraie pour tout point M, le système n'admet aucun barycentre, et aucun point ne vérifie la condition de norme.

2. 1,5 pts

On note $O = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,2)\}$. Déduire de la question 1 que $O = \mathrm{Bar}\{(B,1),(D,2)\}$, puis que les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O.

INDICE

Écris la relation de la question 1 sous la forme $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MD}$, puis réduis le premier membre.

CORRIGÉ

Existence. La somme $1 + 2 = 3$ est non nulle : O existe.

Seconde écriture de O. D'après la question 1, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MD}$, et le premier membre vaut $3\overrightarrow{MO}$ (F08). En $M = O$, on obtient $\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Comme $1 + 2 \neq 0$, la définition du barycentre de deux points (F03) donne $O = \mathrm{Bar}\{(B,1),(D,2)\}$.

Intersection des diagonales. Les points B et D sont distincts : sinon $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, et A, B, C seraient alignés. D'après la position du barycentre de deux points (F04), O appartient à (AC) et à (BD), avec $\overrightarrow{AO} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BO} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BD}$ (F02). Ces deux droites sont distinctes, car B n'appartient pas à (AC).

Conclusion. $O = \mathrm{Bar}\{(B,1),(D,2)\}$, et les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O.

3. 1,5 pts

On note $S = \mathrm{Bar}\{(A,1),(D,-2)\}$. Montrer de même que $S = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,-2)\}$. En déduire que les droites (AD) et (BC) se coupent en S, que D est le milieu de $[AS]$ et que C est le milieu de $[BS]$.

CORRIGÉ

Existence. La somme $1 - 2 = -1$ est non nulle : S existe.

Seconde écriture de S. D'après la question 1, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$, et le premier membre vaut $-\overrightarrow{MS}$ (F08). En $M = S$, on obtient $\overrightarrow{SB} - 2\overrightarrow{SC} = \vec{0}$. Comme $1 - 2 \neq 0$, la définition du barycentre de deux points (F03) donne $S = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,-2)\}$.

Milieux. Les points A et D sont distincts : sinon $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, et A, B, C seraient alignés. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

$$\overrightarrow{AS} = \frac{-2}{-1}\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD},$$

et de même $\overrightarrow{BS} = 2\overrightarrow{BC}$: D est le milieu de $[AS]$ et C celui de $[BS]$.

Intersection. Le point S appartient à (AD) et à (BC) (F04). Ces droites sont distinctes, car A n'appartient pas à (BC).

Conclusion. $S = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,-2)\}$; les droites (AD) et (BC) se coupent en S, D est le milieu de $[AS]$ et C est le milieu de $[BS]$.

4. 1,5 pts

Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,2),(D,2)\}$. Montrer que $G = O$, puis que $\overrightarrow{IO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

CORRIGÉ

Le point G est O. La somme des coefficients vaut $6 \neq 0$: G existe. D'après la question 2, O est le barycentre de $\{(A,1),(C,2)\}$ et de $\{(B,1),(D,2)\}$. D'après la propriété caractéristique (F08), pour tout point M :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\\ &= \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\right)\\ &\quad + \left(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MD}\right)\\ &= 3\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{MO} = 6\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$

En $M = G$, le premier membre est nul (définition de G), donc $6\overrightarrow{GO} = \vec{0}$ et $G = O$.

Position de O sur (IJ). Par homogénéité, $I = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1)\}$ et $J = \mathrm{Bar}\{(C,2),(D,2)\}$, de sommes partielles 2 et 4, non nulles. D'après l'associativité du barycentre (F10), $O = \mathrm{Bar}\{(I,2),(J,4)\}$, donc, d'après F02 :

$$\overrightarrow{IO} = \frac{4}{6}\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}.$$

Conclusion. $G = O$ et $\overrightarrow{IO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

5. 1,5 pts

Montrer que S est le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,-2),(D,-2)\}$ et que $\overrightarrow{IS}=2\overrightarrow{IJ}$. En déduire que les points I, J, O et S sont alignés.

CORRIGÉ

Le point S comme barycentre. La somme des coefficients vaut $-2\neq 0$: ce système a un barycentre G'. D'après la propriété caractéristique (F08) et la question 3, pour tout point M :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\\&=\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MD}\right)\\&\quad+\left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)\\&=-\overrightarrow{MS}-\overrightarrow{MS}\\&=-2\overrightarrow{MS}.\end{aligned}$$

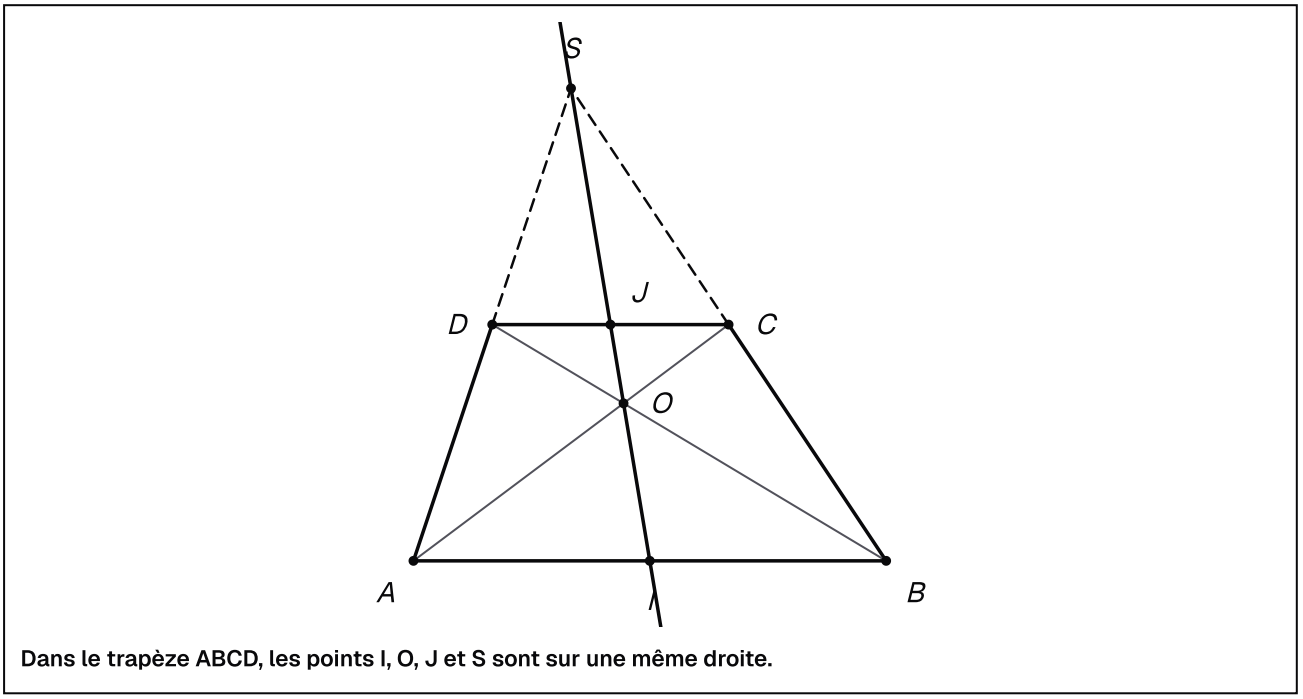
En $M=G'$, le premier membre est nul, donc $-2\overrightarrow{G'S}=\vec{0}$ et $G'=S$.

Position de S. Par homogénéité, $J=\mathrm{Bar}\{(C,-2),(D,-2)\}$, de somme partielle $-4\neq 0$, et $I=\mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1)\}$, de somme partielle 2. D'après l'associativité du barycentre (F10), $S=\mathrm{Bar}\{(I,2),(J,-4)\}$, donc, d'après F02 :

$$\overrightarrow{IS}=\frac{-4}{-2}\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IJ}.$$

Les points I et J sont distincts. Comme $\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, on a $D\neq C$. Le point I appartient à (AB) et J à (DC) ; ces deux droites sont parallèles et distinctes, car $C\notin(AB)$. Donc $I\neq J$.

Conclusion. D'après la question 4 et ce qui précède, O et S appartiennent à la droite (IJ) : les points I, J, O et S sont alignés.



Dans le trapèze ABCD, les points I, O, J et S sont sur une même droite.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ soient colinéaires.

INDICE

Réduis les deux sommes, puis traduis la colinéarité de $\overrightarrow{MO}$ et de $\overrightarrow{MS}$ par un alignement de trois points.

CORRIGÉ

Réductions. D'après les questions 4 et 5, les deux vecteurs valent $6\overrightarrow{MO}$ et $-2\overrightarrow{MS}$. Comme 6 et -2 sont non nuls, ils sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{MS}$ le sont, c'est-à-dire si et seulement si les points M, O et S sont alignés.

Les points O et S sont distincts. On a $\overrightarrow{IO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IS}=2\overrightarrow{IJ}$ et $I\neq J$, donc $O\neq S$.

Conclusion. Δ est la droite (OS), c'est-à-dire la droite (IJ) d'après la question 5.

7. 1 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$. Préciser l'intersection de Γ et de la droite Δ de la question 6.

CORRIGÉ

Réductions. D'après la question 5, le premier vecteur vaut $-2\overrightarrow{MS}$; d'après la propriété caractéristique (F08) appliquée au milieu I, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. La condition s'écrit $2MS=2MI$, soit $MS=MI$.

Ensemble Γ. Comme $\overrightarrow{IS}=2\overrightarrow{IJ}$ et $I\neq J$, on a $I\neq S$. D'après le lieu des points où deux sommes ont la même norme (F15), Γ est la médiatrice du segment $[IS]$.

Intersection. La médiatrice Γ est perpendiculaire à la droite (IS), c'est-à-dire à Δ (question 6), en le milieu de $[IS]$, qui est J car $\overrightarrow{IS}=2\overrightarrow{IJ}$.

Conclusion. Γ est la médiatrice du segment $[IS]$, et Γ et Δ se coupent au seul point J.

Exercice 5 — 10 pts

Problème : Des coefficients à retrouver

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(1,-5)$, $B(7,-1)$, $C(-2,2)$ et $K(1,-2)$.

1. — 1 pts

Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

CORRIGÉ

Vecteurs. On a $\overrightarrow{AB}(6,4)$ et $\overrightarrow{AC}(-3,7)$.

Déterminant. Le déterminant de ces deux vecteurs vaut :

$$6 \times 7 - 4 \times (-3) = 54 \neq 0.$$

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B et C ne sont pas alignés, et ABC est un triangle.

2. — 2 pts

Déterminer deux réels β et γ tels que $3+\beta+\gamma \neq 0$ et $K = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

INDICE

Pose $s = 3+\beta+\gamma$ et écris les deux égalités des coordonnées du barycentre (F11) sous la forme $3x_A + \beta x_B + \gamma x_C = s\,x_K$, puis de même pour les ordonnées.

CORRIGÉ

Mise en équations. Soit β et γ deux réels tels que $s = 3+\beta+\gamma \neq 0$. D'après les coordonnées du barycentre (F11), K est le barycentre de $\{(A,3),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ si et seulement si $3x_A + \beta x_B + \gamma x_C = s\,x_K$ et $3y_A + \beta y_B + \gamma y_C = s\,y_K$, soit :

$$\begin{aligned} 3 + 7\beta - 2\gamma &= s, \\ -15 - \beta + 2\gamma &= -2s. \end{aligned}$$

Résolution. On remplace s par $3+\beta+\gamma$. La première équation donne $6\beta - 3\gamma = 0$, soit $\gamma = 2\beta$; la seconde donne $\beta + 4\gamma = 9$. En remplaçant, $9\beta = 9$: $\beta = 1$ et $\gamma = 2$. Alors $s = 6 \neq 0$.

Vérification (M04). On retrouve bien les coordonnées de K :

- $\dfrac{3\times 1 + 7 - 4}{6} = 1$;
- $\dfrac{-15 - 1 + 4}{6} = -2$.

Conclusion. Les réels $\beta = 1$ et $\gamma = 2$ conviennent : $K = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1),(C,2)\}$.

3. 1,5 pts

On note $L = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,2)\}$. Montrer que K est le milieu du segment $[AL]$ et que L appartient au segment $[BC]$. Vérifier avec les coordonnées de L.

CORRIGÉ

Milieu de $[AL]$. La somme partielle $1+2=3$ est non nulle. D'après l'associativité du barycentre (F10), $K = \mathrm{Bar}\{(A,3),(L,3)\}$: les coefficients étant égaux, K est le milieu de $[AL]$ (F03).

Position de L. Les coefficients de L sont positifs, donc L appartient au segment $[BC]$ (F13), avec $\overrightarrow{BL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (F02).

Vérification. D'après les coordonnées du barycentre (F11), $L\left(\dfrac{7-4}{3}, \dfrac{-1+4}{3}\right)$, soit $L(1,1)$. Le milieu de $[AL]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+1}{2}, \dfrac{-5+1}{2}\right) = (1,-2)$: c'est bien K.

Conclusion. K est le milieu de $[AL]$, et L est le point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

4. 1,5 pts

On note $E = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1)\}$. Calculer les coordonnées de E, montrer que $\overrightarrow{CK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$, et en déduire que la droite (CK) coupe la droite (AB) en E.

CORRIGÉ

Coordonnées de E. La somme $3+1=4$ est non nulle. D'après les coordonnées du barycentre (F11), $E\left(\dfrac{3+7}{4}, \dfrac{-15-1}{4}\right)$, soit $E\left(\dfrac{5}{2}, -4\right)$.

Vecteur $\overrightarrow{CK}$. D'après l'associativité du barycentre (F10), avec la somme partielle $4 \neq 0$, $K = \mathrm{Bar}\{(E,4),(C,2)\}$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

$$\overrightarrow{CK} = \frac{4}{6}\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}.$$

Vérification : $\overrightarrow{CE}\left(\dfrac{9}{2}, -6\right)$ et $\overrightarrow{CK}(3,-4)$.

Intersection. Ainsi E appartient à (CK), et à (AB) d'après F04. La droite (CK) n'est pas (AB), car $C \notin (AB)$ (question 1) : ces deux droites ont un seul point commun.

Conclusion. $E\left(\dfrac{5}{2}, -4\right)$, $\overrightarrow{CK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$, et la droite (CK) coupe la droite (AB) en E.

5. 1 pts

Montrer que, pour tout point M du plan, $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{CK}$.

INDICE

La somme des coefficients est nulle : calcule le vecteur en $M=C$ et compare avec la propriété caractéristique de K écrite en $M=C$.

CORRIGÉ

Vecteur constant. La somme des coefficients vaut $3+1-4=0$: d'après la propriété des sommes de coefficients nulles (F09), le vecteur ne dépend pas de M. En $M=C$, il vaut $3\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

Lien avec K. La propriété caractéristique (F08), appliquée à K (somme 6) en $M=C$, donne :

$$\begin{aligned}&3\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CC}\\&=6\overrightarrow{CK}.\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{CC}=\vec{0}$, on obtient $3\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=6\overrightarrow{CK}$.

Conclusion. Pour tout point M du plan, $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{CK}$.

6. 1,5 pts

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right\|$. Montrer que C appartient à Γ.

CORRIGÉ

Réductions. D'après la propriété caractéristique (F08) et la question 2, le premier vecteur vaut $6\overrightarrow{MK}$; d'après la question 5, le second vaut $6\overrightarrow{CK}$. La condition s'écrit $6MK=6CK$, soit $MK=CK$.

Rayon non nul. D'après la question 4, $\overrightarrow{CK}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$, et $C\neq E$ car $E\in(AB)$ et $C\notin(AB)$. Donc $C\neq K$ et $CK>0$.

Conclusion. D'après le lieu des points de norme constante (F14), Γ est le cercle de centre $K(1,-2)$ passant par C, de rayon CK. En particulier, C appartient à Γ.

7. 1,5 pts

On note $C' = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1),(C,-1)\}$. Calculer les coordonnées de C' et montrer que K est le milieu de $[CC']$. En déduire que C' appartient à Γ et que $[CC']$ est un diamètre de Γ.

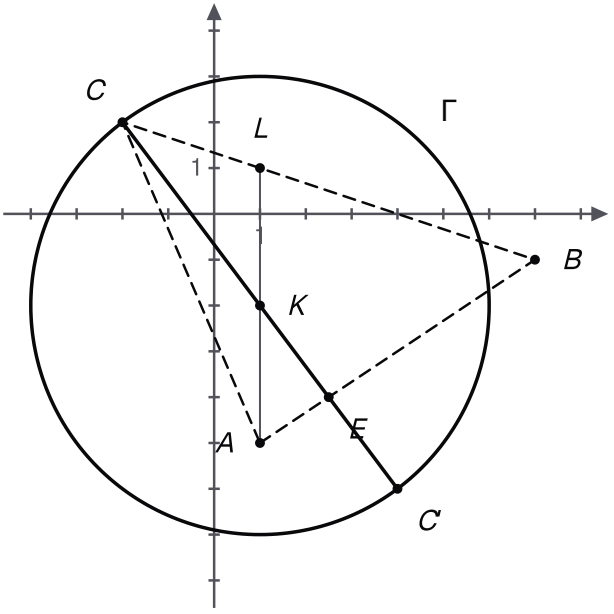
CORRIGÉ

Coordonnées de C'. La somme des coefficients vaut $3+1-1=3\neq 0$: C' existe. D'après les coordonnées du barycentre (F11), $C'\left(\dfrac{3+7+2}{3},\dfrac{-15-1-2}{3}\right)$, soit $C'(4,-6)$.

Milieu de $[CC']$. Il a pour coordonnées $\left(\dfrac{-2+4}{2},\dfrac{2-6}{2}\right)=(1,-2)$: c'est K.

Appartenance. Comme K est le milieu de $[CC']$, $KC'=KC$: le point C' appartient à Γ.

Conclusion. Le segment $[CC']$ a ses deux extrémités sur Γ et pour milieu le centre K de Γ : c'est un diamètre de Γ.



Le cercle Γ de centre K passe par C et par C' : [CC'] en est un diamètre.