BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Écrire un point comme barycentre

Soit ABC un triangle. Pour chaque point défini ci-dessous, on cherche des coefficients qui en font un barycentre des sommets.

1.

Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$. Montrer que $M = \mathrm{Bar}\{(A,5),(B,2)\}$.

INDICE

Multiplie par 7, puis écris $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

2.

Le point P vérifie $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CA}$. Écrire P comme barycentre de A et C, avec des coefficients entiers dont la somme vaut 1.

INDICE

Écris $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA}$, puis regroupe les vecteurs issus de P.

3.

Le point K vérifie $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrer que $K = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,3),(C,2)\}$.

INDICE

Multiplie par 6 pour chasser les dénominateurs, puis insère K dans $\overrightarrow{AB}$ et dans $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2

Quatre points, deux regroupements

Soit $ABCD$ un quadrilatère, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,3),(D,3)\}$.

1.

On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$.

INDICE

Le milieu J de $[CD]$ est aussi le barycentre de $\{(C,3),(D,3)\}$.

2.

On note $P = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,3)\}$ et $Q = \mathrm{Bar}\{(B,1),(D,3)\}$. Situer P sur $[AC]$ et Q sur $[BD]$, puis montrer que G est le milieu de $[PQ]$.

INDICE

Regroupe cette fois A avec C, et B avec D : les deux sommes partielles sont égales.

3.

En déduire que le milieu du segment $[PQ]$ appartient au segment $[IJ]$.

INDICE

Relis la relation de la question 1 : quel est le coefficient de $\overrightarrow{IJ}$?

Exercice 3

Une médiane et un milieu

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. On considère les points $E = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$, $F = \mathrm{Bar}\{(A,2),(C,1)\}$ et $K = \mathrm{Bar}\{(A,4),(B,1),(C,1)\}$.

1.

Situer E et F, puis montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

INDICE

Exprime $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ par F02, puis calcule $\overrightarrow{EF}$.

2.

Montrer que K appartient à la droite (AI), et préciser $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Regroupe les points B et C.

3.

Montrer que, pour tout point M, $3\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{MF} = 6\overrightarrow{MK}$. En déduire que K est le milieu de $[EF]$.

INDICE

Écris la propriété caractéristique pour E, pour F, puis pour K, et additionne les deux premières égalités.

4.

Conclure : la médiane (AI) coupe-t-elle le segment $[EF]$? En quel point ?

INDICE

Rassemble les questions 2 et 3.

Exercice 4

Trois droites, un point

Soit ABC un triangle. On définit trois points par $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1.

Montrer que $P = \mathrm{Bar}\{(B,2),(C,3)\}$, $Q = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,3)\}$ et $R = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$.

INDICE

Calcule la relation de F02 pour chaque système proposé, et compare-la à la définition du point.

2.

On note $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,3)\}$. Montrer que G appartient aux droites (AP), (BQ) et (CR).

INDICE

Pour la droite (AP), regroupe B et C ; procède de même pour les deux autres droites.

3.

Préciser la position de G sur chacun des segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$.

INDICE

Applique F02 à chacun des trois systèmes réduits de la question 2.

Exercice 5

Deux normes égales

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. On note $E = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$, $H = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,-4)\}$, et G le centre de gravité du triangle.

1.

Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. En déduire que $E \neq H$.

INDICE

Si l'on avait $E = H$, que dirait-on des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

2.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\right\|$.

INDICE

Réduis chaque membre par la propriété caractéristique, puis compare les distances ME et MH.

3.

Montrer que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$ pour tout point M.

INDICE

La somme des coefficients est nulle : prends $M = A$, puis utilise le milieu I.

4.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$. Montrer que A appartient à Γ.

INDICE

Le premier membre vaut $3MG$. Rappelle-toi la position du centre de gravité sur la médiane $[AI]$.

Exercice 6

Une direction imposée

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $P(-1, 3)$ et $Q(5, 0)$, et le vecteur $\vec{w}(1, 3)$.

1.

Calculer les coordonnées du point $G = \mathrm{Bar}\{(P, 2), (Q, 1)\}$.

INDICE

Vérifie la somme des coefficients, puis applique les coordonnées du barycentre (F11).

2.

Déterminer l'ensemble Δ_1 des points M du plan tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires. En donner une équation cartésienne.

INDICE

Réduis la somme, puis écris la colinéarité de $\overrightarrow{GM}$ et $\vec{w}$ avec le déterminant.

3.

Les points O et $S(2, 5)$ appartiennent-ils à Δ_1 ?

INDICE

Remplace les coordonnées dans l'équation de la question 2.

4.

Déterminer l'ensemble Δ_2 des points M du plan tels que $2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient colinéaires.

INDICE

Où se trouve G par rapport à la droite (PQ) ?

Exercice 7

Des coordonnées à l'alignement

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $A(-4, 1)$, $B(2, 4)$ et $C(3, -2)$, puis les points $E = \mathrm{Bar}\{(A, 2), (B, 1)\}$, $F = \mathrm{Bar}\{(B, -1), (C, 3)\}$ et $H = \mathrm{Bar}\{(A, 2), (C, 3)\}$.

1.

Calculer les coordonnées de E, F et H.

INDICE

Vérifie chaque somme de coefficients avant de diviser.

2.

Montrer que les points E, F et H sont alignés, et exprimer $\overrightarrow{EH}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

INDICE

Calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$.

3.

Retrouver ce résultat sans coordonnées : montrer que $H = \mathrm{Bar}\{(E, 3), (F, 2)\}$.

INDICE

Écris la propriété caractéristique pour E et pour F, additionne, puis prends $M = H$.