BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Écrire un point comme barycentre

Soit ABC un triangle. Pour chaque point défini ci-dessous, on cherche des coefficients qui en font un barycentre des sommets.

1.

Le point M vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$. Montrer que $M = \mathrm{Bar}\{(A,5),(B,2)\}$.

INDICE

Multiplie par 7, puis écris $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

CORRIGÉ

On cherche une relation de la forme $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Relation de départ. En multipliant par 7, on obtient $7\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$.

Introduction du point M. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$. Donc :

$$7\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB},$$

soit $5\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Comme $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MA}$, on change tous les signes :

$$5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Conclusion. La somme des coefficients vaut $5 + 2 = 7 \neq 0$. D'après la définition du barycentre de deux points (F03), $M = \mathrm{Bar}\{(A,5),(B,2)\}$.

2.

Le point P vérifie $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CA}$. Écrire P comme barycentre de A et C, avec des coefficients entiers dont la somme vaut 1.

INDICE

Écris $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA}$, puis regroupe les vecteurs issus de P.

CORRIGÉ

Introduction du point P. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA}$. L'égalité $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CA}$ devient :

$$\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CP} + 3\overrightarrow{PA},$$

donc $-2\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PA}$, c'est-à-dire $2\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PA}$:

$$2\overrightarrow{PC} - 3\overrightarrow{PA} = \vec{0}.$$

Barycentre. La somme des coefficients $-3 + 2 = -1$ est non nulle : d'après la définition du barycentre de deux points (F03), $P = \mathrm{Bar}\{(A, -3), (C, 2)\}$. Par homogénéité (F07), avec $k = -1$:

$$P = \mathrm{Bar}\{(A, 3), (C, -2)\},$$

système dont la somme des coefficients vaut 1.

Contrôle. La relation du barycentre de deux points (F02) donne $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AC}$, puis :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CA}.\end{aligned}$$

Conclusion. $P = \mathrm{Bar}\{(A, 3), (C, -2)\}$, avec des coefficients entiers de somme 1.

3.

Le point K vérifie $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Montrer que $K = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,3),(C,2)\}$.

INDICE

Multiplie par 6 pour chasser les dénominateurs, puis insère K dans $\overrightarrow{AB}$ et dans $\overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

Relation de départ. En multipliant par 6, on obtient $6\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Introduction du point K. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} 6\overrightarrow{AK} &= 3\left(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}\right) \\ &\quad + 2\left(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}\right) \\ &= 5\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC}. \end{aligned}$$

Relation barycentrique. On en déduit $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC}$, et comme $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{KA}$:

$$\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}.$$

Conclusion. La somme des coefficients vaut $1 + 3 + 2 = 6 \neq 0$. D'après la définition du barycentre de trois points (F06), $K = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,3),(C,2)\}$.

Exercice 2

Quatre points, deux regroupements

Soit $ABCD$ un quadrilatère, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,3),(D,3)\}$.

1.

On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que $\overrightarrow{IG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$.

INDICE

Le milieu J de $[CD]$ est aussi le barycentre de $\{(C,3),(D,3)\}$.

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $1+1+3+3 = 8 \neq 0$: le point G existe (F05).

Barycentres partiels. On a $I = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1)\}$, de somme partielle $2 \neq 0$. Par homogénéité (F07), le milieu J de $[CD]$ vérifie $J = \mathrm{Bar}\{(C,3),(D,3)\}$, de somme partielle $6 \neq 0$. L'associativité du barycentre (F10), appliquée aux deux parties, donne :

$$G = \mathrm{Bar}\{(I,2),(J,6)\}.$$

Vecteur $\overrightarrow{IG}$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02), avec la somme 8 :

$$\overrightarrow{IG} = \frac{6}{8}\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{IG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$.

2.

On note $P = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,3)\}$ et $Q = \mathrm{Bar}\{(B,1),(D,3)\}$. Situer P sur $[AC]$ et Q sur $[BD]$, puis montrer que G est le milieu de $[PQ]$.

INDICE

Regroupe cette fois A avec C, et B avec D : les deux sommes partielles sont égales.

CORRIGÉ

Position de P et de Q. Les deux sommes valent $1+3=4\neq 0$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}.$$

Les coefficients sont positifs : P est sur $[AC]$, aux trois quarts à partir de A, et Q sur $[BD]$, aux trois quarts à partir de B (F04).

Associativité. Les sommes partielles valent $4\neq 0$. D'après l'associativité du barycentre (F10), appliquée aux deux regroupements :

$$G = \mathrm{Bar}\{(P,4),(Q,4)\}.$$

Conclusion. Les deux coefficients sont égaux et non nuls : G est l'isobarycentre de P et Q, c'est-à-dire le milieu de $[PQ]$ (F03).

3.

En déduire que le milieu du segment $[PQ]$ appartient au segment $[IJ]$.

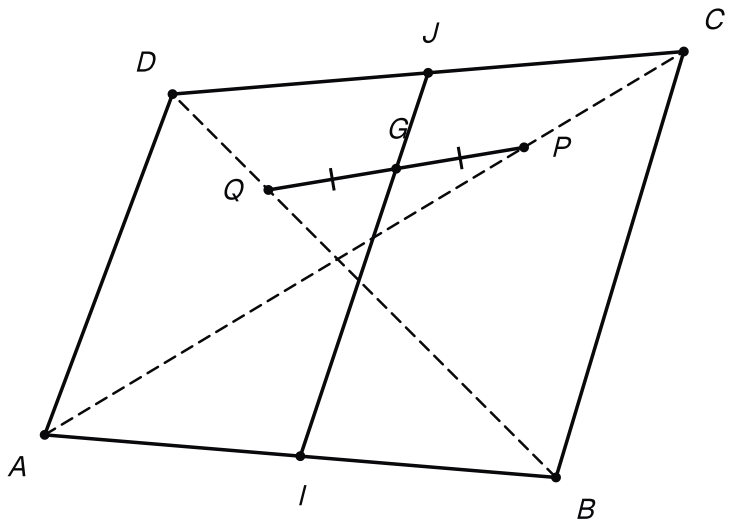
INDICE

Relis la relation de la question 1 : quel est le coefficient de $\overrightarrow{IJ}$?

CORRIGÉ

D'après la question 2, le milieu de $[PQ]$ est G. D'après la question 1, $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$, avec $0 \leq \frac{3}{4} \leq 1$: le point G appartient au segment $[IJ]$.

Conclusion. Le milieu du segment $[PQ]$ appartient au segment $[IJ]$.



Le milieu G de [PQ] est aussi sur [IJ], aux trois quarts en partant de I.

Exercice 3

Une médiane et un milieu

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. On considère les points $E = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$, $F = \mathrm{Bar}\{(A,2),(C,1)\}$ et $K = \mathrm{Bar}\{(A,4),(B,1),(C,1)\}$.

1.

Situer E et F, puis montrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

INDICE

Exprime $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ par F02, puis calcule $\overrightarrow{EF}$.

CORRIGÉ

Position de E et de F. Les deux sommes valent $2+1=3\neq 0$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02), $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$: E est sur $[AB]$ et F sur $[AC]$, au tiers à partir de A.

Vecteur $\overrightarrow{EF}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires : les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

2.

Montrer que K appartient à la droite (AI), et préciser $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

INDICE

Regroupe les points B et C.

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $4+1+1=6\neq 0$: le point K existe.

Barycentre partiel. La somme partielle $1+1=2$ est non nulle, et $I=\mathrm{Bar}\{(B,1),(C,1)\}$ (isobarycentre, F03). D'après l'associativité du barycentre (F10), $K=\mathrm{Bar}\{(A,4),(I,2)\}$.

Vecteur $\overrightarrow{AK}$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

$$\overrightarrow{AK}=\frac{2}{6}\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Conclusion. K appartient à la droite (AI), et $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

3.

Montrer que, pour tout point M, $3\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{MF} = 6\overrightarrow{MK}$. En déduire que K est le milieu de $[EF]$.

INDICE

Écris la propriété caractéristique pour E, pour F, puis pour K, et additionne les deux premières égalités.

CORRIGÉ

Réductions. Soit M un point du plan. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), appliquée à E puis à F :

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{ME},$$
$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MF}.$$

Somme. En additionnant, puis en appliquant encore F08 à K, de somme 6 :

$$\begin{aligned} &3\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{MF} \\ &= 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\ &= 6\overrightarrow{MK}. \end{aligned}$$

Milieu de $[EF]$. En $M = K$, le second membre est nul : $3\overrightarrow{KE} + 3\overrightarrow{KF} = \vec{0}$. La somme $3 + 3 = 6$ est non nulle, donc $K = \mathrm{Bar}\{(E, 3), (F, 3)\}$ (F03) ; les coefficients étant égaux, K est l'isobarycentre de E et F.

Conclusion. Pour tout point M, $3\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{MF} = 6\overrightarrow{MK}$, et K est le milieu de $[EF]$.

4.

Conclure : la médiane (AI) coupe-t-elle le segment $[EF]$? En quel point ?

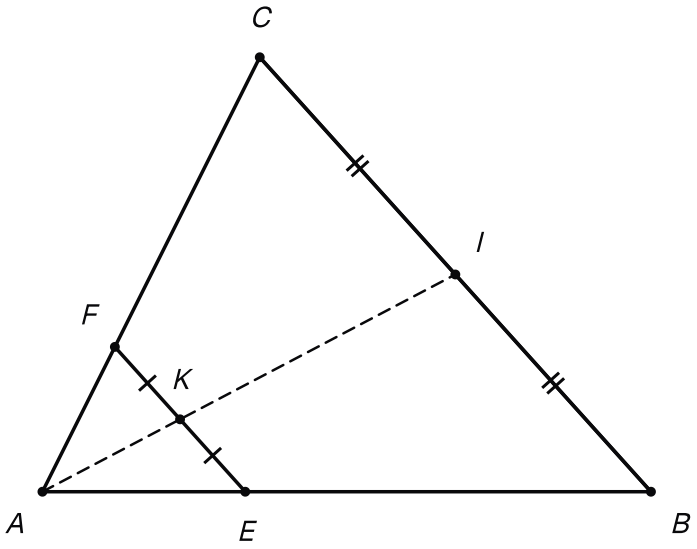
INDICE

Rassemble les questions 2 et 3.

CORRIGÉ

D'après la question 2, K appartient à la médiane (AI). D'après la question 3, K est le milieu de $[EF]$, donc un point du segment $[EF]$.

Conclusion. La médiane (AI) coupe le segment $[EF]$ en son milieu K.



La médiane (AI) coupe [EF] en son milieu K, et [EF] est parallèle à [BC].

Exercice 4

Trois droites, un point

Soit ABC un triangle. On définit trois points par $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

1.

Montrer que $P = \mathrm{Bar}\{(B,2),(C,3)\}$, $Q = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,3)\}$ et $R = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$.

INDICE

Calcule la relation de F02 pour chaque système proposé, et compare-la à la définition du point.

CORRIGÉ

Les sommes des coefficients sont non nulles : 5, 4 et 3. Chaque système a donc un barycentre, dont on compare la relation du barycentre de deux points (F02) à la définition du point.

- $G_1 = \mathrm{Bar}\{(B,2),(C,3)\}$ vérifie $\overrightarrow{BG_1} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP}$, donc $G_1 = P$.
- $G_2 = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,3)\}$ vérifie $\overrightarrow{AG_2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}$, donc $G_2 = Q$.
- $G_3 = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$ vérifie $\overrightarrow{AG_3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR}$, donc $G_3 = R$.

Conclusion. $P = \mathrm{Bar}\{(B,2),(C,3)\}$, $Q = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,3)\}$ et $R = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$.

2.

On note $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,3)\}$. Montrer que G appartient aux droites (AP), (BQ) et (CR).

INDICE

Pour la droite (AP), regroupe B et C ; procède de même pour les deux autres droites.

CORRIGÉ

La somme des coefficients vaut $1+2+3 = 6 \neq 0$: le point G existe. On applique trois fois l'associativité du barycentre (F10), avec la question 1.

- Avec P (somme partielle $2+3 = 5 \neq 0$) : $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(P,5)\}$, donc $G \in (AP)$.
- Avec Q (somme partielle $1+3 = 4 \neq 0$) : $G = \mathrm{Bar}\{(B,2),(Q,4)\}$, donc $G \in (BQ)$.
- Avec R (somme partielle $1+2 = 3 \neq 0$) : $G = \mathrm{Bar}\{(C,3),(R,3)\}$, donc $G \in (CR)$.

Chaque appartenance vient de la position du barycentre de deux points (F04).

Conclusion. Le point G appartient aux droites (AP), (BQ) et (CR) : ces trois droites sont concourantes en G.

3.

Préciser la position de G sur chacun des segments $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$.

INDICE

Applique F02 à chacun des trois systèmes réduits de la question 2.

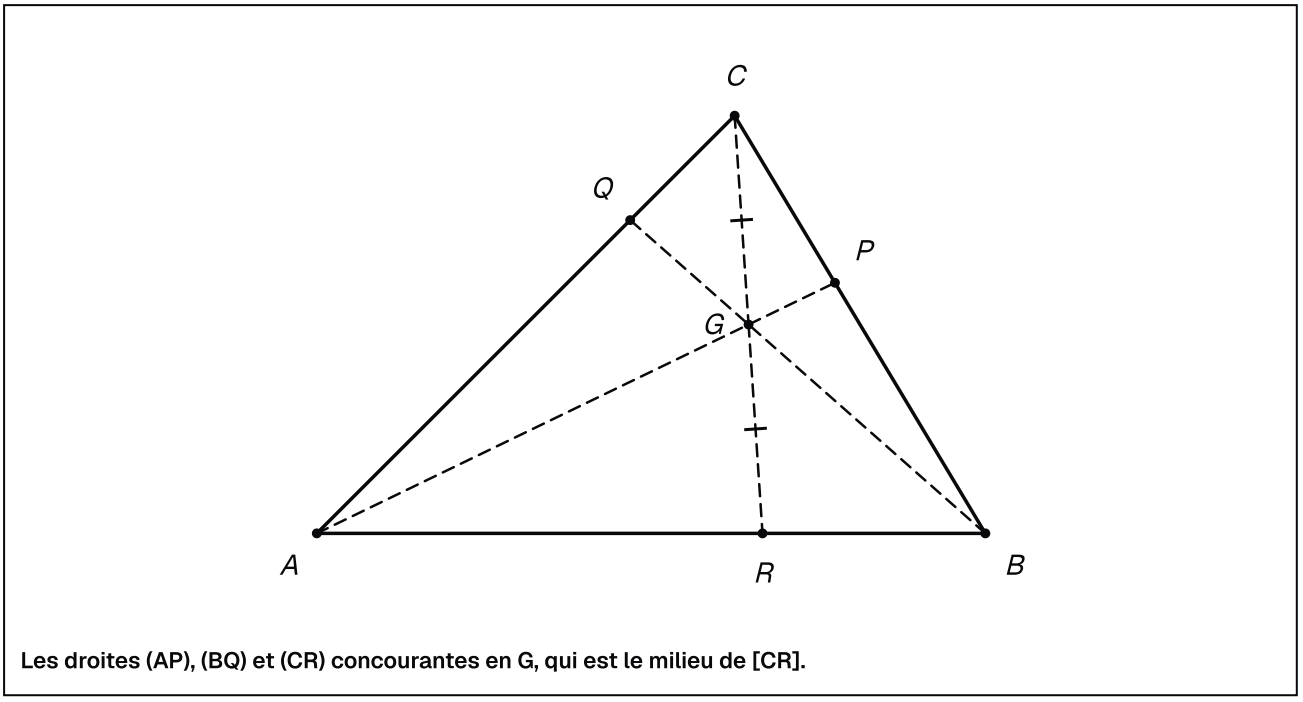
CORRIGÉ

On applique la relation du barycentre de deux points (F02) aux trois systèmes de la question 2, de somme 6 :

- $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AP}$;
- $\overrightarrow{BG} = \frac{4}{6}\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BQ}$;
- $\overrightarrow{CG} = \frac{3}{6}\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CR}$.

Les trois coefficients sont compris entre 0 et 1.

Conclusion. G est sur $[AP]$ aux cinq sixièmes à partir de A, sur $[BQ]$ aux deux tiers à partir de B, et c'est le milieu de $[CR]$.



Les droites (AP), (BQ) et (CR) concourantes en G, qui est le milieu de [CR].

Exercice 5

Deux normes égales

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. On note $E = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$, $H = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,-4)\}$, et G le centre de gravité du triangle.

1.

Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. En déduire que $E \neq H$.

INDICE

Si l'on avait $E = H$, que dirait-on des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

CORRIGÉ

Vecteurs. Les sommes valent $2+1=3$ et $1-4=-3$, non nulles. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AH} = \frac{-4}{-3}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Les points sont distincts. Raisonnons par l'absurde. Si l'on avait $E = H$, on aurait $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC}$: les points A, B, C seraient alignés, ce qui est exclu.

Conclusion. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $E \neq H$.

2.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC}\right\|$.

INDICE

Réduis chaque membre par la propriété caractéristique, puis compare les distances ME et MH.

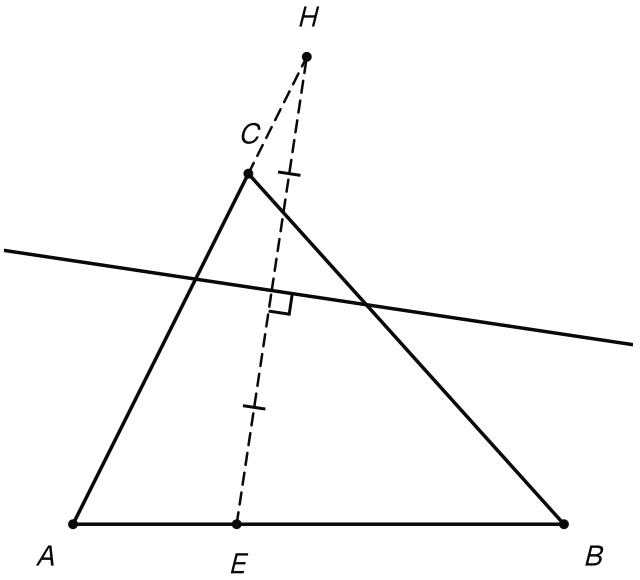
CORRIGÉ

Réductions. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), appliquée à E (somme 3) et à H (somme -3), pour tout point M :

$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{ME},$$
$$\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MH}.$$

Traduction. La condition s'écrit $3ME = |-3|MH$, soit $3ME = 3MH$, c'est-à-dire $ME = MH$.

Conclusion. Comme $E \neq H$ (question 1), $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment $[EH]$ (F15).



E au tiers de [AB], H au-delà de C sur la demi-droite [AC), et la médiatrice de [EH].

3.

Montrer que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$ pour tout point M.

INDICE

La somme des coefficients est nulle : prends $M = A$, puis utilise le milieu I.

CORRIGÉ

Vecteur constant. La somme des coefficients vaut $2 - 1 - 1 = 0$. D'après la propriété des sommes de coefficients nulles (F09), le vecteur ne dépend pas de M. En $M = A$, il vaut $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Milieu I. Le milieu I est le barycentre de $\{(B, 1), (C, 1)\}$. La propriété caractéristique (F08), écrite en $M = A$, donne $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Calcul. Pour tout point M :

$$\begin{aligned} &2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \\ &= -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= -2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IA}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout point M, $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{IA}$.

4.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$. Montrer que A appartient à Γ.

INDICE

Le premier membre vaut $3MG$. Rappelle-toi la position du centre de gravité sur la médiane $[AI]$.

CORRIGÉ

Réduction. Le centre de gravité G est le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$, de somme 3. D'après la propriété caractéristique (F08), pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

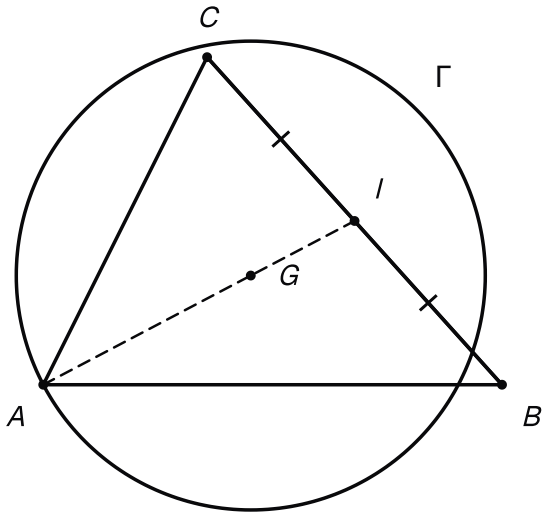
Traduction. Avec la question 3, la condition s'écrit $3MG = 2AI$, soit :

$$MG=\frac{2}{3}AI.$$

Comme A n'appartient pas à (BC), $AI>0$: d'après le lieu des points de norme constante (F14), Γ est un cercle de centre G.

Le point A. D'après la propriété du centre de gravité (F12), $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, donc $AG=\frac{2}{3}AI$.

Conclusion. Γ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}AI$, et le point A appartient à Γ.



Le cercle Γ de centre G, centre de gravité de ABC, passe par le sommet A.

Exercice 6

Une direction imposée

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $P(-1, 3)$ et $Q(5, 0)$, et le vecteur $\vec{w}(1, 3)$.

1.

Calculer les coordonnées du point $G = \mathrm{Bar}\{(P, 2), (Q, 1)\}$.

INDICE

Vérifie la somme des coefficients, puis applique les coordonnées du barycentre (F11).

CORRIGÉ

La somme des coefficients vaut $2 + 1 = 3 \neq 0$. D'après les coordonnées du barycentre (F11) :

$$x_G = \frac{2 \times (-1) + 5}{3} = 1,$$
$$y_G = \frac{2 \times 3 + 0}{3} = 2.$$

Conclusion. $G(1, 2)$.

2.

Déterminer l'ensemble Δ_1 des points M du plan tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires. En donner une équation cartésienne.

INDICE

Réduis la somme, puis écris la colinéarité de $\overrightarrow{GM}$ et $\vec{w}$ avec le déterminant.

CORRIGÉ

Réduction. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), pour tout point M, $2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = 3\overrightarrow{MG}$. Comme $3 \neq 0$, ce vecteur est colinéaire à $\vec{w}$ si et seulement si $\overrightarrow{GM}$ l'est.

Ensemble Δ_1. D'après le lieu des points de direction donnée (F16), Δ_1 est la droite passant par $G(1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1, 3)$.

Équation. Soit $M(x, y)$; alors $\overrightarrow{GM}(x - 1, y - 2)$. Ce vecteur est colinéaire à $\vec{w}(1, 3)$ si et seulement si leur déterminant est nul :

$$3(x - 1) - 1 \times (y - 2) = 0,$$

soit $3x - y - 1 = 0$.

Conclusion. Δ_1 est la droite passant par $G(1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{w}$; une équation cartésienne en est $3x - y - 1 = 0$.

3.

Les points O et $S(2,5)$ appartiennent-ils à Δ_1 ?

INDICE

Remplace les coordonnées dans l'équation de la question 2.

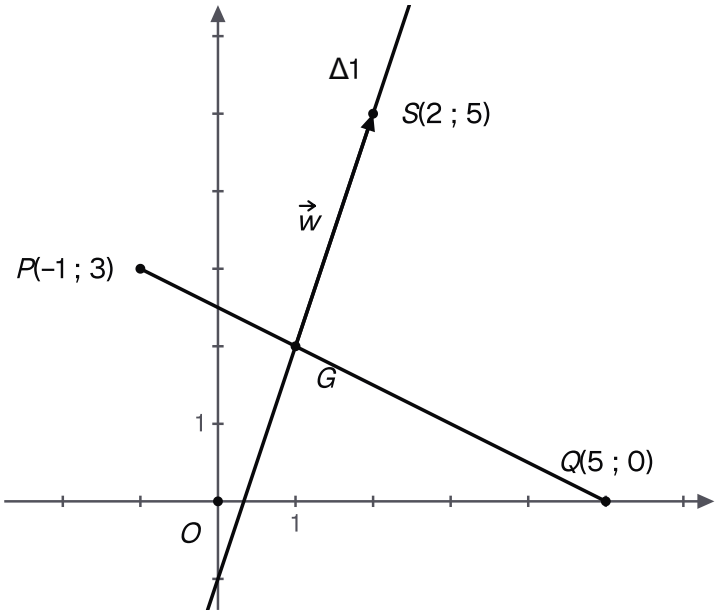
CORRIGÉ

On remplace les coordonnées dans l'équation $3x - y - 1 = 0$ de la question 2.

- Pour $O(0,0)$: $3 \times 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$, donc $O \notin \Delta_1$.
- Pour $S(2,5)$: $3 \times 2 - 5 - 1 = 0$, donc $S \in \Delta_1$.

Contrôle : $\overrightarrow{GS}(1,3)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{GS} = \vec{w}$.

Conclusion. Le point O n'appartient pas à Δ_1 ; le point S lui appartient.



La droite Δ1 passe par G et suit le vecteur w ; elle contient S mais pas l'origine O.

4.

Déterminer l'ensemble Δ_2 des points M du plan tels que $2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient colinéaires.

INDICE

Où se trouve G par rapport à la droite (PQ) ?

CORRIGÉ

Ensemble Δ_2. Les points P et Q sont distincts, donc $\overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}$. Comme à la question 2, la somme vaut $3\overrightarrow{MG}$, et d'après F16, Δ_2 est la droite passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{PQ}$.

Position de G. Le point G est un barycentre de P et Q : d'après la position du barycentre de deux points (F04), il appartient à la droite (PQ).

Conclusion. La droite passant par G et dirigée par $\overrightarrow{PQ}$ est la droite (PQ) elle-même : $\Delta_2 = (PQ)$.

Exercice 7

Des coordonnées à l'alignement

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $A(-4, 1)$, $B(2, 4)$ et $C(3, -2)$, puis les points $E = \mathrm{Bar}\{(A, 2), (B, 1)\}$, $F = \mathrm{Bar}\{(B, -1), (C, 3)\}$ et $H = \mathrm{Bar}\{(A, 2), (C, 3)\}$.

1.

Calculer les coordonnées de E, F et H.

INDICE

Vérifie chaque somme de coefficients avant de diviser.

CORRIGÉ

Les sommes des coefficients valent 3, 2 et 5, non nulles. D'après les coordonnées du barycentre (F11) :

- $E\left(\dfrac{-8+2}{3}, \dfrac{2+4}{3}\right)$, soit $E(-2, 2)$;
- $F\left(\dfrac{-2+9}{2}, \dfrac{-4-6}{2}\right)$, soit $F\left(\dfrac{7}{2}, -5\right)$;
- $H\left(\dfrac{-8+9}{5}, \dfrac{2-6}{5}\right)$, soit $H\left(\dfrac{1}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$.

Conclusion. $E(-2, 2)$, $F\left(\dfrac{7}{2}, -5\right)$ et $H\left(\dfrac{1}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$.

2.

Montrer que les points E, F et H sont alignés, et exprimer $\overrightarrow{EH}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

INDICE

Calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$.

CORRIGÉ

Vecteurs. On a $\overrightarrow{EF}\left(\frac{11}{2}, -7\right)$ et $\overrightarrow{EH}\left(\frac{11}{5}, -\frac{14}{5}\right)$.

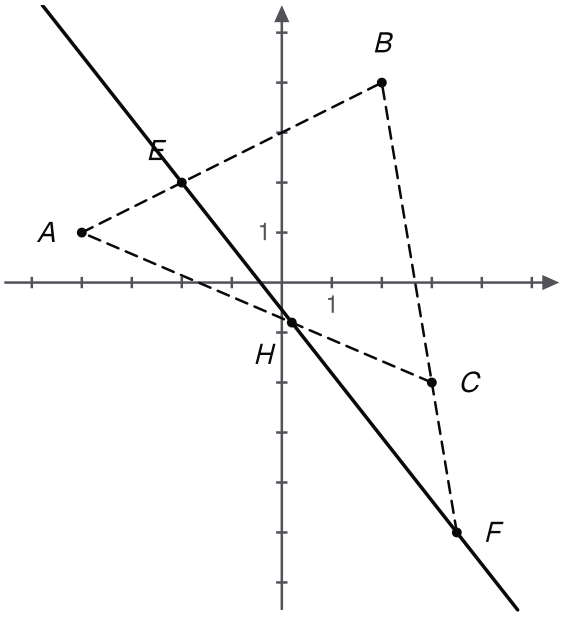
Déterminant. Le déterminant de ces deux vecteurs vaut :

$$\begin{aligned} &\frac{11}{2} \times \left(-\frac{14}{5}\right) \\ &\quad - (-7) \times \frac{11}{5} \\ &= -\frac{77}{5} + \frac{77}{5} = 0. \end{aligned}$$

Les vecteurs sont colinéaires : les points E, F et H sont alignés.

Coefficient. On a $\frac{2}{5} \times \frac{11}{2} = \frac{11}{5}$ et $\frac{2}{5} \times (-7) = -\frac{14}{5}$.

Conclusion. Les points E, F et H sont alignés, et $\overrightarrow{EH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$.



Les points E, H et F alignés, H étant entre E et F aux deux cinquièmes de [EF] en partant de E.

3.

Retrouver ce résultat sans coordonnées : montrer que $H = \mathrm{Bar}\{(E,3),(F,2)\}$.

INDICE

Écris la propriété caractéristique pour E et pour F, additionne, puis prends $M = H$.

CORRIGÉ

Réductions. Soit M un point du plan. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), appliquée à E (somme 3) et à F (somme 2) :

$$3\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB},$$
$$2\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}.$$

Somme. En additionnant, puis en appliquant F08 à H, de somme 5 :

$$\begin{aligned} &3\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MF} \\ &= 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} \\ &= 5\overrightarrow{MH}. \end{aligned}$$

Choix de M. En $M = H$: $3\overrightarrow{HE} + 2\overrightarrow{HF} = \vec{0}$. La somme $3 + 2 = 5$ est non nulle, donc $H = \mathrm{Bar}\{(E,3),(F,2)\}$ (F03).

Conclusion. $H = \mathrm{Bar}\{(E,3),(F,2)\}$. D'après la caractérisation d'une droite par les barycentres (F13), E, F et H sont alignés, et F02 redonne $\overrightarrow{EH} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{EF}$.