BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Application	8

Exercice 1

Existe-t-il un barycentre ?

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 6$ cm. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Pour chacun des systèmes suivants, dire s'il admet un barycentre :

- a) $\{(A, 3), (B, 2)\}$;
- b) $\{(A, -4), (B, 4)\}$;
- c) $\{(A, 5), (B, -2)\}$.

INDICE

Un système de deux points pondérés a un barycentre exactement quand la somme de ses coefficients est non nulle.

2.

On note $G = \mathrm{Bar}\{(A, 3), (B, 2)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, calculer la distance AG et placer G .

INDICE

Applique la relation du barycentre de deux points (F02) avec $\alpha = 3$ et $\beta = 2$: le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ est $\dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$.

3.

On note $K = \mathrm{Bar}\{(A, 5), (B, -2)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis placer K.

INDICE

Le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ est négatif : le point K part de A dans le sens opposé à B.

4.

Montrer qu'aucun point M du plan ne vérifie $-4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

INDICE

Insère le point A dans $\overrightarrow{MB}$ par la relation de Chasles.

Exercice 2

Dedans ou dehors ?

Soit A et B deux points distincts du plan.

1.

Pour chacun des systèmes suivants, on note G son barycentre. Donner le réel t tel que $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$, puis dire si G appartient au segment $[AB]$.

- a) $\{(A, 2), (B, 7)\}$;
- b) $\{(A, -3), (B, 1)\}$;
- c) $\{(A, -1), (B, -4)\}$;
- d) $\{(A, 6), (B, 0)\}$.

INDICE

Vérifie d'abord que la somme des coefficients est non nulle, puis calcule $t = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$ et le signe de $\alpha\beta$.

2.

Déterminer le réel α tel que le barycentre G de $\{(A, \alpha), (B, 2)\}$ existe et vérifie $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Écris la condition $\dfrac{2}{\alpha + 2} = 3$, sans oublier la condition $\alpha + 2 \neq 0$.

Exercice 3

Multiplier les coefficients

Soit A, B et C trois points du plan, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,-3),(C,5)\}$.

1.

Justifier l'existence de G, puis montrer que $G = \mathrm{Bar}\left\{\left(A,\frac{1}{2}\right),\left(B,-\frac{3}{4}\right),\left(C,\frac{5}{4}\right)\right\}$.

INDICE

Par quel réel non nul faut-il multiplier les coefficients 2, -3 et 5 ?

2.

Montrer que $G = \mathrm{Bar}\{(A,-6),(B,9),(C,-15)\}$.

INDICE

Compare chaque nouveau coefficient à l'ancien.

3.

Dans un repère, on donne $A(0,3)$, $B(4,1)$ et $C(-2,-1)$. Calculer les coordonnées de G avec les coefficients de la question 1.

INDICE

Avec des coefficients de somme 1, il n'y a plus de division : $x_G = \frac{1}{2}x_A - \frac{3}{4}x_B + \frac{5}{4}x_C$.

4.

Un élève ajoute 1 à chaque coefficient et affirme que $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,-2),(C,6)\}$. Vérifier en coordonnées que c'est faux.

INDICE

Calcule les coordonnées du barycentre G' de $\{(A,3),(B,-2),(C,6)\}$ et compare-les à celles de G.

Exercice 4

Trois points, en partant de A

Soit ABC un triangle, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,3),(C,-2)\}$.

1.

Justifier l'existence de G.

INDICE

Additionne les trois coefficients.

2.

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Pars de $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et insère le point A dans $\overrightarrow{GB}$ et dans $\overrightarrow{GC}$.

3.

Décrire une construction de G à partir du point A.

INDICE

Lis $\overrightarrow{AG}$ comme un trajet depuis A, en deux déplacements successifs.

4.

Le système $\{(A,1),(B,3),(C,-4)\}$ admet-il un barycentre ? Justifier, puis montrer que $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant non nul.

INDICE

Calcule la somme des coefficients ; pour le vecteur, prends $M = A$, puis utilise que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 5

Réduire trois sommes vectorielles

Soit RST un triangle. Dans chaque question, M désigne un point quelconque du plan.

1.

Réduire la somme $3\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MT}$.

INDICE

Calcule la somme des coefficients, puis introduis le barycentre du système.

2.

Réduire la somme $2\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} - 3\overrightarrow{MT}$.

INDICE

Ici, la somme des coefficients est nulle : choisis pour M l'un des trois points.

3.

Réduire la somme $\overrightarrow{MR} - 4\overrightarrow{MS}$, et situer le point introduit sur la droite (RS).

INDICE

La somme des coefficients est négative : le facteur devant $\overrightarrow{MH}$ l'est aussi.

Exercice 6

Coordonnées dans un repère

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $E(-3, 2)$, $F(4, -1)$ et $K(1, 5)$.

1.

Calculer les coordonnées du point $G = \mathrm{Bar}\{(E, 2), (F, 3), (K, -1)\}$.

INDICE

Vérifie que la somme des coefficients est non nulle, puis divise chaque moyenne pondérée par cette somme.

2.

Calculer les coordonnées du milieu I de $[EF]$ et du centre de gravité L du triangle EFK.

INDICE

Le milieu est l'isobarycentre de deux points, le centre de gravité celui des trois sommets.

3.

Contrôler le résultat de la question 1 en calculant $2\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GK}$.

INDICE

Calcule les coordonnées des trois vecteurs issus de G.

Exercice 7

Un barycentre partiel

Soit ABC un triangle, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,2),(C,1)\}$.

1.

On note I le milieu de $[AB]$. Montrer que $G = \mathrm{Bar}\{(I,4),(C,1)\}$, puis exprimer $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{IC}$.

INDICE

Le milieu I est le barycentre de $\{(A,2),(B,2)\}$: quelle est la somme de ces deux coefficients ?

2.

En déduire que G appartient à la médiane du triangle issue de C, et préciser sa position.

INDICE

La médiane issue de C est la droite (CI).

3.

On note $J = \mathrm{Bar}\{(A,2),(C,1)\}$. Montrer que $G = \mathrm{Bar}\{(J,3),(B,2)\}$ et en déduire $\overrightarrow{JG}$ en fonction de $\overrightarrow{JB}$.

INDICE

Même raisonnement qu'à la question 1, avec un autre regroupement.

Exercice 8

Un cercle, un point ou rien

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 5$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,4)\}$.

1.

Calculer AG, puis réduire $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}$ pour tout point M.

INDICE

La relation du barycentre de deux points (F02) donne $\overrightarrow{AG}$; la propriété caractéristique (F08) donne la réduction.

2.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\right\| = 10$. Le point B appartient-il à $\mathcal{E}_1$?

INDICE

Remplace la somme par $5\overrightarrow{MG}$: la condition porte alors sur la distance MG.

3.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = 12$.

INDICE

La somme des coefficients est nulle : calcule le vecteur constant et sa norme.

4.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_3$ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\right\| = 0$.

INDICE

Un vecteur a une norme nulle si et seulement s'il est nul.