BURHAN

Le barycentre dans le plan : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Le barycentre dans le plan	Application	8

Exercice 1

Existe-t-il un barycentre ?

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 6$ cm. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Pour chacun des systèmes suivants, dire s'il admet un barycentre :

- a) $\{(A, 3), (B, 2)\}$;
- b) $\{(A, -4), (B, 4)\}$;
- c) $\{(A, 5), (B, -2)\}$.

INDICE

Un système de deux points pondérés a un barycentre exactement quand la somme de ses coefficients est non nulle.

CORRIGÉ

Un système de deux points pondérés admet un barycentre lorsque la somme de ses coefficients est non nulle (F02, existence du barycentre de deux points), et n'en admet aucun lorsqu'elle est nulle (F09, somme des coefficients nulle). On calcule donc chaque somme.

- a) $3 + 2 = 5 \neq 0$: le système admet un barycentre.
- b) $-4 + 4 = 0$: le système n'admet aucun barycentre.
- c) $5 + (-2) = 3 \neq 0$: le système admet un barycentre.

Conclusion. Les systèmes a) et c) admettent un barycentre ; le système b) n'en admet aucun.

2.

On note $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,2)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, calculer la distance AG et placer G .

INDICE

Applique la relation du barycentre de deux points (F02) avec $\alpha = 3$ et $\beta = 2$: le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ est $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{AG}$. La somme des coefficients vaut $3 + 2 = 5 \neq 0$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

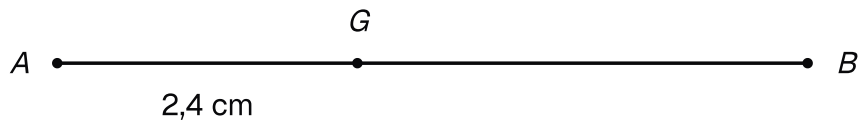
$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Distance AG. En passant aux longueurs, avec $AB = 6$ cm :

$$AG = \frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Placement. Les coefficients sont de même signe, car $3 \times 2 > 0$. D'après la position du barycentre de deux points (F04), G appartient au segment $[AB]$: on le place sur $[AB]$, à $2{,}4$ cm de A.

Conclusion. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $AG = 2{,}4$ cm, et G est le point du segment $[AB]$ situé à $2{,}4$ cm de A.



G placé sur [AB] à 2,4 cm de A, du côté de B.

3.

On note $K = \mathrm{Bar}\{(A,5),(B,-2)\}$. Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis placer K.

INDICE

Le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ est négatif : le point K part de A dans le sens opposé à B.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{AK}$. La somme des coefficients vaut $5 + (-2) = 3 \neq 0$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

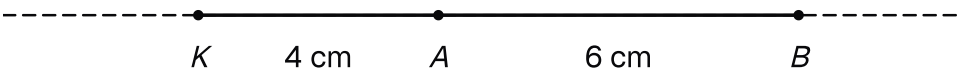
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Distance AK. En passant aux longueurs :

$$AK = \frac{2}{3} \times 6 = 4.$$

Placement. Le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ est négatif : K est sur la droite (AB), du côté de A opposé à B. Comme $5 \times (-2) < 0$, la position du barycentre de deux points (F04) confirme que K n'appartient pas à $[AB]$.

Conclusion. $\overrightarrow{AK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$: on place K sur la droite (AB), à 4 cm de A, du côté opposé à B.



K hors du segment, à 4 cm de A, du côté opposé à B.

4.

Montrer qu'aucun point M du plan ne vérifie $-4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

INDICE

Insère le point A dans $\overrightarrow{MB}$ par la relation de Chasles.

CORRIGÉ

On montre que la somme $-4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}$ est le même vecteur non nul pour tout point M.

Réduction. Soit M un point du plan. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\begin{aligned}&-4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\\&=-4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}\\&=4\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Non-nullité. Comme $AB=6$ cm, les points A et B sont distincts, donc $4\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$.

Conclusion. Pour tout point M du plan, $-4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$: aucun point M ne vérifie l'égalité. C'est ce qu'annonçait la somme nulle de la question 1. b).

Exercice 2

Dedans ou dehors ?

Soit A et B deux points distincts du plan.

1.

Pour chacun des systèmes suivants, on note G son barycentre. Donner le réel t tel que $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$, puis dire si G appartient au segment $[AB]$.

- a) $\{(A, 2), (B, 7)\}$;
- b) $\{(A, -3), (B, 1)\}$;
- c) $\{(A, -1), (B, -4)\}$;
- d) $\{(A, 6), (B, 0)\}$.

INDICE

Vérifie d'abord que la somme des coefficients est non nulle, puis calcule $t = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$ et le signe de $\alpha\beta$.

CORRIGÉ

Méthode. Les quatre sommes de coefficients sont non nulles : 9, -2, -5 et 6. Chaque barycentre existe donc, et la relation du barycentre de deux points (F02) donne :

$$t = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

D'après la position du barycentre de deux points (F04), G appartient à $[AB]$ si et seulement si $\alpha\beta \geq 0$.

Les quatre cas.

- a) $t = \dfrac{7}{9}$ et $2 \times 7 > 0$: G appartient à $[AB]$.
- b) $t = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$ et $(-3) \times 1 < 0$: G n'appartient pas à $[AB]$. Il est sur la droite (AB), du côté de A opposé à B.
- c) $t = \dfrac{-4}{-5} = \dfrac{4}{5}$ et $(-1) \times (-4) > 0$: G appartient à $[AB]$.
- d) $t = \dfrac{0}{6} = 0$, donc $G = A$ (F04) : G appartient à $[AB]$.

Conclusion. Le barycentre appartient au segment $[AB]$ dans les cas a), c) et d), et n'y appartient pas dans le cas b).

2.

Déterminer le réel α tel que le barycentre G de $\{(A,\alpha),(B,2)\}$ existe et vérifie $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$.

INDICE

Écris la condition $\dfrac{2}{\alpha+2}=3$, sans oublier la condition $\alpha+2\neq 0$.

CORRIGÉ

Existence. Le barycentre G de $\{(A,\alpha),(B,2)\}$ existe si et seulement si $\alpha+2\neq 0$. On suppose cette condition remplie. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{\alpha+2}\overrightarrow{AB}.$$

Équation. Comme $A\neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est non nul : deux multiples de $\overrightarrow{AB}$ sont égaux si et seulement si leurs coefficients le sont. La condition $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\alpha+2}=3 &\iff \alpha+2=\frac{2}{3}\\ &\iff \alpha=-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Contrôle. Pour cette valeur, $\alpha+2=\dfrac{2}{3}\neq 0$: le barycentre existe. De plus, $\alpha\times 2<0$, donc G est hors de $[AB]$ (F04), ce qui convient à $t=3$. En multipliant les coefficients par 3, l'homogénéité (F07) donne aussi $G=\mathrm{Bar}\{(A,-4),(B,6)\}$.

Conclusion. Le réel cherché est $\alpha=-\dfrac{4}{3}$.

Exercice 3

Multiplier les coefficients

Soit A, B et C trois points du plan, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,-3),(C,5)\}$.

1.

Justifier l'existence de G, puis montrer que $G = \mathrm{Bar}\left\{\left(A,\frac{1}{2}\right),\left(B,-\frac{3}{4}\right),\left(C,\frac{5}{4}\right)\right\}$.

INDICE

Par quel réel non nul faut-il multiplier les coefficients 2, -3 et 5 ?

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $2-3+5=4\neq 0$. D'après l'existence du barycentre de trois points (F05), le point G existe.

Changement de coefficients. On multiplie chaque coefficient par le réel non nul $k=\frac{1}{4}$:

- $2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;
- $-3\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$;
- $5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

D'après l'homogénéité du barycentre (F07), le barycentre ne change pas.

Conclusion. G existe, et c'est aussi le barycentre du système de coefficients $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{4}$, dont la somme vaut 1.

2.

Montrer que $G = \mathrm{Bar}\{(A,-6),(B,9),(C,-15)\}$.

INDICE

Compare chaque nouveau coefficient à l'ancien.

CORRIGÉ

Les nouveaux coefficients sont les anciens multipliés par $k=-3$:

- $-6=-3\times 2$;
- $9=-3\times(-3)$;
- $-15=-3\times 5$.

Comme $k\neq 0$, l'homogénéité du barycentre (F07) s'applique ; la nouvelle somme vaut $-12\neq 0$.

Conclusion. $G = \mathrm{Bar}\{(A,-6),(B,9),(C,-15)\}$.

3.

Dans un repère, on donne $A(0,3)$, $B(4,1)$ et $C(-2,-1)$. Calculer les coordonnées de G avec les coefficients de la question 1.

INDICE

Avec des coefficients de somme 1, il n'y a plus de division : $x_G = \frac{1}{2}x_A - \frac{3}{4}x_B + \frac{5}{4}x_C$.

CORRIGÉ

Abscisse. La somme des coefficients vaut 1 : il n'y a pas de division. D'après les coordonnées du barycentre (F11) :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{2}\times 0 - \frac{3}{4}\times 4 \\ &\quad + \frac{5}{4}\times(-2) \\ &= -3 - \frac{5}{2} = -\frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Ordonnée. De même :

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{2}\times 3 - \frac{3}{4}\times 1 \\ &\quad + \frac{5}{4}\times(-1) \\ &= \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Contrôle. Avec les coefficients 2, -3 et 5, de somme 4 :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{0 - 12 - 10}{4} = -\frac{11}{2}, \\ y_G &= \frac{6 - 3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $G\left(-\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

4.

Un élève ajoute 1 à chaque coefficient et affirme que $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,-2),(C,6)\}$. Vérifier en coordonnées que c'est faux.

INDICE

Calcule les coordonnées du barycentre G' de $\{(A,3),(B,-2),(C,6)\}$ et compare-les à celles de G.

CORRIGÉ

Barycentre du nouveau système. La somme des coefficients vaut $3-2+6=7\neq 0$: le système admet un barycentre G'. D'après les coordonnées du barycentre (F11) :

$$x_{G'} = \frac{0-8-12}{7} = -\frac{20}{7},$$
$$y_{G'} = \frac{9-2-6}{7} = \frac{1}{7}.$$

Comparaison. D'après la question 3, $x_G = -\dfrac{11}{2}$. Or $-\dfrac{11}{2} \neq -\dfrac{20}{7}$, car $-77 \neq -40$ après multiplication par 14. Donc $G' \neq G$.

Conclusion. L'affirmation de l'élève est fausse. L'homogénéité permet de **multiplier** les coefficients par un même réel non nul, jamais de leur **ajouter** un même nombre.

Exercice 4

Trois points, en partant de A

Soit ABC un triangle, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,3),(C,-2)\}$.

1.

Justifier l'existence de G.

INDICE

Additionne les trois coefficients.

CORRIGÉ

La somme des coefficients vaut $1+3-2=2\neq 0$. D'après l'existence et l'unicité du barycentre de trois points (F05), le système admet un unique barycentre.

Conclusion. Le point G existe.

2.

Montrer que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Pars de $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et insère le point A dans $\overrightarrow{GB}$ et dans $\overrightarrow{GC}$.

CORRIGÉ

Relation de définition. Par définition du barycentre G :

$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Introduction du point A. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}$. En remplaçant :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}\\&\quad-2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0},\end{aligned}$$

soit, en regroupant les termes en $\overrightarrow{GA}$:

$$2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$$

Expression de $\overrightarrow{AG}$. Comme $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}$, on obtient $2\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$, puis, en divisant par 2 :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. C'est la relation du barycentre de trois points (F05), avec $s=2$.

3.

Décrire une construction de G à partir du point A.

INDICE

Lis $\overrightarrow{AG}$ comme un trajet depuis A, en deux déplacements successifs.

CORRIGÉ

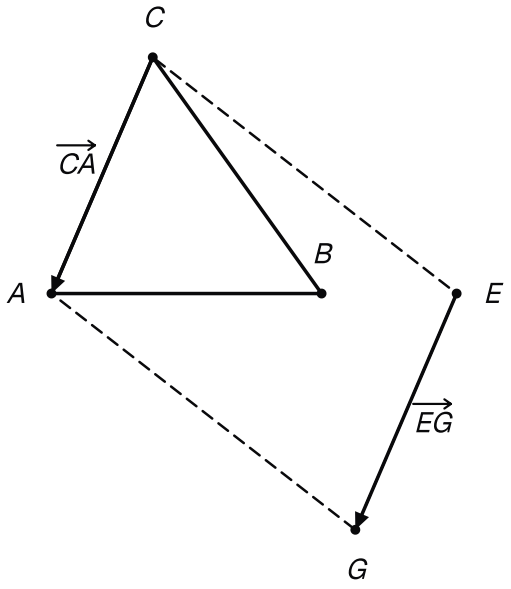
Premier déplacement. On place le point E de la demi-droite $[AB)$ tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$: B est entre A et E, et $AE = \frac{3}{2}AB$.

Second déplacement. D'après la question 2, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE}$, donc :

$$\overrightarrow{EG} = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}.$$

On place G en reportant le vecteur $\overrightarrow{CA}$ à partir de E.

Conclusion. On construit E sur $[AB)$ avec $AE = \frac{3}{2}AB$, puis G tel que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{CA}$: le quadrilatère $ACEG$ est alors un parallélogramme.



Construction de G en deux temps : E sur la demi-droite [AB) avec AE égal à trois demis de AB, puis le vecteur CA reporté depuis E.

4.

Le système $\{(A,1),(B,3),(C,-4)\}$ admet-il un barycentre ? Justifier, puis montrer que $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant non nul.

INDICE

Calcule la somme des coefficients ; pour le vecteur, prends $M=A$, puis utilise que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $1+3-4=0$: d'après la propriété des sommes de coefficients nulles (F09), le système n'admet aucun barycentre.

Vecteur constant. D'après F09, le vecteur $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}$ ne dépend pas de M. En $M=A$, où $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, il vaut :

$$\vec{u}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}.$$

Non-nullité. Raisonnons par l'absurde. Si l'on avait $\vec{u}=\vec{0}$, on aurait $\overrightarrow{AB}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ seraient colinéaires, et les points A, B, C alignés, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $\vec{u}\neq\vec{0}$.

Conclusion. Le système n'admet pas de barycentre et, pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}=\vec{u}$, vecteur constant non nul.

Exercice 5

Réduire trois sommes vectorielles

Soit RST un triangle. Dans chaque question, M désigne un point quelconque du plan.

1.

Réduire la somme $3\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MT}$.

INDICE

Calcule la somme des coefficients, puis introduis le barycentre du système.

CORRIGÉ

La somme des coefficients vaut $s = 3 - 1 + 2 = 4 \neq 0$. On introduit $G = \mathrm{Bar}\{(R,3),(S,-1),(T,2)\}$. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), pour tout point M :

$$\begin{aligned} &3\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MT} \\ &= 4\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout point M, la somme vaut $4\overrightarrow{MG}$, où G est le barycentre de $\{(R,3),(S,-1),(T,2)\}$.

2.

Réduire la somme $2\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} - 3\overrightarrow{MT}$.

INDICE

Ici, la somme des coefficients est nulle : choisis pour M l'un des trois points.

CORRIGÉ

La somme des coefficients vaut $2 + 1 - 3 = 0$: aucun barycentre ne peut être introduit. D'après la propriété des sommes de coefficients nulles (F09), la somme ne dépend pas de M. On la calcule en $M = R$, où $\overrightarrow{RR} = \vec{0}$. Pour tout point M :

$$\begin{aligned} &2\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} - 3\overrightarrow{MT} \\ &= \overrightarrow{RS} - 3\overrightarrow{RT}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout point M, la somme est égale au vecteur constant $\overrightarrow{RS} - 3\overrightarrow{RT}$.

3.

Réduire la somme $\overrightarrow{MR} - 4\overrightarrow{MS}$, et situer le point introduit sur la droite (RS).

INDICE

La somme des coefficients est négative : le facteur devant $\overrightarrow{MH}$ l'est aussi.

CORRIGÉ

Réduction. La somme des coefficients vaut $s = 1 - 4 = -3 \neq 0$. Soit $H = \mathrm{Bar}\{(R, 1), (S, -4)\}$.

D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), pour tout point M :

$$\overrightarrow{MR} - 4\overrightarrow{MS} = -3\overrightarrow{MH}.$$

Position de H. D'après la relation du barycentre de deux points (F02) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RH} &= \frac{-4}{-3}\overrightarrow{RS} \\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{RS}.\end{aligned}$$

Le coefficient $\dfrac{4}{3}$ est supérieur à 1.

Conclusion. Pour tout point M, $\overrightarrow{MR} - 4\overrightarrow{MS} = -3\overrightarrow{MH}$, et H est sur la droite (RS), au-delà de S.

Exercice 6

Coordonnées dans un repère

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $E(-3, 2)$, $F(4, -1)$ et $K(1, 5)$.

1.

Calculer les coordonnées du point $G = \mathrm{Bar}\{(E, 2), (F, 3), (K, -1)\}$.

INDICE

Vérifie que la somme des coefficients est non nulle, puis divise chaque moyenne pondérée par cette somme.

CORRIGÉ

La somme des coefficients vaut $2 + 3 - 1 = 4 \neq 0$. D'après les coordonnées du barycentre (F11) :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{2 \times (-3) + 3 \times 4 - 1}{4} \\ &= \frac{-6 + 12 - 1}{4} = \frac{5}{4}, \\ y_G &= \frac{2 \times 2 + 3 \times (-1) - 5}{4} \\ &= \frac{4 - 3 - 5}{4} = -1. \end{aligned}$$

Conclusion. $G\left(\frac{5}{4}, -1\right)$.

2.

Calculer les coordonnées du milieu I de $[EF]$ et du centre de gravité L du triangle EFK.

INDICE

Le milieu est l'isobarycentre de deux points, le centre de gravité celui des trois sommets.

CORRIGÉ

Milieu I. Le milieu I est l'isobarycentre de E et F (F03). D'après les coordonnées du barycentre (F11), avec deux coefficients égaux à 1 :

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{-3 + 4}{2} = \frac{1}{2}, \\ y_I &= \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Centre de gravité L. Le point L est l'isobarycentre de E, F et K (F06). De même :

$$\begin{aligned} x_L &= \frac{-3 + 4 + 1}{3} = \frac{2}{3}, \\ y_L &= \frac{2 - 1 + 5}{3} = 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

3.

Contrôler le résultat de la question 1 en calculant $2\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GK}$.

INDICE

Calcule les coordonnées des trois vecteurs issus de G.

CORRIGÉ

Vecteurs issus de G. Avec $G\left(\frac{5}{4}, -1\right)$:

- $\overrightarrow{GE}\left(-\frac{17}{4}, 3\right)$;
- $\overrightarrow{GF}\left(\frac{11}{4}, 0\right)$;
- $\overrightarrow{GK}\left(-\frac{1}{4}, 6\right)$.

Combinaison. L'abscisse de $2\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GK}$ vaut

$$-\frac{34}{4} + \frac{33}{4} + \frac{1}{4} = 0,$$

et son ordonnée vaut $6 + 0 - 6 = 0$.

Conclusion. $2\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GK} = \vec{0}$: le point G vérifie la relation qui définit le barycentre de $\{(E, 2), (F, 3), (K, -1)\}$, ce qui confirme le résultat de la question 1.

Exercice 7

Un barycentre partiel

Soit ABC un triangle, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,2),(C,1)\}$.

1.

On note I le milieu de $[AB]$. Montrer que $G = \mathrm{Bar}\{(I,4),(C,1)\}$, puis exprimer $\overrightarrow{IG}$ en fonction de $\overrightarrow{IC}$.

INDICE

Le milieu I est le barycentre de $\{(A,2),(B,2)\}$: quelle est la somme de ces deux coefficients ?

CORRIGÉ

Existence. La somme des coefficients vaut $2+2+1=5\neq 0$: le point G existe (F05).

Barycentre partiel. La somme partielle $2+2=4$ est non nulle et les deux coefficients sont égaux : $\mathrm{Bar}\{(A,2),(B,2)\}$ est l'isobarycentre de A et B (F03), c'est-à-dire le milieu I. D'après l'associativité du barycentre (F10), on remplace $(A,2)$ et $(B,2)$ par $(I,4)$:

$$G = \mathrm{Bar}\{(I,4),(C,1)\}.$$

Vecteur $\overrightarrow{IG}$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02), avec la somme $4+1=5$:

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IC}.$$

Conclusion. $G = \mathrm{Bar}\{(I,4),(C,1)\}$ et $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IC}$.

2.

En déduire que G appartient à la médiane du triangle issue de C, et préciser sa position.

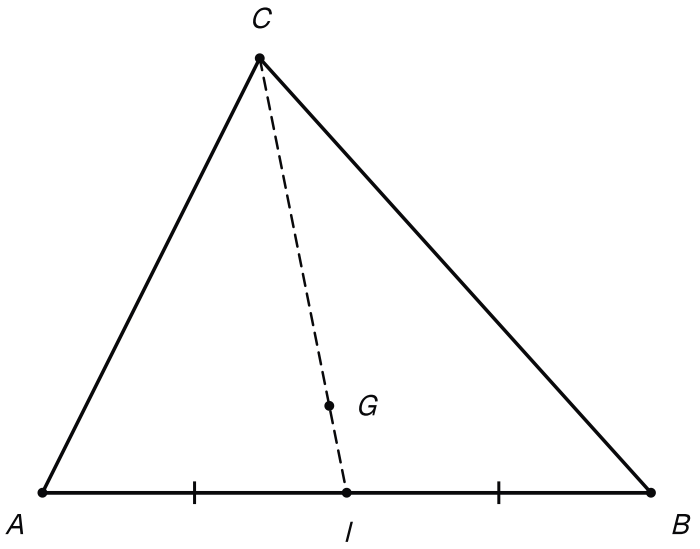
INDICE

La médiane issue de C est la droite (CI).

CORRIGÉ

D'après la question 1, $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires : les points I, G et C sont alignés. Comme $0 \leq \frac{1}{5} \leq 1$, le point G est même sur le segment $[IC]$.

Conclusion. G appartient à la médiane (CI) issue de C : il est sur le segment $[IC]$, au cinquième de ce segment à partir de I.



G sur la médiane [CI], au cinquième du segment en partant du milieu I de [AB].

3.

On note $J = \mathrm{Bar}\{(A,2),(C,1)\}$. Montrer que $G = \mathrm{Bar}\{(J,3),(B,2)\}$ et en déduire $\overrightarrow{JG}$ en fonction de $\overrightarrow{JB}$.

INDICE

Même raisonnement qu'à la question 1, avec un autre regroupement.

CORRIGÉ

Barycentre partiel. La somme partielle $2+1=3$ est non nulle : J existe, et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ d'après la relation du barycentre de deux points (F02). D'après l'associativité du barycentre (F10), on remplace $(A,2)$ et $(C,1)$ par $(J,3)$:

$$G = \mathrm{Bar}\{(J,3),(B,2)\}.$$

Vecteur $\overrightarrow{JG}$. D'après F02, avec la somme $3+2=5$:

$$\overrightarrow{JG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{JB}.$$

Conclusion. $G = \mathrm{Bar}\{(J,3),(B,2)\}$ et $\overrightarrow{JG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{JB}$: le point G est donc aussi sur la droite (BJ).

Exercice 8

Un cercle, un point ou rien

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 5$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,4)\}$.

1.

Calculer AG, puis réduire $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}$ pour tout point M.

INDICE

La relation du barycentre de deux points (F02) donne $\overrightarrow{AG}$; la propriété caractéristique (F08) donne la réduction.

CORRIGÉ

Distance AG. La somme des coefficients vaut $1 + 4 = 5 \neq 0$. D'après la relation du barycentre de deux points (F02), $\overrightarrow{AG} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$, donc :

$$AG = \frac{4}{5} \times 5 = 4.$$

Réduction. D'après la propriété caractéristique du barycentre (F08), pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}.$$

Conclusion. $AG = 4$ et, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$.

2.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=10$. Le point B appartient-il à $\mathcal{E}_1$?

INDICE

Remplace la somme par $5\overrightarrow{MG}$: la condition porte alors sur la distance MG.

CORRIGÉ

Traduction de la condition. Soit M un point du plan. D'après la question 1 :

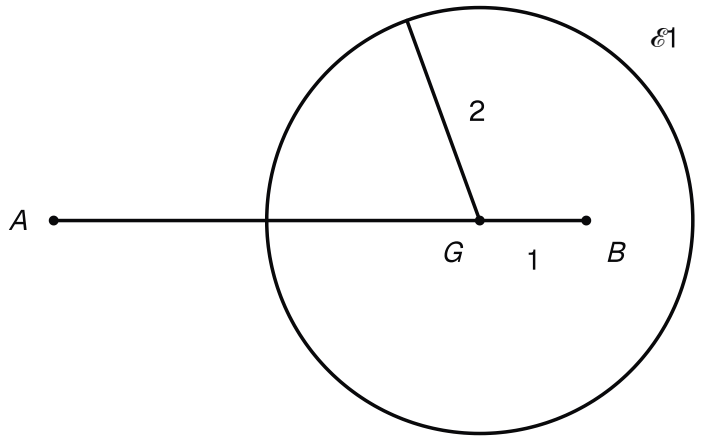
$$\left\|\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|=5MG.$$

La condition s'écrit donc $5MG=10$, soit $MG=2$.

Ensemble $\mathcal{E}_1$. Les points M tels que $MG=2$ forment le cercle de centre G et de rayon 2, comme l'annonce le lieu des points de norme constante (F14).

Le point B. Les coefficients sont positifs, donc $G\in[AB]$ (F04), et $BG=AB-AG=5-4=1$. Or $1\neq 2$.

Conclusion. $\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre G et de rayon 2, et le point B n'appartient pas à $\mathcal{E}_1$.



Le cercle ℰ1 de centre G et de rayon 2 ; le point B, à 1 de G, reste à l'intérieur.

3.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\| = 12$.

INDICE

La somme des coefficients est nulle : calcule le vecteur constant et sa norme.

CORRIGÉ

Vecteur constant. La somme des coefficients vaut $3 - 3 = 0$. D'après la relation de Chasles, pour tout point M :

$$\begin{aligned} &3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} \\ &= 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}\right) \\ &= 3\overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

Norme. Ce vecteur constant a pour norme $3 \times 5 = 15$, quel que soit M.

Conclusion. Comme $15 \neq 12$, aucun point ne convient : $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble vide (F14, cas d'une somme de coefficients nulle).

4.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_3$ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\right\| = 0$.

INDICE

Un vecteur a une norme nulle si et seulement s'il est nul.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout point M, $\left\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}\right\| = 5MG$. La condition s'écrit $5MG = 0$, soit $MG = 0$, c'est-à-dire $M = G$.

Conclusion. $\mathcal{E}_3 = \{G\}$: un seul point, et non un cercle (F14, cas d'une norme nulle).