BURHAN

Le barycentre dans le plan

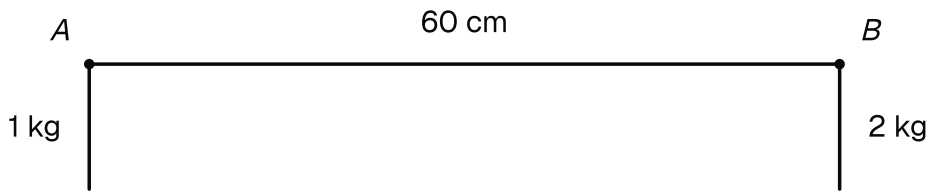
1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/barycentre-dans-le-plan/cours

Chapitre	Semestre
Le barycentre dans le plan	Semestre 1

Un point d'équilibre

Prends une règle de 60 cm, si légère qu'on oublie sa masse. À l'extrémité A, tu fixes un objet de 1 kg ; à l'extrémité B, un objet de 2 kg. Tu veux poser la règle en équilibre sur un seul doigt. Où mets-tu ce doigt ?



La règle de 60 cm chargée à ses deux bouts, 1 kg en A et 2 kg en B ; la place du doigt d'appui reste à trouver.

Devine : Le point d'équilibre

D'après toi, à quelle distance de A se trouve le point d'appui G ?

A. À 40 cm de A.

Juste.

Juste : G est deux fois plus près de B, qui porte deux fois plus.

B. À 45 cm de A.

Faux.

Alors $GA = 45$ et $GB = 15$: le côté de A l'emporterait, car $45 > 2 \times 15$.

C. À 30 cm de A, au milieu.

Faux.

Au milieu, l'objet le plus lourd ferait pencher la règle du côté de B.

D. À 20 cm de A.

Faux.

Tu as rapproché G de l'objet le plus léger : c'est l'inverse.

Correction

À l'équilibre, chaque masse multipliée par sa distance au point d'appui donne le même produit : $1 \times GA = 2 \times GB$.

Avec $GA + GB = 60$, on trouve $GA = 40$ et $GB = 20$.

En vecteurs, $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens contraires, et :

$$1\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point G va s'appeler un barycentre.

Dans ce chapitre, tu transformes cette idée d'équilibre en un outil de géométrie. Tu sauras construire le barycentre de deux, trois ou quatre points, et calculer ses coordonnées.

Avec lui, tu démontreras des alignements et des concours de droites, et tu décriras des lieux de points. Chaque propriété sera **démontrée**, et tu apprendras à rédiger chaque « montrer que » comme une vraie preuve.

Barycentre de deux points pondérés

Des points affectés de coefficients

Devine : Un point défini par des vecteurs

Soit A et B deux points tels que $AB = 10$ cm. Un point G vérifie $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Selon toi, que vaut la distance AG ?

A. $AG = 15$ cm

Faux.
Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens contraires : G est entre A et B.

B. $AG = 6$ cm

Juste.
Juste : $2 \times 6 = 3 \times 4$, et G est plus près de B.

C. $AG = 4$ cm

Faux.
Alors $GB = 6$ et $2 \times 4 \neq 3 \times 6$: tu as échangé les rôles de A et B.

D. $AG = 5$ cm

Faux.
Le milieu conviendrait si les deux coefficients étaient égaux.

Correction
L'égalité donne $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{GB}$: les deux vecteurs sont de sens contraires. Donc G est entre A et B, et $2\,GA = 3\,GB$.

Avec $GA + GB = 10$, on obtient $GA = 6$ et $GB = 4$.

> Le point est plus près de B, qui a le plus grand coefficient.

Définition : Point pondéré

Un **point pondéré** est un couple (A, α) formé d'un point A du plan et d'un réel α, appelé **coefficient** de A.

Un **système de points pondérés** est une liste finie $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ de points pondérés ; dans ce chapitre, $n \in \{2, 3, 4\}$. On note $s = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ la **somme des coefficients**.

Exemple : la somme des coefficients

Le système $(A, 2), (B, -5), (C, 4)$ a pour somme des coefficients $s = 2 - 5 + 4 = 1$. Le système $(A, 3), (B, -3)$ a pour somme $s = 0$.

Un coefficient peut être négatif. Tu vas voir que tout dépend de la somme s : nulle ou non nulle.

Ce qui sert du tronc commun

Petit rappel. Relation de Chasles : pour tous points M, N et P,

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}.$$

Point défini par un vecteur : un point A et un vecteur $\vec{u}$ étant donnés, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans la somme $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$, le point inconnu G apparaît deux fois.

La relation de Chasles fait passer $\overrightarrow{GB}$ par A. Il ne reste alors qu'une inconnue, le vecteur $\overrightarrow{AG}$.

On l'isole en divisant par $\alpha + \beta$: voilà pourquoi cette somme doit être non nulle.

Existence et définition

Théorème : Existence et unicité du barycentre de deux points pondérés

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un unique point G du plan tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point vérifie $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.

Démonstration

Étape 1. Soit G un point du plan. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$, donc

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}.$$

Étape 2. Par conséquent, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ équivaut à $(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}$. Comme $\alpha+\beta\neq 0$, cela équivaut à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

Étape 3. Le point A et le vecteur $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ étant donnés, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG}$ soit égal à ce vecteur. Le point cherché existe donc, et il est unique.

Vérifie : Le rôle de l'hypothèse

Dans la preuve, à quel moment sert l'hypothèse $\alpha+\beta\neq 0$?

A. À l'étape 3, pour placer G à partir de A.

Faux.

Un point et un vecteur donnent toujours un unique point : l'étape 3 n'a besoin de rien d'autre.

B. Elle ne sert à rien dans la preuve.

Faux.

Elle sert : relis le passage où l'on isole le vecteur $\overrightarrow{AG}$.

C. À l'étape 2, pour diviser par $\alpha+\beta$.

Juste.

Juste : sans elle, on ne pourrait pas isoler le vecteur $\overrightarrow{AG}$.

D. À l'étape 1, pour écrire la relation de Chasles.

Faux.

La relation de Chasles est vraie pour tous les points, sans hypothèse.

Correction

À l'étape 2, l'égalité de départ équivaut à :

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}.$$

Pour isoler $\overrightarrow{AG}$, on divise par $\alpha+\beta$, ce qui exige $\alpha+\beta\neq 0$.

La relation de Chasles (étape 1) et le placement du point (étape 3) n'ont besoin d'aucune hypothèse.

Définition : Barycentre de deux points pondérés ; isobarycentre

Soit (A,α) et (B,β) deux points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$. L'unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (F02) est le **barycentre** du système $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$. On note

$$G=\mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}.$$

Lorsque $\alpha = \beta$ (et $\alpha \neq 0$), G est appelé l'**isobarycentre** de A et B : c'est le milieu du segment $[AB]$, car F02 donne alors $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{2\alpha}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une seule idée porte la preuve : la relation de Chasles ramène l'égalité à une inconnue, le vecteur $\overrightarrow{AG}$.

On isole ce vecteur en divisant par $\alpha + \beta$: c'est là que sert l'hypothèse.

La formule obtenue est aussi ton outil de construction :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

Construire le barycentre

Exemple : construire un barycentre

Énoncé. Soit A et B deux points tels que $AB = 10$ cm. Construis le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 4)$.

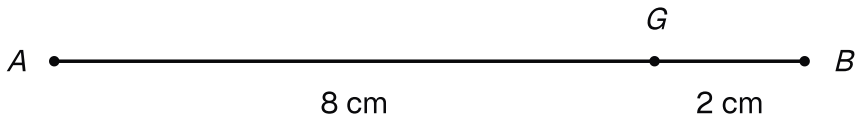
Existence. La somme $1 + 4 = 5$ est non nulle : le point $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, 4)\}$ existe.

Position. D'après le théorème d'existence :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Comme $0 \leq \frac{4}{5} \leq 1$, G est sur le segment $[AB]$, à 8 cm de A et à 2 cm de B.

Contrôle. $1 \times 8 = 4 \times 2$: l'équilibre est respecté.



Le barycentre G de (A, 1) et (B, 4) sur un segment [AB] de 10 cm : 8 cm le séparent de A, 2 cm de B.

Méthode : construire le barycentre de deux points

1. **Vérifier** que $\alpha + \beta \neq 0$; sinon, il n'y a pas de barycentre.
2. **Écrire** $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$, d'après le théorème d'existence.
3. **Placer** G sur la droite (AB), en partant de A.

Rédaction attendue. « On a $\alpha+\beta=\ldots\neq 0$, donc le barycentre G existe, et $\overrightarrow{AG}=\ldots\overrightarrow{AB}$. »

Attention : une somme nulle

✗ « Soit $G=\mathrm{Bar}\{(A,4),(B,-4)\}$. »

✓ Ici $4+(-4)=0$: ce système n'a pas de barycentre. Pour tout point M, la relation de Chasles donne :

$$4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{BA}.$$

Ce vecteur est non nul si $A\neq B$. Calcule toujours la somme des coefficients avant d'écrire Bar.

À toi : Rédige une construction

Soit A et B deux points tels que $AB=6$ cm. Rédige la construction du barycentre de $(A,5)$ et $(B,1)$, et donne la distance AG. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la somme des coefficients.

Indice 2
Applique $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha=5$ et $\beta=1$.

Indice 3
Point délicat : c'est β, le coefficient de B, qui est au numérateur.

Réponse
« On a $5+1=6\neq 0$, donc le barycentre $G=\mathrm{Bar}\{(A,5),(B,1)\}$ existe.

D'après le théorème d'existence :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}.$$

Comme $0\leq\dfrac{1}{6}\leq 1$, G est le point du segment $[AB]$ tel que $AG=1$ cm. »

Où se trouve le barycentre de deux points ?

Le rôle des signes

Devine : Un coefficient négatif

Soit A et B deux points distincts. La somme $1+(-3)=-2$ est non nulle, donc $G=\mathrm{Bar}\{(A,1),(B,-3)\}$ existe. Selon toi, où se trouve G ?

A. Sur le segment $[AB]$, plus près de B.
Faux.

Avec des coefficients de signes contraires, G ne peut pas être entre A et B.

B. Sur la droite (AB), du côté de A.

Faux.

Calcule $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$: ce réel est positif ici.

C. En dehors de la droite (AB).

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un multiple de $\overrightarrow{AB}$: G est sur la droite.

D. Sur la droite (AB), au-delà de B.

Juste.

Juste : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Correction

Le théorème d'existence donne :

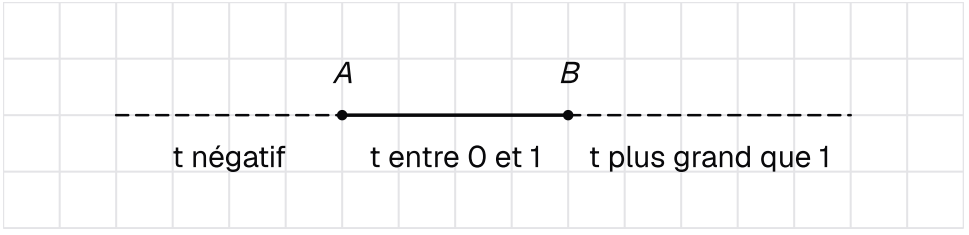
$$\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{-2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Le réel $\dfrac{3}{2}$ est plus grand que 1 : G est sur la droite (AB), au-delà de B, avec $BG = \dfrac{1}{2}AB$.

Deux masses de même signe s'équilibrent en un point situé entre elles. Avec des coefficients de signes contraires, le barycentre sort du segment.

Pourquoi est-ce vrai ? Tout se lit sur le réel $t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ de la relation $\overrightarrow{AG} = t\,\overrightarrow{AB}$.

Rappel du tronc commun : un tel point est sur $[AB]$ si et seulement si $0 \leq t \leq 1$. La preuve traduit cette condition sur α et β.



Les trois morceaux de la droite (AB) selon le réel t : avant A, le segment [AB] lui-même, puis au-delà de B.

La position démontrée

Propriété : Position du barycentre de deux points

Soit A et B deux points distincts, et $G = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$.

- G appartient à la droite (AB).
- G appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $\alpha\beta \geq 0$.

- $G = A$ si et seulement si $\beta = 0$; $G = B$ si et seulement si $\alpha = 0$.

Démonstration

Étape 1. Posons $t = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$. D'après F02, $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$: les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc G appartient à la droite (AB).

Étape 2. Un point G tel que $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$ appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $0 \leq t \leq 1$, c'est-à-dire si et seulement si $t(1-t) \geq 0$. Or $1 - t = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}$, donc $t(1-t) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$, qui a le signe de $\alpha\beta$.

Étape 3. Comme $A \neq B$, $G = A$ équivaut à $t = 0$, soit $\beta = 0$; et $G = B$ équivaut à $t = 1$, soit $1 - t = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve lit tout sur le réel $t = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$. La colinéarité de $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ donne la droite.

L'astuce est le produit $t(1-t)$: il est positif ou nul exactement quand t est entre 0 et 1. Or :

$$t(1-t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2},$$

qui a le signe de $\alpha\beta$.

Vérifie : Un produit bien choisi

Dans la preuve, pourquoi le produit $t(1-t)$ a-t-il le signe de $\alpha\beta$?

A. Car il vaut $\alpha\beta$ divisé par un carré non nul.

Juste.

Juste : un carré non nul est strictement positif.

B. Car t et $1 - t$ sont toujours positifs.

Faux.

Faux : avec $t = \dfrac{3}{2}$, on a $1 - t < 0$.

C. Car la somme $\alpha + \beta$ est positive.

Faux.

La somme peut être négative, par exemple $1 + (-3)$.

D. Car le point G est entre A et B.

Faux.

C'est ce qu'on veut décider : on ne peut pas le supposer.

Correction

On a $t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ et $1-t = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$, donc :

$$t(1-t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}.$$

Le dénominateur est un carré non nul, donc strictement positif. Le produit a donc le signe de $\alpha\beta$: c'est l'étape 2 de la preuve.

Exemple : des coefficients de même signe

La somme $4+1=5$ est non nulle : le point $G = \mathrm{Bar}\{(A,4),(B,1)\}$ existe, et :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Comme $4 \times 1 > 0$, G est sur le segment $[AB]$. Il est plus près de A, le point qui porte le plus grand coefficient.



Coefficients 4 et 1 : G reste dans le segment [AB], à un carreau de A sur cinq.

Hors du segment, et deux pièges

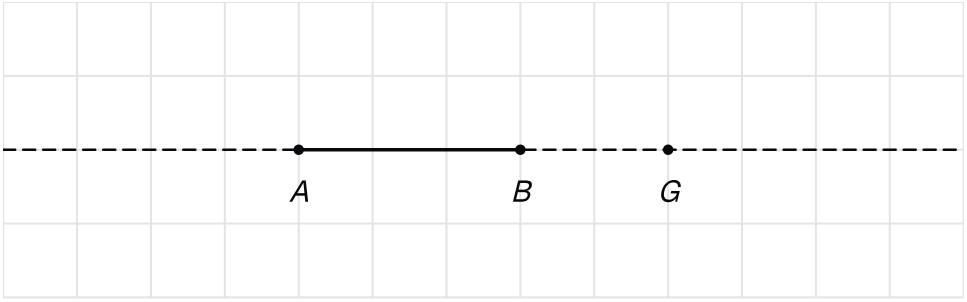
Exemple : des coefficients de signes contraires

La somme $-2+5=3$ est non nulle : le point $G = \mathrm{Bar}\{(A,-2),(B,5)\}$ existe, et :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Comme $(-2) \times 5 < 0$, G est sur la droite (AB), hors du segment $[AB]$.

Le réel $\dfrac{5}{3}$ dépasse 1 : G est au-delà de B, du côté du coefficient de plus grande valeur absolue.



Coefficients -2 et 5 : G sort du segment et se place au-delà de B, aux cinq tiers du vecteur AB.

Attention : hors du segment

✗ « $G = \mathrm{Bar}\{(A, 5), (B, -2)\}$ est entre A et B, plus près de A. »

✓ Les coefficients sont de signes contraires : G est hors du segment $[AB]$. La somme vaut 3, et :

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Le point G est donc du côté de A opposé à B, avec $AG = \dfrac{2}{3}AB$.

Attention : le sens des vecteurs

✗ « $G = \mathrm{Bar}\{(A, 2), (B, 1)\}$, donc $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} = \vec{0}$. »

✓ La définition s'écrit avec des vecteurs **issus de** G : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Tout multiplier par -1 donne $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} = \vec{0}$, qui est équivalente.

Mais mélanger les deux sens change le point : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} = \vec{0}$ définit $\mathrm{Bar}\{(A, 2), (B, -1)\}$.

À toi : Rédige une position

Soit A et B deux points distincts. Rédige la position du barycentre de $(A, -3)$ et $(B, 1)$: sur la droite (AB) ou non, sur le segment $[AB]$ ou non, et de quel côté. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la somme des coefficients.
Indice 2
Écris $\overrightarrow{AG} = t\,\overrightarrow{AB}$ avec $t = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}$.
Indice 3
Point délicat : t est négatif ; dis de quel côté de A cela place G.

Réponse
« On a $-3 + 1 = -2 \neq 0$, donc $G = \mathrm{Bar}\{(A, -3), (B, 1)\}$ existe, et :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{-2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires : G appartient à (AB). Comme $(-3) \times 1 < 0$, G n'appartient pas à $[AB]$.

Le réel $-\frac{1}{2}$ est négatif : G est du côté de A opposé à B, avec $AG = \frac{1}{2}AB$. »

Barycentre de trois ou quatre points

Plus de deux points

Devine : Trois points en équilibre

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(0,0)$, $B(6,0)$ et $C(0,3)$. Selon toi, quel point G vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$?

A. $G(3,1)$

Faux.

Avec ce point, la somme des trois vecteurs a pour coordonnées $(-3,0)$: elle n'est pas nulle.

B. $G(2,1)$

Juste.

Juste : chaque coordonnée est la moyenne de celles des trois points.

C. $G\left(3, \frac{3}{2}\right)$

Faux.

C'est le milieu de $[BC]$: il ne tient pas compte de A.

D. $G(6,3)$

Faux.

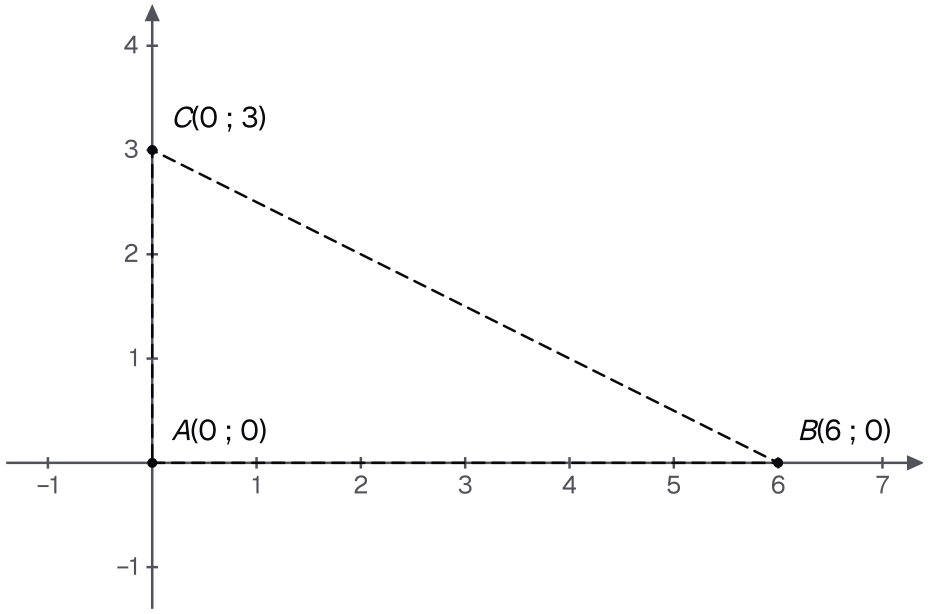
Tu as additionné les coordonnées sans diviser par 3.

Correction

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$. L'égalité devient $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, soit :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées $(6,0)$ et $(0,3)$. Donc $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(2,1)$, et $G(2,1)$.



Les trois points de l'activité placés dans le repère ; le point d'équilibre G n'est pas dessiné.

Avec trois ou quatre points, on garde la même idée qu'avec deux.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque vecteur $\overrightarrow{GA_i}$ passe par A_1, grâce à la relation de Chasles. Le point inconnu n'apparaît plus que dans le terme $s\,\overrightarrow{GA_1}$.

On isole alors $\overrightarrow{A_1G}$ en divisant par s, qui doit être non nulle.

Existence et définition

Théorème : Existence et unicité du barycentre de trois ou quatre points pondérés

Soit $n \in \{3, 4\}$ et $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés dont la somme des coefficients $s = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ est non nulle. Il existe un unique point G du plan tel que

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Ce point vérifie $\overrightarrow{A_1G} = \dfrac{1}{s}\left(\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}\right)$.

Démonstration

Étape 1. Soit G un point du plan. Pour chaque indice i, la relation de Chasles donne $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}$. En additionnant ces égalités multipliées par α_i :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = s\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Étape 2. La somme de gauche est nulle si et seulement si $s\overrightarrow{A_1G} = \alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}$, c'est-à-dire, puisque $s \neq 0$, si et seulement si $\overrightarrow{A_1G} = \dfrac{1}{s}\left(\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}\right)$.

Étape 3. Le point A_1 et ce vecteur étant donnés, un seul point G vérifie cette égalité : il existe donc, et il est unique.

Vérifie : D'où vient le facteur s ?

Dans la preuve, d'où vient le facteur s devant $\overrightarrow{GA_1}$?

A. Du choix du point $G = A_1$.

Faux.

La preuve ne choisit pas $G = A_1$: G est un point quelconque.

B. De l'unicité du point G.

Faux.

L'unicité est la conclusion, à l'étape 3.

C. De l'addition des termes $\alpha_i \overrightarrow{GA_1}$.

Juste.

Juste : chaque terme apporte son coefficient, et ces coefficients s'ajoutent.

D. De l'hypothèse $s \neq 0$.

Faux.

L'hypothèse sert à diviser par s, à l'étape 2 : elle ne produit pas le facteur.

Correction

À l'étape 1, chaque $\overrightarrow{GA_i}$ s'écrit $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}$.

En multipliant par α_i et en additionnant, les termes en $\overrightarrow{GA_1}$ se regroupent. Leur coefficient total est $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = s$.

Définition : Barycentre de trois ou quatre points ; isobarycentre ; centre de gravité

Soit $n \in \{3, 4\}$ et $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$. L'unique point G de F05 est le **barycentre** de ce système. On note

$$G = \mathrm{Bar}\{(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}.$$

Lorsque tous les coefficients sont égaux et non nuls, G est appelé l'**isobarycentre** des points $A_1, \ldots, A_n$. L'isobarycentre des trois sommets d'un triangle est appelé le **centre de gravité** de ce triangle.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Même schéma qu'avec deux points : la relation de Chasles fait tout passer par A_1. Le point inconnu ne reste que dans $s\,\overrightarrow{GA_1}$, et on divise par s, non nulle.

La formule obtenue construit G à partir de A_1 :

$$\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{s}\Big(\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}\Big).$$

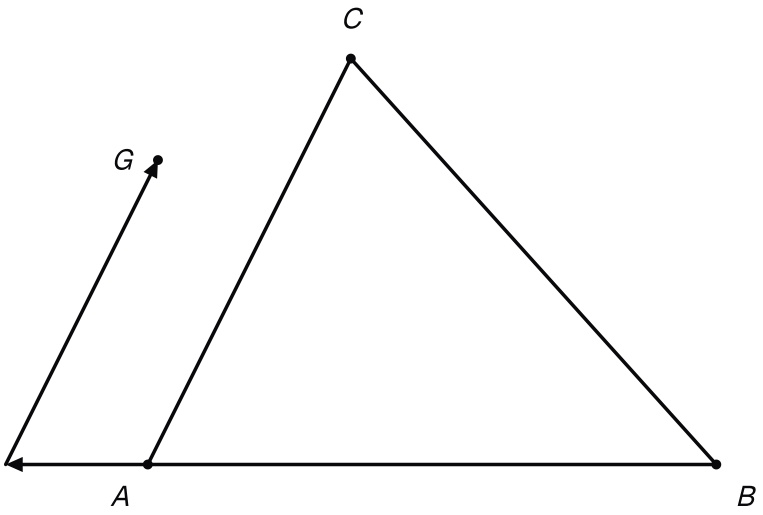
Construire, et un contre-exemple

Exemple : placer le barycentre depuis un sommet

Soit ABC un triangle. La somme $2-1+3=4$ est non nulle : $G=\mathrm{Bar}\{(A,2),(B,-1),(C,3)\}$ existe. D'après le théorème d'existence, en partant de A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Sur ton cahier, trace ABC. Pars de A, recule d'un quart de $\overrightarrow{AB}$, puis avance de trois quarts de $\overrightarrow{AC}$: tu es en G.



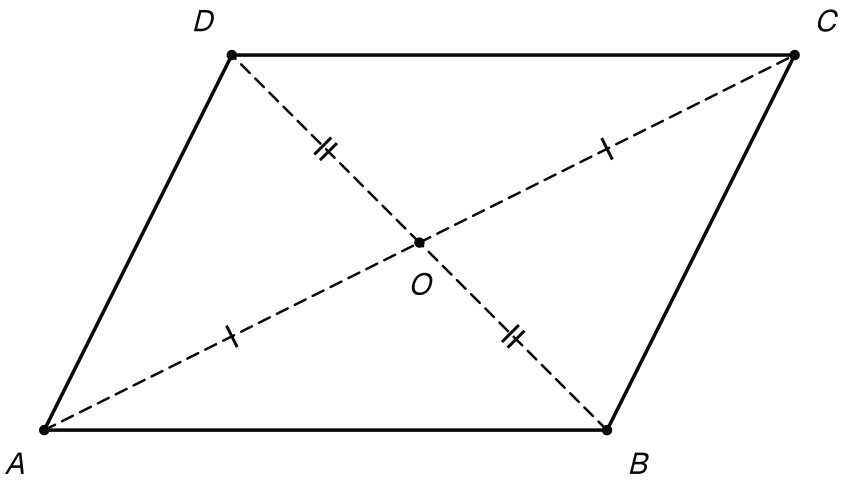
Le trajet qui mène de A à G : un quart du vecteur AB parcouru à reculons, puis les trois quarts du vecteur AC.

Exemple : l'isobarycentre de quatre points

Soit $ABCD$ un parallélogramme et O l'isobarycentre de A, B, C et D : quatre coefficients égaux à 1, de somme 4. En partant de A :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$$

Dans un parallélogramme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: O est le milieu de $[AC]$, le centre du parallélogramme.



Le parallélogramme ABCD et ses deux diagonales : leur milieu commun O est l'isobarycentre des quatre sommets.

Exemple : Contre-exemple : une somme nulle

Soit ABC un triangle et le système $(A, 1), (B, 2), (C, -3)$, de somme $s = 0$. Le calcul de la preuve donne, pour tout point G :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC}\\ &= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Le point G a disparu.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc ce vecteur n'est jamais nul : aucun point ne convient. L'hypothèse $s \neq 0$ est indispensable.

À toi : Rédige une existence

Soit ABC un triangle. Rédige l'existence du barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 1)$, puis exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule la somme des coefficients.
Indice 2
Pars de A : son coefficient n'apparaît pas dans la parenthèse.
Indice 3

Point délicat : on divise toute la parenthèse par s.

Réponse

« On a $1+2+1=4\neq 0$, donc le barycentre $G=\mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$ existe.

D'après le théorème d'existence :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

»

Homogénéité et propriété caractéristique

Des coefficients proportionnels

Devine : Deux systèmes

Soit A et B deux points distincts. Les sommes 15 et 5 étant non nulles, on pose $G_1=\mathrm{Bar}\{(A,6),(B,9)\}$ et $G_2=\mathrm{Bar}\{(A,2),(B,3)\}$. Selon toi, ces deux points sont-ils égaux ?

A. Non : les coefficients ne sont pas les mêmes.

Faux.

Calcule $\overrightarrow{AG_1}$ et $\overrightarrow{AG_2}$: tu obtiendras le même vecteur.

B. Non : G_1 est trois fois plus loin de A.

Faux.

Les coefficients triplent, mais leur somme aussi : le rapport ne change pas.

C. On ne peut pas le savoir sans figure.

Faux.

Le théorème d'existence suffit à placer chacun des deux points.

D. Oui : les coefficients sont proportionnels.

Juste.

Juste : tripler toutes les masses ne déplace pas l'équilibre.

Correction

D'après le théorème d'existence :

$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{9}{15}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

et $\overrightarrow{AG_2}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Les deux points sont égaux.

Multiplier tous les coefficients par 3 ne déplace pas le barycentre.

Doubler ou tripler toutes les masses d'une tige ne change pas son point d'équilibre.

Pourquoi est-ce vrai ? Multiplier tous les coefficients par un réel k non nul multiplie la somme vectorielle par k.

Un vecteur multiplié par $k \neq 0$ est nul si et seulement s'il l'était déjà : le point qui annule la somme ne change pas.

L'homogénéité

Propriété : Homogénéité du barycentre

Soit $n \in \{2, 3, 4\}$ et $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$. Pour tout réel $k \neq 0$:

$$\mathrm{Bar}\{(A_1, k\alpha_1), \ldots, (A_n, k\alpha_n)\} = \mathrm{Bar}\{(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}.$$

En particulier, on peut toujours choisir des coefficients de somme égale à 1, en multipliant chacun par $\dfrac{1}{s}$.

Démonstration

Étape 1. La somme des coefficients $k\alpha_1, \ldots, k\alpha_n$ vaut ks, qui est non nulle car $k \neq 0$ et $s \neq 0$: le premier barycentre existe (F02, F05).

Étape 2. Pour tout point G : $k\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + k\alpha_n\overrightarrow{GA_n} = k\left(\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}\right)$. Comme $k \neq 0$, ce vecteur est nul si et seulement si $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Étape 3. Les deux systèmes ont donc exactement le même point G qui vérifie leur égalité de définition (F03, F06) : leurs barycentres sont égaux. Avec $k = \dfrac{1}{s}$, la somme des nouveaux coefficients vaut 1.

Exemple : simplifier les coefficients

La somme $-4 + 10 + 6 = 12$ est non nulle. En multipliant chaque coefficient par $\dfrac{1}{2}$ (homogénéité) :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Bar}\{(A, -4), (B, 10), (C, 6)\}\\ &= \mathrm{Bar}\{(A, -2), (B, 5), (C, 3)\}.\end{aligned}$$

En divisant plutôt par 12, on obtient des coefficients de somme 1 : $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{1}{2}$.

La propriété caractéristique

Le barycentre G annule la somme $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}$. Que vaut la même somme vue d'un autre point M ?

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque vecteur $\overrightarrow{MA_i}$ se décompose en $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$.

Les termes $\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$ ont une somme nulle, et il reste s fois $\overrightarrow{MG}$.

Théorème : Propriété caractéristique du barycentre

Soit $n \in \{2,3,4\}$, $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$, et G leur barycentre. Pour tout point M du plan :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = s\,\overrightarrow{MG}.$$

Réciproquement, si un point G' vérifie $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = s\,\overrightarrow{MG'}$ pour au moins un point M, alors $G' = G$.

Démonstration

Étape 1. Soit M un point du plan. Pour chaque indice i, la relation de Chasles donne $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$. En additionnant ces égalités multipliées par α_i :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = s\,\overrightarrow{MG} + \left(\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}\right).$$

Étape 2. Par définition du barycentre (F03, F06), la parenthèse est le vecteur nul : on obtient l'égalité annoncée.

Étape 3. Si G' vérifie l'égalité pour un point M, alors, d'après l'étape 2, $s\,\overrightarrow{MG'} = s\,\overrightarrow{MG}$. Comme $s \neq 0$, $\overrightarrow{MG'} = \overrightarrow{MG}$, donc $G' = G$.

Vérifie : Réduire une somme

Soit A et B deux points distincts. La somme $3 + (-1) = 2$ est non nulle ; soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,-1)\}$. Pour tout point M, à quoi est égal $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$?

A. $2\overrightarrow{MG}$

Juste.

Juste : c'est la propriété caractéristique, avec $s = 2$.

B. $\overrightarrow{MG}$

Faux.

Il manque le facteur $s = 2$: avec $M = A$, on aurait $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$, ce qui est faux.

C. $4\overrightarrow{MG}$

Faux.

Le facteur est la somme $3 + (-1)$, pas $3 + 1$.

D. $2\overrightarrow{GM}$

Faux.

Le sens compte : $\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{MG}$.

Correction

La somme des coefficients vaut $s = 2$, non nulle, et G est le barycentre. La propriété caractéristique donne, pour tout point M :

$$3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}.$$

Contrôle avec $M = G$: on retrouve $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Quand la somme est nulle

Avec $A \neq B$, deux masses opposées $(A, 2)$ et $(B, -2)$ ne s'équilibrent nulle part. Pour tout point M :

$$2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{BA},$$

un vecteur non nul.

Pourquoi est-ce vrai ? Fais passer chaque vecteur $\overrightarrow{MA_i}$ par A_1 : les termes en $\overrightarrow{MA_1}$ se regroupent avec le coefficient s.

Si $s = 0$, ils disparaissent, et il reste un vecteur qui ne dépend plus de M.

Propriété : Somme des coefficients nulle

Soit $n \in \{2, 3, 4\}$ et $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés dont la somme des coefficients est **nulle**. Pour tout point M :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = \alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Ce vecteur, noté $\vec{u}$, ne dépend donc pas de M. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aucun point G ne vérifie $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$; si $\vec{u} = \vec{0}$, tous les points la vérifient. Dans les deux cas, ce système n'a pas de barycentre.

Démonstration

Étape 1. Soit M un point du plan. Pour chaque indice i, la relation de Chasles donne $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_i}$. En additionnant ces égalités multipliées par α_i :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Étape 2. La somme des coefficients est nulle par hypothèse : le premier terme disparaît, et il reste un vecteur qui ne dépend pas de M.

Étape 3. Soit G un point du plan. En prenant $M = G$, l'égalité $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ s'écrit $\vec{u} = \vec{0}$. Elle n'est vraie pour aucun point si $\vec{u} \neq \vec{0}$, et pour tous les points si $\vec{u} = \vec{0}$: il n'y a jamais un point unique.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Trois preuves, un même geste : transformer chaque vecteur, puis regrouper.

- Pour l'homogénéité, on factorise k, non nul.
- Pour la propriété caractéristique, on écrit $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$: la définition de G efface les termes $\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$.
- Si la somme est nulle, on passe par A_1 : le terme en $\overrightarrow{MA_1}$ disparaît, et il reste un vecteur fixe.

Vérifie : Une somme de coefficients nulle

Soit ABC un triangle. Pour tout point M, que vaut $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$?

A. Le vecteur $0 \times \overrightarrow{MG}$, où G est le barycentre.

Faux.

Ce système n'a pas de barycentre : sa somme de coefficients est nulle.

B. Le vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, pour tout M.

Juste.

Juste : on passe par A, et les termes en $\overrightarrow{MA}$ s'annulent.

C. Un vecteur qui change quand M change.

Faux.

Teste avec $M = A$ puis $M = B$: tu trouves le même vecteur.

D. Le vecteur $\vec{0}$, car la somme des coefficients est nulle.

Faux.

Une somme de coefficients nulle ne rend pas le vecteur nul : elle le rend constant.

Correction

La somme $1 + 1 - 2$ est nulle. Par la relation de Chasles, on passe par A : $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$.

Les termes en $\overrightarrow{MA}$ s'annulent : pour tout point M,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

Ce vecteur est non nul, car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

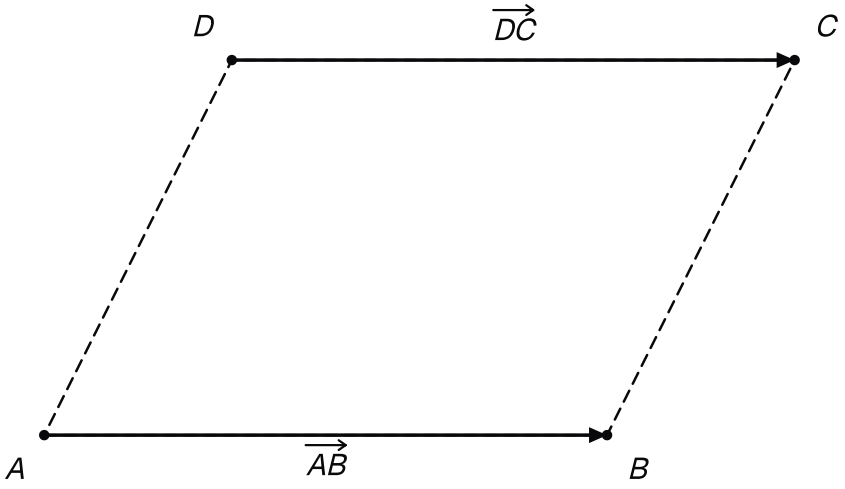
Exemple : Contre-exemple : tous les points conviennent

Soit $ABCD$ un parallélogramme et le système $(A, 1), (B, -1), (C, 1), (D, -1)$, de somme 0. En passant par A, pour tout point M :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: ce vecteur est nul.

Tous les points M annulent la somme. Il n'y a pas un point unique : ce système n'a pas de barycentre.



Dans le parallélogramme ABCD, les vecteurs AB et DC sont égaux : c'est ce qui annule la somme pour tout point M.

Réduire une somme vectorielle

Méthode : réduire une somme vectorielle

1. **Calculer** la somme s des coefficients.
2. **Si** $s \neq 0$: nommer le barycentre G, puis écrire la somme sous la forme $s\,\overrightarrow{MG}$.
3. **Si** $s = 0$: passer par l'un des points, par la relation de Chasles, et calculer le vecteur constant obtenu.

Rédaction attendue. « On a $s = \ldots \neq 0$. Soit G le barycentre de ce système. D'après la propriété caractéristique, pour tout point M, la somme vaut $s\,\overrightarrow{MG}$. »

Attention : le facteur s

✗ « $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$, donc $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG}$. »

✓ La somme des coefficients vaut 3 : pour tout point M, $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$. Ce facteur compte.

Avec $M = A$, on obtient $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG}$, d'où $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, comme le donne le théorème d'existence.

À toi : Rédige une réduction

Soit A, B et C trois points. Rédige la réduction de la somme $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$, pour tout point M. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule la somme s des coefficients.
Indice 2
Nomme le barycentre avant de t'en servir.
Indice 3
Point délicat : n'oublie pas le facteur s.

Réponse
« On a $1 - 3 + 4 = 2 \neq 0$. Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, -3), (C, 4)\}$.

D'après la propriété caractéristique, pour tout point M :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\\&= 2\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

»

Associativité : le barycentre partiel

Regrouper des masses

Devine : Remplacer deux points par un seul

Soit ABC un triangle. Les sommes 8 et 4 étant non nulles, on pose $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, 3), (C, 4)\}$ et $H = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, 3)\}$. Selon toi, G est le barycentre de H et de C affectés de quels coefficients ?

A. $(H, 1)$ et $(C, 4)$
Faux.
Le point H remplace deux points : il porte leurs deux coefficients.

B. $(H, 3)$ et $(C, 4)$
Faux.
Tu as gardé le seul coefficient de B : celui de A compte aussi.

C. $(H, 4)$ et $(C, 4)$
Juste.
Juste : H reçoit $1 + 3 = 4$.

D. $(H, 4)$ et $(C, 8)$
Faux.
Le coefficient de C ne change pas : il reste 4.

Correction
On regroupe les masses de A et de B en H, qui reçoit la masse totale $1+3=4$. Donc $G = \mathrm{Bar}\{(H,4),(C,4)\}$.

Les coefficients sont égaux : G est le milieu de $[HC]$. La propriété suivante le démontre.

Sur une tige qui porte trois masses, deux d'entre elles peuvent être remplacées par une seule, posée à leur point d'équilibre.

Pourquoi est-ce vrai ? La propriété caractéristique, appliquée au groupe remplacé, transforme ses termes en un seul vecteur $s'\overrightarrow{GH}$.

Il reste un système plus court, que G équilibre encore. L'unicité du barycentre conclut.

L'associativité démontrée

Théorème : Associativité du barycentre (barycentre partiel)

Soit $n \in \{3,4\}$, $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$, et G leur barycentre. On choisit une partie de ces points pondérés (au moins deux, pas tous) dont la somme des coefficients s' est **non nulle**, et on note H le barycentre de cette partie.

Alors G est le barycentre du système obtenu en remplaçant les points de cette partie par le seul point pondéré (H,s').

Par exemple, si $\alpha+\beta\neq 0$, $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et $H=\mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$, alors $\mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} = \mathrm{Bar}\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$.

Démonstration
Étape 1. Appliquons la propriété caractéristique (F08) au barycentre H de la partie choisie, au point $M=G$: la somme des $\alpha_i\overrightarrow{GA_i}$ étendue aux points de la partie vaut $s'\overrightarrow{GH}$.

Étape 2. Dans l'égalité $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$, remplaçons les termes de la partie par $s'\overrightarrow{GH}$. On obtient $s'\overrightarrow{GH}$ plus les termes $\alpha_j\overrightarrow{GA_j}$ des autres points, et cette somme est nulle.

Étape 3. Le nouveau système est formé de (H,s') et des autres points pondérés ; la somme de ses coefficients vaut encore s, non nulle. D'après l'étape 2, G vérifie son égalité de définition ; par unicité (F02, F05), G est son barycentre.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve combine deux outils déjà démontrés.

La propriété caractéristique, appliquée au barycentre partiel H au point $M=G$, remplace un groupe de termes par $s'\overrightarrow{GH}$. L'unicité du barycentre conclut.

L'hypothèse $s' \neq 0$ sert à définir H.

Vérifie : La somme du nouveau système

Dans la preuve, pourquoi la somme des coefficients du nouveau système vaut-elle encore s ?

A. Car le point H est égal au point G.

Faux.

En général $H \neq G$: H ne dépend que d'une partie des points.

B. Car on multiplie tous les coefficients par k.

Faux.

C'est l'homogénéité : elle ne sert pas ici.

C. Car $s' = s$ dans tous les cas.

Faux.

Non : s' est la somme d'une partie seulement des coefficients.

D. Car (H, s') porte la somme des coefficients remplacés.

Juste.

Juste : rien n'est perdu, rien n'est ajouté.

Correction

Les points du groupe, de coefficients de somme s', sont remplacés par le seul point pondéré (H, s'). Les autres coefficients ne changent pas.

La somme totale reste donc s, non nulle : c'est l'étape 3 de la preuve, qui permet d'invoquer l'unicité.

Exemple : construire par un barycentre partiel

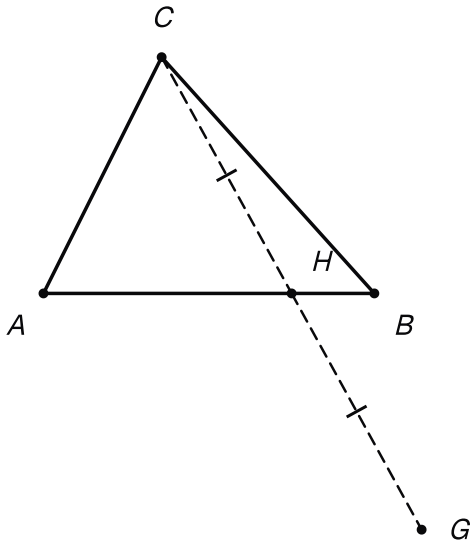
Soit ABC un triangle. La somme $1 + 3 - 2 = 2$ est non nulle : $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, 3), (C, -2)\}$ existe.

La somme partielle $1 + 3 = 4$ est non nulle : soit $H = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, 3)\}$, tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(H, 4), (C, -2)\}$. Le théorème d'existence donne alors :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{-2}{2}\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HC}.$$

Le point G est le symétrique de C par rapport à H.



H, barycentre partiel de A et B, est aux trois quarts de [AB] ; G est le symétrique de C par rapport à H.

Méthode et piège

Méthode : construire le barycentre de trois ou quatre points

1. **Vérifier** que $s \neq 0$.
2. **Grouper** des points de somme partielle s' non nulle, puis **nommer** H leur barycentre partiel.
3. **Remplacer** ce groupe par (H, s'), par associativité, puis construire le barycentre obtenu.

Rédaction attendue. « On a $s' = \ldots \neq 0$; soit H le barycentre partiel de … Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(H, s'), \ldots\}$. »

Attention : la somme partielle

✗ « Dans le système $(A, 2), (B, -2), (C, 1)$, je groupe A et B. »

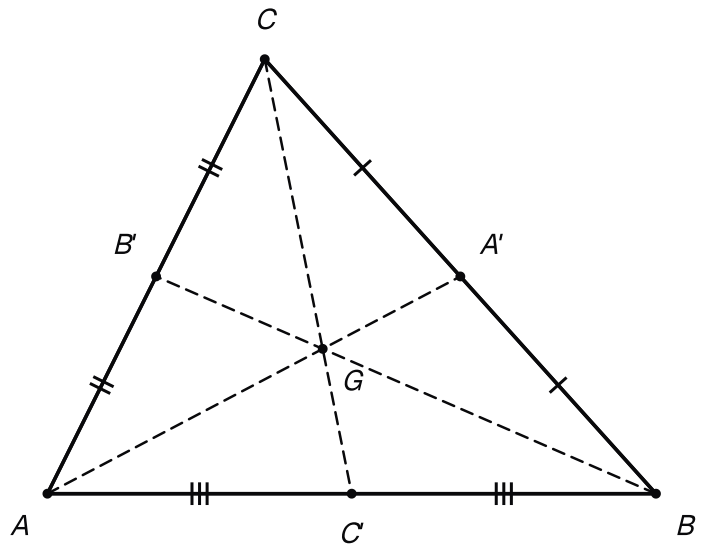
✓ La somme partielle $2 + (-2)$ est nulle : A et B n'ont pas de barycentre, on ne peut pas les grouper.

On groupe A et C, de somme 3, ou B et C, de somme -1. Le point groupé reçoit toujours la somme de **ses** coefficients.

Le centre de gravité d'un triangle

Tu sais depuis le collège que les trois médianes d'un triangle se coupent en un point. Une médiane joint un sommet au milieu du côté opposé. Ici, tu vas **démontrer** ce concours.

Pourquoi est-ce vrai ? Le centre de gravité est l'isobarycentre des trois sommets. En groupant deux sommets en leur milieu, l'associativité le place sur une médiane. Le même calcul vaut pour chacune des trois.



Les trois médianes du triangle ABC, chacune issue d'un sommet et menée au milieu du côté opposé, passent par un même point G.

Propriété : Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité, et A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'},$$

et les trois médianes (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

Démonstration

Étape 1. Par définition (F06), $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$, et $A' = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,1)\}$ (F03 : le milieu de $[BC]$ est l'isobarycentre de B et C). La partie $\{(B,1),(C,1)\}$ a une somme de coefficients $2 \neq 0$: par associativité (F10), $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(A',2)\}$.

Étape 2. D'après F02, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{AA'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$; en particulier, G appartient à la médiane (AA'). Le même raisonnement, avec les parties $\{(C,1),(A,1)\}$ puis $\{(A,1),(B,1)\}$, donne les deux autres égalités : G appartient aussi à (BB') et à (CC').

Étape 3. Les trois médianes passent donc par le point G : elles sont concourantes en G.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un seul outil, employé trois fois : l'associativité.

Grouper B et C en leur milieu A', avec le coefficient 2, donne $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(A',2)\}$. Le théorème d'existence fournit alors le rapport $\dfrac{2}{3}$.

Le concours des médianes, connu du collège, est désormais démontré.

Vérifie : Depuis le milieu

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC et A' le milieu de $[BC]$. Quelle égalité est vraie ?

A. $\overrightarrow{GA'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

Juste.
Juste : G est deux fois plus près de A' que de A, de l'autre côté.

B. $\overrightarrow{GA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

Faux.
Les vecteurs $\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont de sens contraires : G est entre A et A'.

C. $\overrightarrow{GA'} = -2\overrightarrow{GA}$

Faux.
Tu as inversé le rapport : G est plus près de A' que de A.

D. $\overrightarrow{GA'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{GA}$

Faux.
Le rapport $\dfrac{2}{3}$ concerne $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$, pas ces deux vecteurs.

Correction
D'après la propriété, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'},$$

et $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Ainsi $\overrightarrow{GA'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, soit $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$: on retrouve $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(A',2)\}$.

Appliquer

Exemple : des longueurs sur une médiane

Dans un triangle ABC, la médiane $[AA']$ mesure 9 cm. Le centre de gravité G vérifie $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
Donc $AG = 6$ cm et $GA' = 3$ cm.

Sur chaque médiane, G est aux deux tiers en partant du sommet, au tiers en partant du milieu.

À toi : Rédige une construction par associativité

Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Rédige la construction du barycentre G de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$ à l'aide du point A'. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule la somme des coefficients, puis celle de B et C.
Indice 2
Le milieu A' est l'isobarycentre de B et C : remplace ces deux points par A'.
Indice 3
Point délicat : A' reçoit le coefficient 2, somme des coefficients de B et C.

Réponse
« On a $2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$, donc le barycentre G de ce système existe.

La somme partielle $1 + 1 = 2$ est non nulle, et $A' = \mathrm{Bar}\{(B, 1), (C, 1)\}$. Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(A, 2), (A', 2)\}$.

Les deux coefficients sont égaux : G est le milieu du segment $[AA']$. »

Coordonnées du barycentre

Une moyenne pondérée

Devine : Des coordonnées à deviner

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(-1, 4)$ et $B(5, 1)$. La somme $2 + 1 = 3$ est non nulle ; soit $G = \mathrm{Bar}\{(A, 2), (B, 1)\}$. Selon toi, quelles sont les coordonnées de G ?

A. $(3, 2)$
Faux.
Tu as donné le coefficient 2 à B : c'est A qui le porte.

B. $(1, 3)$
Juste.
Juste : G est plus près de A, qui porte le plus grand coefficient.

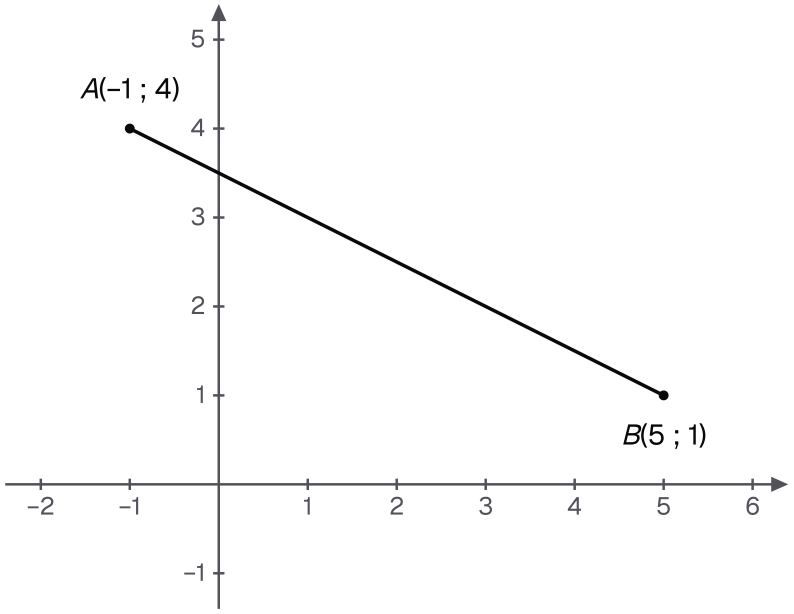
C. $(3, 9)$
Faux.
Il manque la division par la somme 3.

D. $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$
Faux.
C'est le milieu de $[AB]$: il oublie que A pèse deux fois plus.

Correction
Le théorème d'existence donne $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(6, -3)$.

Donc $x_G = -1 + 2 = 1$ et $y_G = 4 - 1 = 3$: $G(1, 3)$.

On retrouve une moyenne pondérée : $x_G = \dfrac{2 \times (-1) + 1 \times 5}{3}$.



A et B placés dans le repère, reliés par un segment ; à toi de situer G avant de calculer.

Une note de 14 de coefficient 2 et une note de 8 de coefficient 1 donnent la moyenne $\dfrac{2 \times 14 + 1 \times 8}{3} = 12$. Le barycentre fait la même chose avec les coordonnées.

Pourquoi est-ce vrai ? La propriété caractéristique, au point $M = O$, exprime $\overrightarrow{OG}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$. Or les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ sont celles du point G.

La formule démontrée

Propriété : Coordonnées du barycentre

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $n \in \{2, 3, 4\}$, $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$, où $A_i(x_i, y_i)$, et G leur barycentre. Alors

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{s} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n}{s}.$$

Démonstration

Étape 1. D'après la propriété caractéristique (F08) appliquée au point $M = O$: $\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = s\,\overrightarrow{OG}$, donc $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{s}\left(\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}\right)$.

Étape 2. Dans le repère, le vecteur $\overrightarrow{OA_i}$ a pour coordonnées (x_i, y_i) et $\overrightarrow{OG}$ a pour coordonnées (x_G, y_G). Les coordonnées d'une combinaison de vecteurs sont les mêmes combinaisons de leurs coordonnées : on obtient les deux formules annoncées.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve tient en un choix : prendre $M = O$ dans la propriété caractéristique. Le vecteur $\overrightarrow{OG}$ devient une combinaison des $\overrightarrow{OA_i}$, divisée par s.

Il suffit ensuite de lire les coordonnées, car celles de $\overrightarrow{OA_i}$ sont celles de A_i.

Vérifie : Le choix du point O

Pourquoi la preuve applique-t-elle la propriété caractéristique au point $M = O$?

A. Car la somme s vaut alors 1.

Faux.

La somme s ne dépend pas du point M choisi.

B. Car la propriété n'est vraie qu'au point O.

Faux.

La propriété caractéristique est vraie pour tout point M.

C. Car $\overrightarrow{OG}$ a les coordonnées de G.

Juste.

Juste : c'est ce qui transforme une égalité de vecteurs en formules de coordonnées.

D. Car O est le barycentre du système.

Faux.

En général, O n'a aucun lien avec le système : c'est l'origine du repère.

Correction

Pour tout point M :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = s\,\overrightarrow{MG}.$$

Avec $M = O$, les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{OG}$ ont pour coordonnées celles des points A_i et G. L'égalité de vecteurs devient deux égalités de nombres.

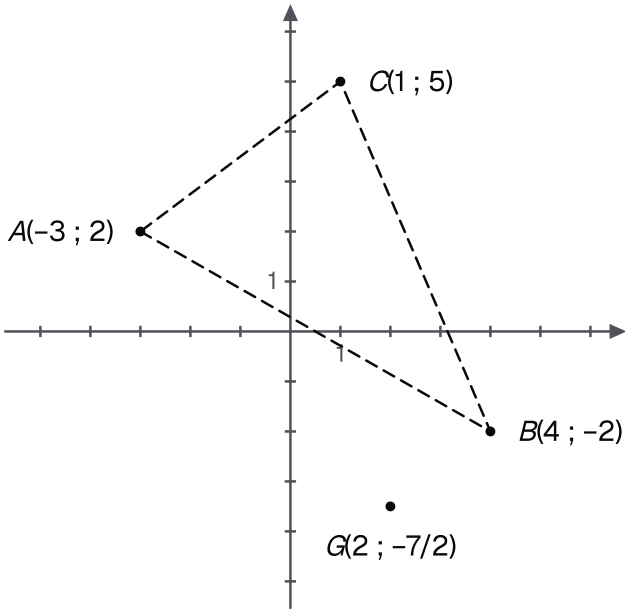
Exemple : trois points dans un repère

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(-3, 2)$, $B(4, -2)$ et $C(1, 5)$. La somme $1 + 2 - 1 = 2$ est non nulle ; soit $G = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, 2), (C, -1)\}$. D'après la formule des coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{-3+8-1}{2} = 2,$$
$$y_G = \frac{2-4-5}{2} = -\frac{7}{2}.$$

Contrôle. $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour abscisses -5, 2 et -1, et $-5+2\times 2-(-1)=0$.

Leurs ordonnées $\frac{11}{2}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{17}{2}$ donnent aussi $\frac{11}{2}+3-\frac{17}{2}=0$.



Le point G calculé pour les coefficients 1, 2 et -1 tombe sous l'axe des abscisses, hors du triangle ABC.

Calculer et reconnaître

Méthode : calculer les coordonnées d'un barycentre

1. **Vérifier** que $s \neq 0$.
2. **Calculer** $x_G = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{s}$, puis y_G de la même façon.
3. **Contrôler** le résultat sur la relation vectorielle, coordonnée par coordonnée.

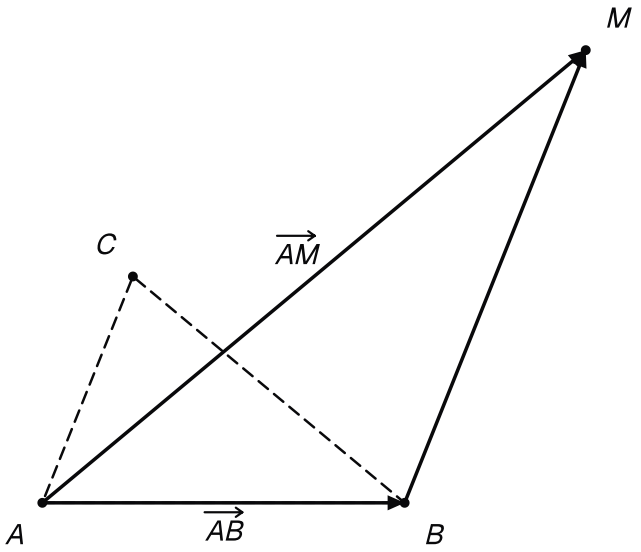
Rédaction attendue. « On a $s = \ldots \neq 0$. D'après la formule des coordonnées du barycentre, $x_G = \ldots$ et $y_G = \ldots$ »

Exemple : reconnaître un barycentre

Soit ABC un triangle et M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Par la relation de Chasles, on fait apparaître M dans chaque vecteur, puis on retranche $\overrightarrow{AM}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \\ &\quad + 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MC} \\ \vec{0} &= 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \\ \vec{0} &= -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}.\end{aligned}$$

La somme $-2 + 1 + 2 = 1$ est non nulle : $M = \mathrm{Bar}\{(A,-2),(B,1),(C,2)\}$.



Le point M obtenu en enchaînant le vecteur AB puis deux fois le vecteur AC.

À toi : Rédige un calcul de coordonnées

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(2,-3)$, $B(-4,1)$ et $C(0,5)$. Rédige le calcul des coordonnées du barycentre G de $(A,3)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par la somme s.
Indice 2
Applique la formule à chaque coordonnée.
Indice 3
Point délicat : le coefficient -1 de B change le signe de ses coordonnées.

Réponse
« On a $3 - 1 + 2 = 4 \neq 0$, donc $G = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,-1),(C,2)\}$ existe. D'après la formule des coordonnées du barycentre, le numérateur de x_G vaut :

$$\begin{aligned}&3 \times 2 - 1 \times (-4) \\ &\quad + 2 \times 0 = 10,\end{aligned}$$

d'où $x_G = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$. Celui de y_G vaut :

$$3 \times (-3) - 1 \times 1 + 2 \times 5 = 0,$$

d'où $y_G = \dfrac{0}{4} = 0$.

Donc $G\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$. »

Alignement et concours de droites

Les points d'une droite

Devine : Un point hors du segment

Soit A et B deux points distincts et M le point tel que $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$. Selon toi, M est-il un barycentre de A et B ?

A. Oui, avec les coefficients 1 et -2.

Faux.

La somme vaut -1, et $\dfrac{-2}{-1} = 2$: ce barycentre vérifie $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$.

B. Non, car M n'est pas entre A et B.

Faux.

Un barycentre peut être hors du segment : il suffit de coefficients de signes contraires.

C. Non, car un coefficient serait négatif.

Faux.

Les coefficients négatifs sont permis : seule la somme doit être non nulle.

D. Oui, avec les coefficients 3 et -2.

Juste.

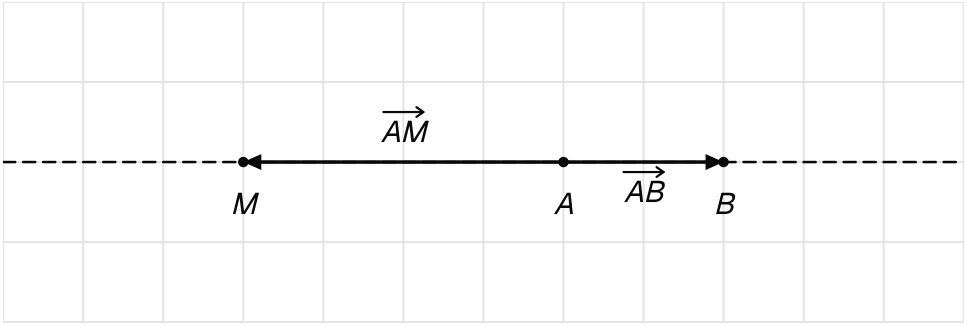
Juste : la somme vaut 1 et $\dfrac{-2}{1} = -2$.

Correction

Avec $\alpha = 3$ et $\beta = -2$, la somme vaut 1, non nulle. Le théorème d'existence donne :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{1}\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}.$$

Ce barycentre vérifie la relation qui définit M : c'est M. Ainsi $M = \mathrm{Bar}\{(A, 3), (B, -2)\}$.



Le point M de l'activité, défini par le vecteur AM égal à -2 fois le vecteur AB : il est sur la droite (AB), du côté opposé à B.

Chaque point de la droite (AB) est repéré par un réel t, tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$.

Pourquoi est-ce vrai ? Le théorème d'existence donne exactement cette relation pour le barycentre de $(A, 1-t)$ et (B, t), de somme 1.

Dans l'autre sens, la propriété de position place tout barycentre de A et B sur la droite (AB).

Droite et segment

Propriété : Droite et segment comme ensembles de barycentres

Soit A et B deux points distincts.

- Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe deux réels α et β, avec $\alpha + \beta \neq 0$, tels que $M = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.
- Un point M appartient au segment $[AB]$ si et seulement s'il existe deux réels $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, avec $\alpha + \beta \neq 0$, tels que $M = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si l'un d'eux est un barycentre des deux autres.

Démonstration

Étape 1. Si M est un barycentre de A et B, il appartient à (AB) d'après F04 ; si de plus $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, alors $\alpha\beta \geq 0$ et M appartient à $[AB]$ (F04).

Étape 2. Réciproquement, soit M un point de (AB). Comme $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ (colinéarité). Avec $\alpha = 1-t$ et $\beta = t$, on a $\alpha + \beta = 1$; d'après F02, $\mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ est l'unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AB}$: c'est M.

Étape 3. Si M appartient à $[AB]$, alors $0 \leq t \leq 1$, donc $\alpha = 1-t \geq 0$ et $\beta = t \geq 0$.

Étape 4. Si l'un des trois points est un barycentre des deux autres, il appartient à la droite qui les joint (F04). Réciproquement, si les trois points sont alignés, C appartient à (AB) et l'étape 2 s'applique à C.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve fait l'aller et le retour.

Un barycentre de A et B est sur (AB) : c'est la propriété de position. Un point de (AB) vérifie $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, et les coefficients $1-t$ et t, de somme 1, en font un barycentre.

Pour le segment, la condition $0 \leq t \leq 1$ rend les deux coefficients positifs.

Vérifie : Le choix des coefficients

Dans la preuve, pourquoi choisir les coefficients $1-t$ et t ?

A. Leur somme vaut 1, et le rapport obtenu est t.

Juste.

Juste : $\dfrac{t}{(1-t)+t} = t$.

B. Car t est toujours entre 0 et 1.

Faux.

Seulement si M est sur le segment $[AB]$: sur la droite, t est quelconque.

C. Car $1-t$ et t sont toujours positifs.

Faux.

Pour $t = -2$, le coefficient t est négatif.

D. Car les deux coefficients doivent être égaux.

Faux.

Des coefficients égaux donnent seulement le milieu.

Correction

La somme $(1-t)+t$ vaut 1, non nulle. D'après le théorème d'existence, ce barycentre G vérifie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{t}{1}\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{AB}.$$

C'est la relation qui définit M : donc $G = M$, comme à l'étape 2 de la preuve.

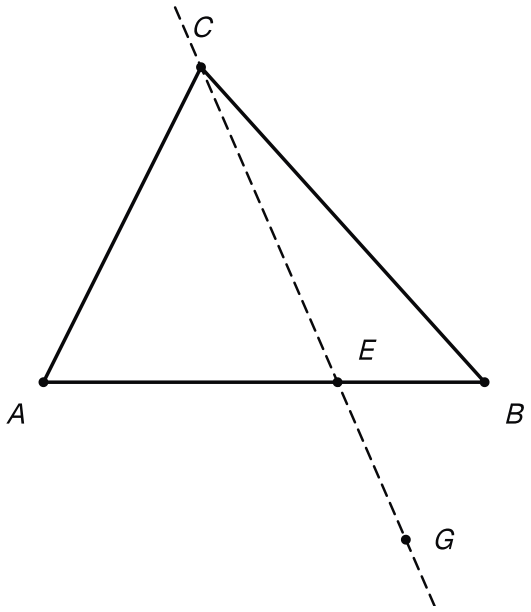
Exemple : un alignement par associativité

Soit ABC un triangle. Les sommes $1+2=3$ et $1+2-1=2$ sont non nulles : on pose $E = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$ et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,-1)\}$. Montrons que E, G et C sont alignés.

La somme partielle $1+2$ est non nulle : par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(E,3),(C,-1)\}$. Donc G est un barycentre de E et C : il appartient à la droite (EC), et les points E, G et C sont alignés.

Précisément, le théorème d'existence donne, car $\dfrac{-1}{3+(-1)} = -\dfrac{1}{2}$:

$$\overrightarrow{EG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}.$$



E aux deux tiers de [AB] ; G est sur la droite (EC), de l'autre côté de E par rapport à C.

Des droites concourantes

Méthode : exprimer un point comme barycentre

1. **Partir** de la relation vectorielle qui définit le point M.
2. **Se ramener**, par la relation de Chasles, à une égalité de la forme $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \cdots = \vec{0}$.
3. **Conclure** : si la somme des coefficients est non nulle, M est le barycentre de ce système.

Rédaction attendue. « On a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, avec $\alpha + \beta = \ldots \neq 0$. Donc $M = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$. »

Méthode : démontrer un alignement ou un concours

1. **Alignement** : montrer, par associativité, qu'un des trois points est barycentre des deux restants.
2. **Concours** : introduire le barycentre G d'un système bien choisi. Montrer, par associativité, qu'il appartient à chacune des droites.
3. **Conclure** en nommant le point commun et les barycentres partiels employés.

Rédaction attendue. « Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{\ldots\}$, donc G appartient à la droite … »

Exemple : trois droites concourantes

Soit ABC un triangle. Les sommes 5, 4 et 3 étant non nulles, on pose $I = \mathrm{Bar}\{(B,2),(C,3)\}$, $J = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,3)\}$ et $K = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$.

Soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,3)\}$, de somme 6. Par associativité :

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{Bar}\{(A,1),(I,5)\} \\ &= \mathrm{Bar}\{(B,2),(J,4)\} \\ &= \mathrm{Bar}\{(C,3),(K,3)\}. \end{aligned}$$

Donc G appartient à (AI), à (BJ) et à (CK) : ces trois droites sont concourantes en G.

Vérifie : Sur la droite (CK)

Dans l'exemple précédent, quelle égalité relie $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CK}$?

A. $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CK}$

Faux.

Alors G serait hors du segment $[CK]$: impossible avec deux coefficients positifs.

B. $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CK}$

Juste.

Juste : G est le milieu de $[CK]$.

C. $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CK}$

Faux.

Le rapport est $\dfrac{3}{3+3}$, et non $\dfrac{1}{3}$.

D. $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{KC}$

Faux.

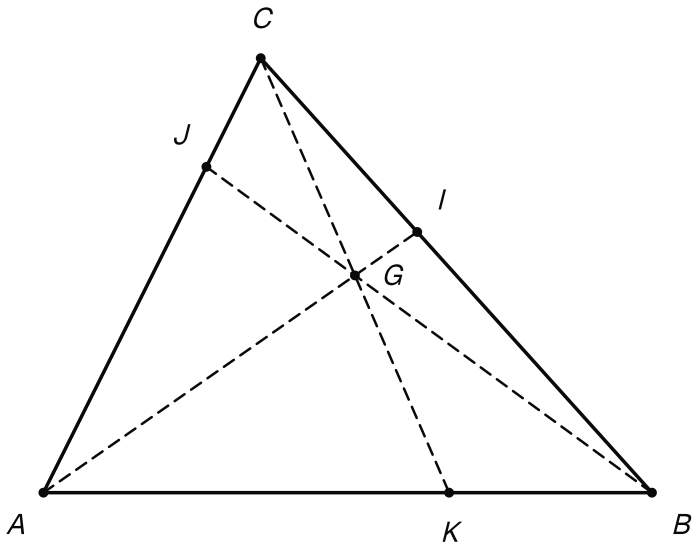
Le sens est faux : G est entre C et K, donc $\overrightarrow{CG}$ a le sens de $\overrightarrow{CK}$.

Correction

Par associativité, $G = \mathrm{Bar}\{(C,3),(K,3)\}$. Le théorème d'existence donne :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{3}{3+3}\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CK}.$$

Le point G est le milieu de $[CK]$.



Les droites (AI), (BJ) et (CK) de l'exemple, menées depuis chaque sommet, se rencontrent au point G.

Rédiger comme en devoir

À toi : Rédige un alignement

Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Les sommes $2+1$ et $3+1$ sont non nulles ; on pose $P = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1)\}$ et $Q = \mathrm{Bar}\{(P,3),(C,1)\}$. Rédige la preuve que Q est le milieu de $[AA']$; en déduire que A, Q et A' sont alignés. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Remplace P par le système dont il est le barycentre.
Indice 2
Par associativité, Q est le barycentre de trois points ; groupe ensuite B et C.
Indice 3
Point délicat : P reçoit le coefficient 3, somme des coefficients de A et B.

Réponse
« La somme $2+1=3$ est non nulle, et P est affecté de cette somme dans $Q = \mathrm{Bar}\{(P,3),(C,1)\}$. Par associativité, $Q = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1),(C,1)\}$, de somme $4 \neq 0$.

La somme partielle $1+1=2$ est non nulle et $A' = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,1)\}$. Par associativité, $Q = \mathrm{Bar}\{(A,2),(A',2)\}$.

Donc Q est le milieu de $[AA']$: en particulier, A, Q et A' sont alignés. »

Remarque : Coin devoir : « montrer que trois points sont alignés »

En devoir surveillé, l'énoncé demande par exemple : « Montrer que les points E, G et C sont alignés. »

La rédaction attendue nomme chaque barycentre partiel et vérifie que sa somme de coefficients est non nulle. Elle cite l'associativité et exprime un des trois points comme barycentre des deux restants. Pour un concours, elle nomme le point commun et le place sur chaque droite.

Lieux géométriques

Réduire avant de chercher

Devine : Une norme fixée

Soit A et B deux points tels que $AB = 4$, et I le milieu de $[AB]$. Selon toi, quel est l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 6$?

A. La médiatrice du segment $[AB]$.

Faux.

Une médiatrice vient d'une égalité de deux distances : ici, une seule distance est fixée.

B. Le cercle de diamètre $[AB]$.

Faux.

Ce cercle a pour rayon 2, pas le bon rayon.

C. Le cercle de centre I et de rayon 3.

Juste.

Juste : $2\,MI = 6$.

D. Le cercle de centre I et de rayon 6.

Faux.

Tu as oublié le facteur 2 : la somme vaut $2\overrightarrow{MI}$.

Correction

La somme $1 + 1 = 2$ est non nulle, et $I = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, 1)\}$. Par la propriété caractéristique, pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

La condition devient $2\,MI = 6$, soit $MI = 3$: c'est le cercle de centre I et de rayon 3.

Une condition sur une somme de vecteurs semble compliquée : M y apparaît plusieurs fois.

Pourquoi est-ce vrai ? La propriété caractéristique remplace toute la somme par $s\,\overrightarrow{MG}$: le point M n'apparaît plus qu'une fois.

Une norme devient une distance, deux normes deviennent deux distances, une direction devient une colinéarité. Il reste à reconnaître un cercle, une médiatrice ou une droite.

Une norme constante

Propriété : Lieu des points M tels que la norme d'une somme vectorielle soit constante

Soit $n \in \{2, 3, 4\}$, $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés de somme s, k un réel positif ou nul, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right\| = k.$$

- Si $s \neq 0$ et G est le barycentre du système : $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{k}{|s|}$ lorsque $k > 0$, et $\mathcal{E} = \{G\}$ lorsque $k = 0$.
- Si $s = 0$ et $\vec{u}$ est le vecteur constant de F09 : $\mathcal{E}$ est le plan tout entier lorsque $\|\vec{u}\| = k$, et $\mathcal{E}$ est vide sinon.

Démonstration

Étape 1. Cas $s \neq 0$. D'après la propriété caractéristique (F08), pour tout point M, la norme considérée vaut $\|s\,\overrightarrow{MG}\| = |s|\,MG$. La condition s'écrit donc $MG = \dfrac{k}{|s|}$, car $|s| > 0$.

Étape 2. Si $k > 0$, l'ensemble des points situés à la distance $\dfrac{k}{|s|}$ de G est le cercle de centre G et de ce rayon. Si $k = 0$, la condition $MG = 0$ équivaut à $M = G$.

Étape 3. Cas $s = 0$. D'après F09, la somme vectorielle vaut $\vec{u}$ pour tout point M. La condition $\|\vec{u}\| = k$ ne dépend pas de M : elle est vraie pour tous les points, ou pour aucun.

Vérifie : Une somme de coefficients nulle

Soit A et B deux points tels que $AB = 5$. Quel est l'ensemble des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = 10$?

A. L'ensemble vide.

Faux.

Calcule la norme du vecteur constant : elle vaut exactement 10.

B. Le cercle de centre A et de rayon 5.

Faux.

Le point M disparaît de la somme : la condition ne dépend pas de M.

C. Un cercle centré au barycentre.

Faux.

Ce système n'a pas de barycentre : sa somme de coefficients est nulle.

D. Le plan tout entier.

Juste.

Juste : la condition est vraie pour tous les points.

Correction

La somme $2-2$ est nulle : il n'y a pas de barycentre. Pour tout point M :

$$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{BA},$$

de norme $2\times 5=10$.

La condition est vraie pour tout point M : l'ensemble est le plan tout entier. Avec 12 à la place de 10, il serait vide.

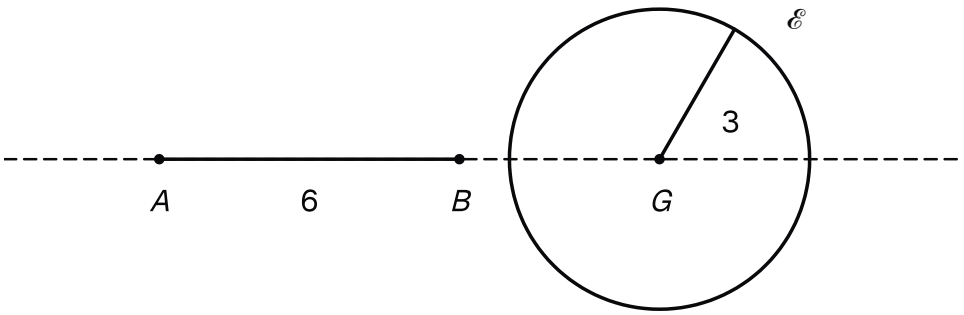
Exemple : un cercle

Soit A et B deux points tels que $AB=6$. Cherchons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\|=9$.

La somme $2-5=-3$ est non nulle ; soit $G=\mathrm{Bar}\{(A,2),(B,-5)\}$, avec $\overrightarrow{AG}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

D'après la propriété caractéristique, pour tout point M, la somme vaut $-3\overrightarrow{MG}$, de norme $3\,MG$. La condition s'écrit $3\,MG=9$, soit $MG=3$.

Donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon 3. On divise par $|s|=3$, jamais par -3.



L'ensemble $\mathscr{E}$ de l'exemple : le cercle de centre G et de rayon 3, avec G sur la droite (AB) au-delà de B.

Deux normes, une direction

Propriété : Lieu des points M tels que deux sommes vectorielles aient la même norme

Soit G le barycentre d'un système $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ de somme $s\neq 0$, et H le barycentre d'un système $(B_1,\beta_1),\dots,(B_p,\beta_p)$ de somme $\sigma\neq 0$, avec n et p dans $\{2,3,4\}$. On suppose $|s|=|\sigma|$ et $G\neq H$.

L'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right\| = \left\|\beta_1\overrightarrow{MB_1}+\cdots+\beta_p\overrightarrow{MB_p}\right\|$$

est la médiatrice du segment $[GH]$.

Démonstration

Étape 1. D'après la propriété caractéristique (F08), appliquée à chacun des deux systèmes, la condition s'écrit $\|s\,\overrightarrow{MG}\| = \|\sigma\,\overrightarrow{MH}\|$, soit $|s|\,MG = |\sigma|\,MH$.

Étape 2. Comme $|s| = |\sigma|$ et que ce nombre est non nul, la condition équivaut à $MG = MH$.

Étape 3. Les points G et H étant distincts, l'ensemble des points équidistants de G et de H est la médiatrice du segment $[GH]$.

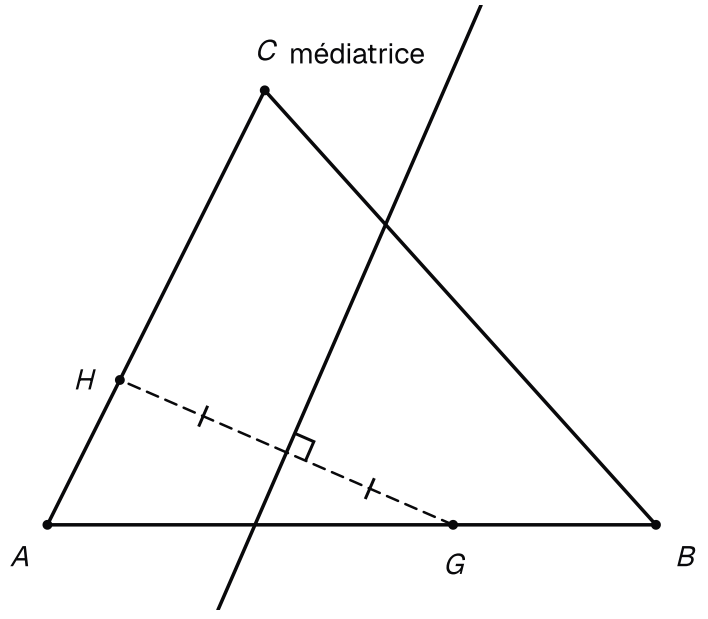
Exemple : une médiatrice

Soit ABC un triangle. Cherchons l'ensemble des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|.$$

Les deux sommes de coefficients valent 3 ; soit $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$ et $H = \mathrm{Bar}\{(A,2),(C,1)\}$. D'après la propriété caractéristique, la condition s'écrit $3\,MG = 3\,MH$, soit $MG = MH$.

Le point G est sur (AB), H sur (AC), et aucun des deux n'est A : donc $G \neq H$. L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[GH]$.



G sur [AB], H sur [AC] et la médiatrice de [GH], qui est l'ensemble des points M cherché.

Propriété : Lieu des points M tels qu'une somme vectorielle ait une direction donnée

Soit $n \in \{2, 3, 4\}$, $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés de somme $s \neq 0$, G leur barycentre, et $\vec{w}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires est la droite passant par G et de vecteur directeur $\vec{w}$.

Démonstration

Étape 1. D'après la propriété caractéristique (F08), la somme vectorielle vaut $s\,\overrightarrow{MG}$. Comme $s \neq 0$, les vecteurs $s\,\overrightarrow{MG}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{MG}$ et $\vec{w}$ le sont.

Étape 2. Le vecteur $\vec{w}$ étant non nul, $\overrightarrow{MG}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{GM} = \lambda\vec{w}$ (ce qui inclut $M = G$, avec $\lambda = 0$).

Étape 3. L'ensemble de ces points M est, par définition, la droite passant par G et de vecteur directeur $\vec{w}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les trois preuves commencent de la même façon : la propriété caractéristique remplace la somme par $s\,\overrightarrow{MG}$.

- Une norme devient $|s|\,MG$, et on divise par $|s|$, non nul.
- Deux normes égales deviennent $MG = MH$ quand $|s| = |\sigma|$.
- Une colinéarité avec $\vec{w}$ se lit sur $\overrightarrow{GM}$.

Il reste à reconnaître la figure.

Vérifie : Une direction imposée

Soit A et B deux points distincts. La somme $1 + 3 = 4$ étant non nulle, soit $K = \mathrm{Bar}\{(A, 1), (B, 3)\}$ et $\vec{w}$ un vecteur non nul. Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires ?

A. La droite passant par K de vecteur directeur $\vec{w}$.

Juste.

Juste : la somme vaut $4\overrightarrow{MK}$.

B. La droite (AB).

Faux.

La droite (AB) n'a pas la direction de $\vec{w}$ en général.

C. La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{w}$.

Faux.

Le point de la droite est le barycentre K, pas A.

D. Le seul point K.

Faux.
Tout point M tel que $\overrightarrow{KM}$ soit colinéaire à $\vec{w}$ convient, pas seulement K.

Correction
La somme $1+3=4$ est non nulle, et K est le barycentre. Par la propriété caractéristique, pour tout point M, la somme vaut $4\overrightarrow{MK}$.

Elle est colinéaire à $\vec{w}$ si et seulement si $\overrightarrow{MK}$ l'est. L'ensemble est la droite passant par K et de vecteur directeur $\vec{w}$; elle contient K lui-même.

Une droite, puis la méthode

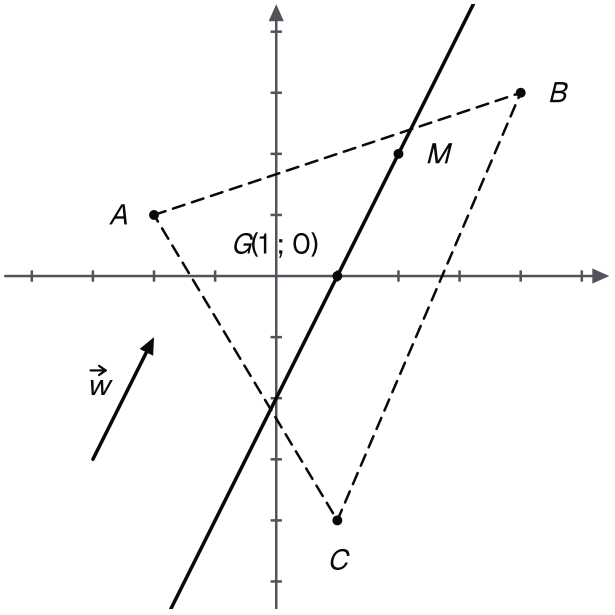
Exemple : une droite dans un repère

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(-2,1)$, $B(4,3)$, $C(1,-4)$ et $\vec{w}(1,2)$. Cherchons les points M tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\vec{w}$.

La somme des coefficients $1+1+1=3$ est non nulle. Le centre de gravité G a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{-2+4+1}{3} = 1,$$
$$y_G = \frac{1+3-4}{3} = 0.$$

L'ensemble est la droite passant par $G(1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1,2)$. Par exemple, $M(2,2)$ en fait partie, car $\overrightarrow{GM}$ a pour coordonnées $(1,2)$.



La droite cherchée passe par le centre de gravité G et suit la direction du vecteur w ; le point M de l'exemple en fait partie.

Méthode : déterminer un lieu géométrique

1. **Réduire** chaque somme : $s\,\overrightarrow{MG}$ si $s \neq 0$, un vecteur constant si $s = 0$.
2. **Traduire** la condition : distance MG fixée, égalité $MG = MH$, ou colinéarité de $\overrightarrow{MG}$ et d'un vecteur donné.
3. **Reconnaître** l'ensemble, puis le **décrire** complètement.

Rédaction attendue. « Pour tout point M, la somme vaut $s\,\overrightarrow{MG}$. La condition équivaut à $MG = \dots$ Donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon $\dots$ »

Attention : décrire le lieu en entier

✗ « L'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle. »

✓ Un lieu se décrit complètement : « $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon 3 ». Une médiatrice se décrit par le segment qu'elle coupe en son milieu. Une droite se décrit par l'un de ses points et un vecteur directeur.

Deux cas limites : si le rayon est nul, le lieu se réduit au point G ; si $s = 0$, c'est tout le plan ou aucun point.

Rédiger comme en devoir

À toi : Rédige un lieu

Soit A et B deux points tels que $AB = 8$. Rédige la recherche de l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 12$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule la somme des coefficients et nomme le barycentre.
Indice 2
Réduis la somme en $s\,\overrightarrow{MG}$, puis traduis la condition en une distance.
Indice 3
Point délicat : situe G sur $[AB]$ et donne le rayon, pas seulement « un cercle ».

Réponse
« On a $3 + 1 = 4 \neq 0$; soit $G = \mathrm{Bar}\{(A, 3), (B, 1)\}$, avec $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, donc $AG = 2$.

D'après la propriété caractéristique, pour tout point M :

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}.$$

La condition équivaut à $4\,MG = 12$, soit $MG = 3$. Donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon 3. »

Remarque : Coin devoir : « déterminer l'ensemble des points M »

En devoir surveillé, la question s'écrit : « Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que … ».

La rédaction attendue calcule la somme des coefficients, nomme le barycentre et cite la propriété caractéristique. Elle traduit ensuite la condition en distance ou en colinéarité. Elle décrit enfin l'ensemble en entier : centre et rayon, segment dont on prend la médiatrice, ou point et vecteur directeur.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

- Avant d'écrire un barycentre, on vérifie que la somme s des coefficients est non nulle.
- Deux points : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$; G est sur $[AB]$ si et seulement si $\alpha\beta \geq 0$.
- Propriété caractéristique : la somme $\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n}$ vaut $s\,\overrightarrow{MG}$; si $s = 0$, c'est un vecteur constant.
- L'associativité groupe des points dont la somme partielle est non nulle.
- Les coordonnées de G sont des moyennes pondérées.
- Un lieu se décrit en entier : centre et rayon, médiatrice d'un segment nommé, point et vecteur directeur.

Le mot du prof. Tu sais maintenant construire un barycentre, réduire une somme de vecteurs et décrire un lieu. Surtout, tu sais **démontrer** chaque propriété que tu emploies. Le barycentre reviendra avec la rotation, puis, à l'examen de 2BAC SM, avec l'affixe d'un barycentre.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Le barycentre dans le plan » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)