BURHAN

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/arithmetique-dans-z/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Un PGCD qui vaut 1 ou 11

Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n + 3$, $b = 5n + 2$ et $d = a \wedge b$.

1. — 0,5 pts

Montrer que $5a - 2b = 11$.

2. — 1 pts

En déduire que $d = 1$ ou $d = 11$.

INDICE

Le PGCD divise a et b, donc toute combinaison linéaire de a et de b.

3. — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{2}x + \overline{3} = \overline{0}$.

INDICE

Essaie les onze classes $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{10}$, en réduisant $2x + 3$ modulo 11.

4. — 0,5 pts

En déduire que 11 divise a si et seulement si $n \equiv 4\ [11]$.

5. — 1,5 pts

Montrer que $d = 11$ si $n \equiv 4\ [11]$, et $d = 1$ sinon.

INDICE

Si $n \equiv 4\ [11]$, calcule b modulo 11. Sinon, 11 peut-il être un diviseur commun ?

6. — 0,5 pts

Contrôler ce résultat pour $n = 37$, en calculant d par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 2 — 5 pts

Les puissances de 3 modulo 11

1. — 0,5 pts

Déterminer les restes des divisions euclidiennes de 3^k par 11, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. — 0,5 pts

En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{777} par 11.

INDICE

Divise l'exposant 777 par 5.

3. — 1 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $3^{5n+2} + 2$.

4. — 1,5 pts

Déterminer les entiers naturels n tels que $3^n \equiv 5\ [11]$.

INDICE

Écris la division euclidienne $n = 5q + s$, avec $0 \leq s \leq 4$, et montre que $3^n \equiv 3^s\ [11]$.

5. — 1,5 pts

Calculer les restes des divisions euclidiennes de 9^k par 11, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. En déduire les entiers naturels n tels que 11 divise $9^n - 1$.

INDICE

Comme à la question 4, écris $n = 5q + s$; calcule $9, 9^2, 9^3, \ldots$ modulo 11.

Exercice 3 — 5 pts

Diviseurs, carrés et PGCD de deux entiers

1. — 0,5 pts

Décomposer $1\,980$ en produit de facteurs premiers.

2. — 0,5 pts

Combien $1\,980$ a-t-il de diviseurs positifs ?

3. — 0,5 pts

Soit $n \geq 2$ un entier, de décomposition $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Montrer que si tous les exposants α_i sont pairs, alors n est le carré d'un entier.

4. — 1 pts

Réciproquement, on suppose que $n = k^2$, avec k entier. Montrer que tous les exposants α_i sont pairs.

INDICE

Décompose l'entier k tel que $n = k^2$, puis utilise l'unicité de la décomposition.

5. — 0,5 pts

En déduire que n a un nombre impair de diviseurs positifs si et seulement si n est le carré d'un entier.

INDICE

Un produit d'entiers est impair si et seulement si chaque facteur est impair.

6. — 0,5 pts

L'entier $1\,980$ est-il un carré ? Déterminer ses diviseurs positifs qui sont des carrés d'entiers.

INDICE

Un diviseur positif de $1\,980$ s'écrit $2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3} \times 11^{\beta_4}$; quand est-il un carré ?

7. — 1 pts

On pose $b = 1\,050$. Décomposer b, puis en déduire $1\,980 \wedge b$ et $1\,980 \vee b$.

8. — 0,5 pts

Retrouver $1\,980 \wedge 1\,050$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 4 5 pts

Les nombres premiers et la division par 6

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.

1. 1 pts

On écrit la division euclidienne de p par 6 : $p = 6q + r$, avec $0 \leq r < 6$. Montrer que $r = 1$ ou $r = 5$.

INDICE

Pour $r \in \{0, 2, 4\}$, puis pour $r = 3$, cherche un diviseur de p autre que 1 et p.

2. 0,5 pts

En déduire que $p \equiv 1\ [3]$ ou $p \equiv 2\ [3]$, puis que 3 divise $p^2 - 1$.

3. 1 pts

Montrer que 8 divise $p^2 - 1$.

INDICE

L'entier p est impair : écris $p = 2k + 1$, puis étudie la parité de $k(k+1)$ selon la parité de k.

4. 0,5 pts

En déduire que 24 divise $p^2 - 1$.

5. 1,5 pts

On ne suppose plus $p \geq 5$. Déterminer les nombres premiers p tels que $p^2 + 2$ soit premier.

INDICE

Traite à part $p = 2$ et $p = 3$. Pour $p \geq 5$, utilise la question 2 pour trouver un diviseur de $p^2 + 2$.

6. 0,5 pts

Vérifier que 97 est premier, puis contrôler les questions 1, 4 et 5 pour $p = 97$.

Exercice 5 5 pts

Sommes de trois cubes modulo 9

Pour tout entier relatif n, on pose $S_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$.

1. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise S_n.

INDICE

Calcule $S_{n+1} - S_n$: il ne reste que $(n+3)^3 - n^3$.

2. 1 pts

Dresser la table des valeurs de $x \times x \times x$ pour $x \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

3. 1 pts

Soit a un entier relatif. En déduire que : si $a \equiv 0\ [3]$, alors $a^3 \equiv 0\ [9]$; si $a \equiv 1\ [3]$, alors $a^3 \equiv 1\ [9]$; si $a \equiv 2\ [3]$, alors $a^3 \equiv 8\ [9]$.

INDICE

Écris la division euclidienne $a = 9q + r$, avec $0 \leq r < 9$, et compare a et r modulo 3.

4. 0,5 pts

Montrer que 9 divise S_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, y compris pour n négatif.

5. 1 pts

Soit N un entier relatif tel que $N \equiv 4\ [9]$ ou $N \equiv 5\ [9]$. Montrer que N n'est pas la somme des cubes de trois entiers relatifs.

INDICE

D'après la question 3, tout cube est congru à 0, 1 ou 8 modulo 9. Dresse la liste des restes possibles d'une somme de trois tels cubes.

6. 0,5 pts

En déduire que l'entier $10^{100} + 4$ n'est pas la somme des cubes de trois entiers relatifs.