BURHAN

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/arithmetique-dans-z/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un PGCD qui vaut 1 ou 11

Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n + 3$, $b = 5n + 2$ et $d = a \wedge b$.

1. 0,5 pts

Montrer que $5a - 2b = 11$.

CORRIGÉ

On remplace a et b par leurs expressions, puis on développe :

$$\begin{aligned} & 5a - 2b \\ &= 5(2n + 3) - 2(5n + 2) \\ &= 10n + 15 - 10n - 4 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5a - 2b = 11$.

2. 1 pts

En déduire que $d = 1$ ou $d = 11$.

INDICE

Le PGCD divise a et b, donc toute combinaison linéaire de a et de b.

CORRIGÉ

Combinaison linéaire. L'entier d divise a et b. Par combinaison linéaire, d divise $5a - 2b$, c'est-à-dire, d'après la question 1 :

$$d \mid 11.$$

Diviseurs de 11. Comme $a = 2n + 3 \geq 3$, d est un entier naturel non nul. Or 11 est premier : ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 11.

Conclusion. $d = 1$ ou $d = 11$.

3. 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{2}x + \overline{3} = \overline{0}$.

INDICE

Essaie les onze classes $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{10}$, en réduisant $2x + 3$ modulo 11.

CORRIGÉ

Pour chaque classe $\overline{x}$, on calcule $2x + 3$ et on le réduit modulo 11. Par exemple, pour $x = 4$: $2 \times 4 + 3 = 11 = 11 \times 1 + 0$.

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{2}x + \overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$

Conclusion. Dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, l'équation $\overline{2}x + \overline{3} = \overline{0}$ a une seule solution : $\overline{4}$.

4. 0,5 pts

En déduire que 11 divise a si et seulement si $n \equiv 4\ [11]$.

CORRIGÉ

Traduction dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. On a $11 \mid 2n+3$ si et seulement si $\overline{2n+3} = \overline{0}$, c'est-à-dire, d'après les opérations sur les classes :

$$\overline{2}\,\overline{n} + \overline{3} = \overline{0}.$$

Lecture de la question 3. Cela équivaut à $\overline{n} = \overline{4}$, c'est-à-dire à $n \equiv 4\ [11]$.

Conclusion. 11 divise a si et seulement si $n \equiv 4\ [11]$.

5. 1,5 pts

Montrer que $d = 11$ si $n \equiv 4\ [11]$, et $d = 1$ sinon.

INDICE

Si $n \equiv 4\ [11]$, calcule b modulo 11. Sinon, 11 peut-il être un diviseur commun ?

CORRIGÉ

Si $n \equiv 4\ [11]$. D'après la question 4, $11 \mid a$. Par compatibilité avec la multiplication et l'addition :

$$\begin{aligned} b = 5n + 2 &\equiv 5 \times 4 + 2\ [11] \\ &\equiv 22\ [11] \\ &\equiv 0\ [11], \end{aligned}$$

donc $11 \mid b$. Ainsi 11 est un diviseur commun à a et à b, donc $d \geq 11$. Avec la question 2, $d = 11$.

Sinon. D'après la question 4, $11 \nmid a$: 11 n'est pas un diviseur commun à a et à b, donc $d \neq 11$. Avec la question 2, $d = 1$.

Conclusion. $d = 11$ si $n \equiv 4\ [11]$, et $d = 1$ sinon.

6. 0,5 pts

Contrôler ce résultat pour $n = 37$, en calculant d par l'algorithme d'Euclide.

CORRIGÉ

Pour $n = 37$, on a $a = 2 \times 37 + 3 = 77$ et $b = 5 \times 37 + 2 = 187$. Comme $b \wedge a = a \wedge b$, on divise 187 par 77 :

$$\begin{aligned} 187 &= 77 \times 2 + 33 \\ 77 &= 33 \times 2 + 11 \\ 33 &= 11 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 11 : $d = 11$.

Conclusion. Pour $n = 37$, $d = 11$. C'est cohérent avec la question 5, car $37 = 11 \times 3 + 4$, donc $37 \equiv 4\ [11]$.

Exercice 2 — 5 pts

Les puissances de 3 modulo 11

1. — 0,5 pts

Déterminer les restes des divisions euclidiennes de 3^k par 11, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

CORRIGÉ

On multiplie chaque fois par 3, puis on réduit modulo 11.

- $3 \equiv 3\ [11]$ et $3^2 = 9$, donc $3^2 \equiv 9\ [11]$.
- $3^3 = 27 = 11 \times 2 + 5$, donc $3^3 \equiv 5\ [11]$.
- $3^4 \equiv 5 \times 3\ [11]$, et $15 = 11 + 4$, donc $3^4 \equiv 4\ [11]$.
- $3^5 \equiv 4 \times 3\ [11]$, et $12 = 11 + 1$, donc $3^5 \equiv 1\ [11]$.

Conclusion. Les restes de 3, 3^2, 3^3, 3^4 et 3^5 par 11 sont 3, 9, 5, 4 et 1.

2. — 0,5 pts

En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{777} par 11.

INDICE

Divise l'exposant 777 par 5.

CORRIGÉ

Division de l'exposant. On a $777 = 5 \times 155 + 2$, donc :

$$3^{777} = (3^5)^{155} \times 3^2.$$

Réduction. Par compatibilité avec les puissances et le produit, et d'après la question 1 :

$$\begin{aligned} 3^{777} &\equiv 1^{155} \times 9\ [11] \\ &\equiv 9\ [11]. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $0 \leq 9 < 11$, le reste de la division euclidienne de 3^{777} par 11 est 9.

3. — 1 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $3^{5n+2} + 2$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $3^{5n+2} = (3^5)^n \times 9$.

Le facteur $(3^5)^n$. Si $n \geq 1$, la compatibilité avec les puissances et la question 1 donnent $(3^5)^n \equiv 1\ [11]$. Si $n = 0$, $(3^5)^0 = 1$.

Réduction. Dans les deux cas :

$$\begin{aligned} 3^{5n+2} + 2 &\equiv 9 + 2\ [11] \\ &\equiv 11\ [11] \\ &\equiv 0\ [11]. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 11 divise $3^{5n+2} + 2$.

4. 1,5 pts

Déterminer les entiers naturels n tels que $3^n \equiv 5\ [11]$.

INDICE

Écris la division euclidienne $n = 5q + s$, avec $0 \leq s \leq 4$, et montre que $3^n \equiv 3^s\ [11]$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $n = 5q + s$ sa division euclidienne par 5, avec $0 \leq s \leq 4$.

Réduction de l'exposant. On a $3^n = (3^5)^q \times 3^s$. Si $q \geq 1$, la compatibilité avec les puissances donne $(3^5)^q \equiv 1^q = 1\ [11]$; si $q = 0$, $(3^5)^0 = 1$. Par compatibilité avec la multiplication :

$$3^n \equiv 3^s\ [11].$$

Lecture des restes. Comme $3^0 = 1$, et d'après la question 1, les restes de 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4 par 11 sont 1, 3, 9, 5 et 4. Seul $s = 3$ donne le reste 5.

Conclusion. Les entiers naturels n tels que $3^n \equiv 5\ [11]$ sont ceux dont le reste par 5 vaut 3, c'est-à-dire ceux qui vérifient $n \equiv 3\ [5]$.

5. 1,5 pts

Calculer les restes des divisions euclidiennes de 9^k par 11, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. En déduire les entiers naturels n tels que 11 divise $9^n - 1$.

INDICE

Comme à la question 4, écris $n = 5q + s$; calcule $9, 9^2, 9^3, \ldots$ modulo 11.

CORRIGÉ

Restes de 9^k. On multiplie chaque fois par 9, puis on réduit modulo 11.

- $9^0 = 1$ et $9 \equiv 9\ [11]$.
- $9^2 = 81 = 11 \times 7 + 4$, donc $9^2 \equiv 4\ [11]$.
- $9^3 \equiv 4 \times 9 = 36\ [11]$, et $36 = 11 \times 3 + 3$, donc $9^3 \equiv 3\ [11]$.
- $9^4 \equiv 3 \times 9 = 27\ [11]$, et $27 = 11 \times 2 + 5$, donc $9^4 \equiv 5\ [11]$.

Les restes sont 1, 9, 4, 3 et 5. Un cran plus loin, $9^5 \equiv 5 \times 9 = 45\ [11]$, et $45 = 11 \times 4 + 1$: $9^5 \equiv 1\ [11]$.

Réduction de l'exposant. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $n = 5q + s$ sa division euclidienne par 5, avec $0 \leq s \leq 4$. On écrit $9^n = (9^5)^q \times 9^s$. Pour $q = 0$, le premier facteur vaut 1 ; pour $q \geq 1$, la compatibilité avec les puissances donne $(9^5)^q \equiv 1\ [11]$. Dans les deux cas :

$$9^n \equiv 9^s\ [11].$$

Conclusion. L'entier 11 divise $9^n - 1$ si et seulement si $9^n \equiv 1\ [11]$. Parmi $9^0, \ldots, 9^4$, seul 9^0 a le reste 1 . Donc 11 divise $9^n - 1$ si et seulement si $s = 0$, c'est-à-dire si et seulement si 5 divise n.

Exercice 3 — 5 pts

Diviseurs, carrés et PGCD de deux entiers

1. — 0,5 pts

Décomposer $1\,980$ en produit de facteurs premiers.

CORRIGÉ

Division par 2.

$$\begin{aligned} 1\,980 &= 2 \times 990 \\ &= 2^2 \times 495 \end{aligned}$$

et 495 est impair.

Divisions suivantes.

$$\begin{aligned} 495 &= 3 \times 165 \\ &= 3^2 \times 55 \\ &= 3^2 \times 5 \times 11 \end{aligned}$$

Conclusion. $1\,980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$.

2. — 0,5 pts

Combien $1\,980$ a-t-il de diviseurs positifs ?

CORRIGÉ

D'après la propriété des diviseurs d'un entier, appliquée à $1\,980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$:

$$\begin{aligned} &(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) \\ &= 3 \times 3 \times 2 \times 2 \\ &= 36. \end{aligned}$$

Conclusion. L'entier $1\,980$ a 36 diviseurs positifs.

3. — 0,5 pts

Soit $n \geq 2$ un entier, de décomposition $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Montrer que si tous les exposants α_i sont pairs, alors n est le carré d'un entier.

CORRIGÉ

Supposons tous les α_i pairs : pour chaque i, $\alpha_i = 2\gamma_i$, avec γ_i entier naturel. Alors :

$$\begin{aligned} n &= p_1^{2\gamma_1} \cdots p_r^{2\gamma_r} \\ &= (p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r})^2. \end{aligned}$$

Conclusion. Si tous les exposants α_i sont pairs, n est le carré de l'entier $p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}$.

4. 1 pts

Réciproquement, on suppose que $n = k^2$, avec k entier. Montrer que tous les exposants α_i sont pairs.

INDICE

Décompose l'entier k tel que $n = k^2$, puis utilise l'unicité de la décomposition.

CORRIGÉ

Choix de k. Quitte à remplacer k par $-k$, on peut supposer $k \geq 0$. Comme $k^2 = n \geq 2$, on a $k \geq 2$, donc k admet une décomposition $k = c_1^{\delta_1} \cdots c_s^{\delta_s}$.

Décomposition de k^2. Alors :

$$n = k^2 = c_1^{2\delta_1} \cdots c_s^{2\delta_s},$$

avec $c_1 < \cdots < c_s$ premiers : c'est aussi une décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Conclusion. Par unicité de la décomposition, chaque exposant α_i est l'un des $2\delta_j$: tous les α_i sont pairs.

5. 0,5 pts

En déduire que n a un nombre impair de diviseurs positifs si et seulement si n est le carré d'un entier.

INDICE

Un produit d'entiers est impair si et seulement si chaque facteur est impair.

CORRIGÉ

Nombre de diviseurs. D'après la propriété des diviseurs d'un entier, n a $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ diviseurs positifs.

Parité du produit. Ce produit est impair si et seulement si chaque facteur $\alpha_i + 1$ est impair, c'est-à-dire si et seulement si chaque α_i est pair.

Conclusion. D'après les questions 3 et 4, tous les α_i sont pairs si et seulement si n est le carré d'un entier. Donc n a un nombre impair de diviseurs positifs si et seulement si n est le carré d'un entier.

6. 0,5 pts

L'entier $1\,980$ est-il un carré ? Déterminer ses diviseurs positifs qui sont des carrés d'entiers.

INDICE

Un diviseur positif de $1\,980$ s'écrit $2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3} \times 11^{\beta_4}$; quand est-il un carré ?

CORRIGÉ

$1\,980$ **n'est pas un carré.** D'après la question 2, $1\,980$ a 36 diviseurs positifs, un nombre pair. D'après la question 5, $1\,980$ n'est pas le carré d'un entier.

Diviseurs carrés. Un diviseur positif de $1\,980$ s'écrit $2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3} \times 11^{\beta_4}$, avec $\beta_1, \beta_2 \in \{0, 1, 2\}$ et $\beta_3, \beta_4 \in \{0, 1\}$.

- Le diviseur $1 = 1^2$ est un carré.
- Un diviseur $d \geq 2$ a pour décomposition le produit de ses facteurs d'exposant non nul ; d'après les questions 3 et 4, il est un carré si et seulement si ces exposants sont pairs.

Dans les deux cas, la condition s'écrit : $\beta_1, \beta_2 \in \{0, 2\}$ et $\beta_3 = \beta_4 = 0$.

Conclusion. L'entier $1\,980$ n'est pas un carré. Ses diviseurs positifs qui sont des carrés sont 1, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ et $2^2 \times 3^2 = 36$.

7. 1 pts

On pose $b = 1\,050$. Décomposer b, puis en déduire $1\,980 \wedge b$ et $1\,980 \vee b$.

CORRIGÉ

Décomposition de $1\,050$**.**

$$\begin{aligned} 1\,050 &= 2 \times 525 \\ &= 2 \times 3 \times 175 \\ &= 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \end{aligned}$$

Mêmes nombres premiers. Avec 2, 3, 5, 7 et 11 :

$$1\,980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^0 \times 11$$
$$1\,050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11^0$$

PGCD : plus petits exposants.

$$1\,980 \wedge 1\,050 = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

PPCM : plus grands exposants.

$$\begin{aligned} &1\,980 \vee 1\,050 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \\ &\quad \times 7 \times 11 \\ &= 69\,300 \end{aligned}$$

Conclusion. $1\,980 \wedge 1\,050 = 30$ et $1\,980 \vee 1\,050 = 69\,300$.

8. `0,5 pts`

Retrouver $1\,980 \wedge 1\,050$ par l'algorithme d'Euclide.

CORRIGÉ

On divise chaque fois le diviseur précédent par le reste obtenu :

$$\begin{aligned} 1\,980 &= 1\,050 \times 1 + 930 \\ 1\,050 &= 930 \times 1 + 120 \\ 930 &= 120 \times 7 + 90 \\ 120 &= 90 \times 1 + 30 \\ 90 &= 30 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 30.

Conclusion. D'après l'algorithme d'Euclide, $1\,980 \wedge 1\,050 = 30$: on retrouve le résultat de la question 7.

Exercice 4 5 pts

Les nombres premiers et la division par 6

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.

1. 1 pts

On écrit la division euclidienne de p par 6 : $p = 6q + r$, avec $0 \leq r < 6$. Montrer que $r = 1$ ou $r = 5$.

INDICE

Pour $r \in \{0, 2, 4\}$, puis pour $r = 3$, cherche un diviseur de p autre que 1 et p.

CORRIGÉ

On montre que les restes 0, 2, 3 et 4 sont impossibles. On utilise que les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p.

Si $r \in \{0, 2, 4\}$. On écrit $r = 2s$, avec $s \in \{0, 1, 2\}$. Alors $p = 6q + 2s = 2(3q + s)$, avec $3q + s$ entier : $2 \mid p$. Comme $2 \neq 1$, on aurait $p = 2$: c'est impossible, car $p \geq 5$.

Si $r = 3$. Alors $p = 6q + 3 = 3(2q + 1)$, donc $3 \mid p$. Comme $3 \neq 1$, on aurait $p = 3$: c'est impossible, car $p \geq 5$.

Conclusion. Les cas $r \in \{0, 2, 3, 4\}$ sont exclus : $r = 1$ ou $r = 5$.

2. 0,5 pts

En déduire que $p \equiv 1\ [3]$ ou $p \equiv 2\ [3]$, puis que 3 divise $p^2 - 1$.

CORRIGÉ

Reste modulo 3. On a $p - r = 6q = 3 \times 2q$, donc $p \equiv r\ [3]$.

- Si $r = 1$, alors $p \equiv 1\ [3]$.
- Si $r = 5$, alors $p \equiv 5\ [3]$, et $5 = 3 + 2$, donc $p \equiv 2\ [3]$.

Carré. Par compatibilité avec la multiplication :

- dans le premier cas, $p^2 \equiv 1\ [3]$;
- dans le second, $p^2 \equiv 4\ [3]$, et $4 = 3 + 1$, donc $p^2 \equiv 1\ [3]$.

Conclusion. On a $p \equiv 1\ [3]$ ou $p \equiv 2\ [3]$. Dans les deux cas, $p^2 - 1 \equiv 0\ [3]$, c'est-à-dire $3 \mid p^2 - 1$.

3. 1 pts

Montrer que 8 divise p^2-1.

INDICE

L'entier p est impair : écris $p=2k+1$, puis étudie la parité de $k(k+1)$ selon la parité de k.

CORRIGÉ

p est impair. D'après la question 1, $p=6q+1=2(3q)+1$ ou $p=6q+5=2(3q+2)+1$. Il existe donc $k\in\mathbb{N}$ tel que $p=2k+1$, et :

$$\begin{aligned} p^2-1 &= 4k^2+4k \\ &= 4k(k+1). \end{aligned}$$

Parité de $k(k+1)$.

- Si k est pair, $k=2m$ avec m entier, et $k(k+1)=2m(k+1)$.
- Si k est impair, $k+1=2m$ avec m entier, et $k(k+1)=2km$.

Dans les deux cas, il existe un entier t tel que $k(k+1)=2t$.

Conclusion. $p^2-1=4\times 2t=8t$: 8 divise p^2-1.

4. 0,5 pts

En déduire que 24 divise p^2-1.

CORRIGÉ

PPCM de 3 et de 8. Avec les nombres premiers 2 et 3 : $3=2^0\times 3$ et $8=2^3\times 3^0$. Plus grands exposants : $3\vee 8=2^3\times 3=24$.

Multiple commun. D'après les questions 2 et 3, p^2-1 est un multiple commun à 3 et à 8. D'après la propriété des multiples communs, c'est un multiple de $3\vee 8$.

Conclusion. 24 divise p^2-1.

5. 1,5 pts

On ne suppose plus $p \geq 5$. Déterminer les nombres premiers p tels que p^2+2 soit premier.

INDICE

Traite à part $p=2$ et $p=3$. Pour $p \geq 5$, utilise la question 2 pour trouver un diviseur de p^2+2.

CORRIGÉ

Un nombre premier vérifie $p=2$, $p=3$ ou $p \geq 5$, car $4=2\times 2$ n'est pas premier.

Si $p=2$. $p^2+2=6=2\times 3$ n'est pas premier.

Si $p=3$. $p^2+2=11$. Les nombres premiers ℓ tels que $\ell^2 \leq 11$ sont 2 et 3, et aucun ne divise 11, car $11=2\times 5+1=3\times 3+2$: 11 est premier.

Si $p \geq 5$. La question 2 donne $p^2 \equiv 1\ [3]$, donc $p^2+2 \equiv 3\ [3]$, et $3 \equiv 0\ [3]$: $3 \mid p^2+2$. Or $p^2+2 \geq 27$, donc 3 est un diviseur de p^2+2 autre que 1 et p^2+2 : p^2+2 n'est pas premier.

Conclusion. Le seul nombre premier cherché est $p=3$.

6. 0,5 pts

Vérifier que 97 est premier, puis contrôler les questions 1, 4 et 5 pour $p=97$.

CORRIGÉ

97 **est premier.** Les nombres premiers ℓ tels que $\ell^2 \leq 97$ sont 2, 3, 5 et 7, car $11^2=121>97$. Or :

$$\begin{aligned} 97 &= 2\times 48+1 \\ &= 3\times 32+1 \\ &= 5\times 19+2 \\ &= 7\times 13+6 \end{aligned}$$

Aucun reste n'est nul : d'après le test de primalité, 97 est premier.

Contrôles.

- Question 1 : $97=6\times 16+1$, le reste est 1.
- Question 4 : $97^2-1=9\,408=24\times 392$.
- Question 5 : $97^2+2=9\,411=3\times 3\,137$ n'est pas premier.

Conclusion. L'entier 97 est premier, et les résultats des questions 1, 4 et 5 sont vérifiés pour $p=97$.

Exercice 5 5 pts

Sommes de trois cubes modulo 9

Pour tout entier relatif n, on pose $S_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$.

1. 1 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise S_n.

INDICE

Calcule $S_{n+1} - S_n$: il ne reste que $(n+3)^3 - n^3$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $9 \mid S_n$ ».

Initialisation. $S_0 = 0 + 1 + 8 = 9 = 9 \times 1$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $S_n = 9k$. On a $S_{n+1} = (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$: seuls n^3 et $(n+3)^3$ diffèrent entre S_n et S_{n+1}. Donc :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (n+3)^3 - n^3 \\ &= 9n^2 + 27n + 27 \\ &= 9(n^2 + 3n + 3). \end{aligned}$$

Ainsi $S_{n+1} = 9(k + n^2 + 3n + 3)$, avec $k + n^2 + 3n + 3 \in \mathbb{Z}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, 9 divise S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. 1 pts

Dresser la table des valeurs de $x \times x \times x$ pour $x \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

CORRIGÉ

Pour chaque classe $\overline{x}$, on a $\overline{x} \times \overline{x} \times \overline{x} = \overline{x^3}$, et on réduit x^3 modulo 9 :

- $0^3 = 0, 1^3 = 1, 2^3 = 8$;
- $27 = 9 \times 3, 64 = 9 \times 7 + 1, 125 = 9 \times 13 + 8$;
- $216 = 9 \times 24, 343 = 9 \times 38 + 1, 512 = 9 \times 56 + 8$.

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$x \times x \times x$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$

Conclusion. Dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $x \times x \times x$ ne prend que les valeurs $\overline{0}$, $\overline{1}$ et $\overline{8}$.

3. 1 pts

Soit a un entier relatif. En déduire que : si $a \equiv 0\ [3]$, alors $a^3 \equiv 0\ [9]$; si $a \equiv 1\ [3]$, alors $a^3 \equiv 1\ [9]$; si $a \equiv 2\ [3]$, alors $a^3 \equiv 8\ [9]$.

INDICE

Écris la division euclidienne $a = 9q + r$, avec $0 \leq r < 9$, et compare a et r modulo 3.

CORRIGÉ

Réduction à un reste. Soit $a = 9q + r$ la division euclidienne de a par 9, avec $0 \leq r < 9$. Comme $a - r = 9q = 3 \times 3q$, on a $a \equiv r\ [3]$. De plus $a \equiv r\ [9]$, donc $\overline{a} = \overline{r}$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, et :

$$\overline{a^3} = \overline{r} \times \overline{r} \times \overline{r}.$$

Les trois cas.

- Si $a \equiv 0\ [3]$, alors $r \equiv 0\ [3]$, donc $r \in \{0, 3, 6\}$; la table donne $\overline{a^3} = \overline{0}$, c'est-à-dire $a^3 \equiv 0\ [9]$.
- Si $a \equiv 1\ [3]$, alors $r \in \{1, 4, 7\}$, et la table donne $\overline{a^3} = \overline{1}$: $a^3 \equiv 1\ [9]$.
- Si $a \equiv 2\ [3]$, alors $r \in \{2, 5, 8\}$, et la table donne $\overline{a^3} = \overline{8}$: $a^3 \equiv 8\ [9]$.

Conclusion. Les trois implications demandées sont démontrées.

4. 0,5 pts

Montrer que 9 divise S_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, y compris pour n négatif.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On distingue les trois restes de n modulo 3.

- Si $n \equiv 0\ [3]$: $n + 1 \equiv 1\ [3]$ et $n + 2 \equiv 2\ [3]$.
- Si $n \equiv 1\ [3]$: $n + 1 \equiv 2\ [3]$ et $n + 2 \equiv 3\ [3]$, avec $3 \equiv 0\ [3]$.
- Si $n \equiv 2\ [3]$: $n + 1 \equiv 0\ [3]$ et $n + 2 \equiv 1\ [3]$.

Les cubes. Dans chaque cas, n, $n + 1$ et $n + 2$ sont congrus à 0, 1 et 2 modulo 3, dans un certain ordre. D'après la question 3, leurs cubes sont congrus à 0, 1 et 8 modulo 9, dans le même ordre.

La somme. Par compatibilité avec l'addition :

$$\begin{aligned} S_n &\equiv 0 + 1 + 8\ [9] \\ &\equiv 9\ [9] \\ &\equiv 0\ [9]. \end{aligned}$$

Conclusion. 9 divise S_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, y compris pour n négatif, que la récurrence de la question 1 ne couvrait pas.

5. 1 pts

Soit N un entier relatif tel que $N \equiv 4\ [9]$ ou $N \equiv 5\ [9]$. Montrer que N n'est pas la somme des cubes de trois entiers relatifs.

INDICE

D'après la question 3, tout cube est congru à 0, 1 ou 8 modulo 9. Dresse la liste des restes possibles d'une somme de trois tels cubes.

CORRIGÉ

Raisonnons par l'absurde : supposons $N = x^3 + y^3 + z^3$, avec x, y, z entiers relatifs.

Les cubes modulo 9. Chaque entier relatif est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3 ; d'après la question 3, chacun des cubes x^3, y^3, z^3 est donc congru à 0, 1 ou 8 modulo 9.

Les sommes possibles. L'ordre des termes ne change pas la somme. Les sommes de trois éléments de $\{0, 1, 8\}$ sont :

- $0+0+0=0$, $0+0+1=1$, $0+1+1=2$, $1+1+1=3$;
- $0+0+8=8$, $0+1+8=9$, $1+1+8=10$;
- $0+8+8=16$, $1+8+8=17$, $8+8+8=24$.

Modulo 9, elles sont congrues à 0, 1, 2, 3, 8, 0, 1, 7, 8 et 6, car $10 = 9+1$, $16 = 9+7$, $17 = 9+8$ et $24 = 9\times 2+6$. Par compatibilité avec l'addition, le reste de N par 9 est donc l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8.

Contradiction. Or N a pour reste 4 ou 5, qui ne figurent pas dans cette liste.

Conclusion. N n'est pas la somme des cubes de trois entiers relatifs.

6. 0,5 pts

En déduire que l'entier $10^{100} + 4$ n'est pas la somme des cubes de trois entiers relatifs.

CORRIGÉ

On a $10 = 9 + 1$, donc $10 \equiv 1\ [9]$. Par compatibilité avec les puissances, puis avec l'addition :

$$\begin{aligned} 10^{100} + 4 &\equiv 1^{100} + 4\ [9] \\ &\equiv 5\ [9]. \end{aligned}$$

Ainsi $10^{100} + 4 \equiv 5\ [9]$.

Conclusion. D'après la question 5, l'entier $10^{100} + 4$ n'est pas la somme des cubes de trois entiers relatifs.