BURHAN

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/arithmetique-dans-z/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Entraînement	9

Exercice 1

Quand un entier en divise un autre qui dépend de lui

On cherche tous les entiers relatifs n tels que $n+3$ divise $2n+11$.

1.

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n+11 = 2(n+3)+5$.

INDICE

Développe le membre de droite.

2.

Montrer que $n+3$ divise $2n+11$ si et seulement si $n+3$ divise 5.

INDICE

Démontre les deux implications. Dans chaque sens, $n+3$ divise $2(n+3)$: combine avec l'égalité de la question 1.

3.

En déduire tous les entiers n cherchés.

INDICE

Liste les diviseurs de 5 dans $\mathbb{Z}$, positifs et négatifs.

Exercice 2

Un produit toujours multiple de 3

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $P = n(n^2 + 2)$.

1.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, P est un multiple de 3.

INDICE

Raisonne selon le reste de n dans la division euclidienne par 3 : trois cas. Dans deux d'entre eux, c'est $n^2 + 2$ qui est multiple de 3.

2.

Montrer que si n est pair, alors P est un multiple de 6.

INDICE

Montre que P est un multiple de 2, puis utilise la propriété des multiples communs et du PPCM.

3.

Si n est impair, P est-il un multiple de 6 ?

INDICE

Étudie la parité de $n^2 + 2$ quand n est impair.

Exercice 3

Une divisibilité par 5, de deux façons

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 2^{3n+1} + 3^{n+1}$.

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise A_n.

INDICE

Écris $2^{3n+4} = 8 \times 2^{3n+1}$ et $3^{n+2} = 3 \times 3^{n+1}$, puis fais apparaître $8A_n$.

2.

Retrouver ce résultat à l'aide des congruences modulo 5.

INDICE

Écris $2^{3n+1} = 2 \times 8^n$ et remarque que $8 \equiv 3\ [5]$.

3.

Calculer A_3 et vérifier le résultat.

INDICE

$3n + 1 = 10$ et $n + 1 = 4$.

Exercice 4

Des entiers qui ont exactement dix diviseurs

On cherche les entiers naturels de la forme $n = 2^a \times 3^b$, où a et b sont des entiers naturels non nuls, qui ont exactement 10 diviseurs positifs.

1.

Exprimer le nombre de diviseurs positifs de $2^a \times 3^b$ en fonction de a et de b.

INDICE

L'écriture $2^a \times 3^b$, avec $a \geq 1$ et $b \geq 1$, est déjà une décomposition en facteurs premiers.

2.

Déterminer tous les entiers cherchés.

INDICE

Écris 10 comme produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

3.

Vérifier le résultat en donnant la liste des diviseurs positifs de 48.

INDICE

Range les produits $2^\beta \times 3^\gamma$, avec $0 \leq \beta \leq 4$ et $0 \leq \gamma \leq 1$.

Exercice 5

Un PGCD qui dépend de n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 4n + 9$, $b = n + 1$ et $d = a \wedge b$.

1.

Montrer que les diviseurs communs à a et à b sont exactement les diviseurs communs à b et à 5.

INDICE

Écris a en fonction de b. Démontre ensuite les deux inclusions, par des combinaisons linéaires.

2.

En déduire que $d = 5$ si 5 divise $n + 1$, et $d = 1$ sinon.

INDICE

Deux couples qui ont les mêmes diviseurs communs ont le même PGCD. Quels sont les diviseurs positifs de 5 ?

3.

Pour $n = 59$, calculer $a \wedge b$ par l'algorithme d'Euclide, et comparer avec la question 2.

INDICE

Calcule d'abord a et b pour $n = 59$.

Exercice 6

Les puissances de 5 modulo 13

1.

Déterminer les restes des divisions euclidiennes de 5, 5^2, 5^3 et 5^4 par 13.

INDICE

Multiplie chaque fois le reste précédent par 5, puis réduis modulo 13.

2.

En déduire le reste de la division euclidienne de 5^{1003} par 13.

INDICE

Divise l'exposant $1\,003$ par 4.

3.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, 13 divise $5^{4k+2} + 1$.

INDICE

Écris $5^{4k+2} = (5^4)^k \times 5^2$, et utilise la question 1.

Exercice 7

Un critère de divisibilité par 7 par tranches de trois chiffres

1.

Vérifier que $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$, puis en déduire que $1\,000 \equiv -1 \ [7]$.

INDICE

Pour la congruence, calcule la différence $1\,000 - (-1)$.

2.

Soient a et b deux entiers naturels, et $N = 1\,000a + b$. Montrer que $N \equiv b - a \ [7]$.

INDICE

Multiplie la congruence de la question 1 par a, puis ajoute b.

3.

L'entier $594\,223$ est-il divisible par 7 ?

INDICE

Écris $594\,223 = 1\,000 \times 594 + 223$.

4.

Le même raisonnement vaut-il modulo 13 ? L'entier $594\,223$ est-il divisible par 13 ?

INDICE

D'après la question 1, 13 divise aussi $1\,001$.

Exercice 8

Une même équation dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

On considère l'équation (E) : $x^2 + \overline{3}x + \overline{2} = \overline{0}$, d'inconnue x.

1.

Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

INDICE

Calcule $x^2 + 3x + 2$ pour $x = 0, 1, \ldots, 6$, puis réduis modulo 7.

2.

Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

INDICE

Même méthode, avec six classes ; réduis cette fois modulo 6.

3.

En déduire les entiers relatifs n tels que 6 divise $n^2 + 3n + 2$.

INDICE

$6 \mid n^2 + 3n + 2$ signifie $\overline{n^2 + 3n + 2} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 9

Les carrés modulo 7 et une équation sans solution

1.

Pour chaque entier r tel que $0 \leq r \leq 6$, déterminer le reste de r^2 par 7. En déduire les restes possibles du carré d'un entier relatif par 7.

INDICE

Un entier n est congru modulo 7 à son reste r ; élève cette congruence au carré.

2.

Soient x et y deux entiers relatifs tels que 7 divise $x^2 + y^2$. Montrer que 7 divise x et que 7 divise y.

INDICE

Note s et t les restes de x^2 et de y^2 par 7. Commence par montrer que $s + t \equiv 0\ [7]$. Puis dresse les sommes $s + t$ possibles avec $s, t \in \{0, 1, 2, 4\}$ et repère celles qui sont des multiples de 7.

3.

En déduire que l'équation $x^2 + y^2 = 147$ n'a aucune solution (x, y) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

INDICE

Raisonne par l'absurde : écris $x = 7u$ et $y = 7v$, puis simplifie par 49.