BURHAN

# Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/arithmetique-dans-z/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ | Entraînement | 9 |

### Exercice 1

## Quand un entier en divise un autre qui dépend de lui

On cherche tous les entiers relatifs $n$ tels que $n+3$ divise $2n+11$.

#### 1.

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n+11 = 2(n+3)+5$.

INDICE

Développe le membre de droite.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned} 2(n+3)+5 &= 2n+6+5 \\ &= 2n+11. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n+11 = 2(n+3)+5$.

#### 2.

Montrer que $n+3$ divise $2n+11$ si et seulement si $n+3$ divise $5$.

INDICE

Démontre les deux implications. Dans chaque sens, $n+3$ divise $2(n+3)$ : combine avec l'égalité de la question 1.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On veut établir :

$$\begin{aligned} & n+3 \mid 2n+11 \\ \Leftrightarrow\ & n+3 \mid 5. \end{aligned}$$

Dans les deux sens, on utilise $n+3 \mid 2(n+3)$.

**Sens direct.** Supposons $n+3 \mid 2n+11$. Par combinaison linéaire, $n+3$ divise $(2n+11)-2(n+3)$, qui vaut $5$ d'après la question 1.

**Réciproque.** Supposons $n+3 \mid 5$. Par combinaison linéaire, $n+3$ divise $2(n+3)+5$, qui vaut $2n+11$ d'après la question 1.

**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n+3$ divise $2n+11$ si et seulement si $n+3$ divise $5$.

### 3.

En déduire tous les entiers $n$ cherchés.

INDICE

Liste les diviseurs de $5$ dans $\mathbb{Z}$, positifs et négatifs.

CORRIGÉ

**Diviseurs de $5$.** Comme $5$ est premier, ses diviseurs dans $\mathbb{Z}$ sont $-5$, $-1$, $1$ et $5$.

**Valeurs de $n$.** D'après la question 2, $n$ convient si et seulement si $n+3$ est l'un de ces diviseurs :

- $n+3=-5$ donne $n=-8$ ;
- $n+3=-1$ donne $n=-4$ ;
- $n+3=1$ donne $n=-2$ ;
- $n+3=5$ donne $n=2$.

**Contrôle.** $-5 \mid -5$, $-1 \mid 3$, $1 \mid 7$ et $5 \mid 15$.

**Conclusion.** Les entiers cherchés sont ceux qui vérifient $n \in \{-8,-4,-2,2\}$.

### Exercice 2

## Un produit toujours multiple de 3

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $P = n(n^2+2)$.

### 1.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P$ est un multiple de $3$.

INDICE

Raisonne selon le reste de $n$ dans la division euclidienne par $3$ : trois cas. Dans deux d'entre eux, c'est $n^2+2$ qui est multiple de $3$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{Z}$, et $n = 3q + r$ sa division euclidienne par $3$, avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$. Ces trois cas sont exhaustifs.

**Cas $r = 0$.** Alors $n = 3q$, et $P = 3q(9q^2+2)$ est un multiple de $3$.

**Cas $r = 1$.** On calcule :

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= 9q^2 + 6q + 3 \\ &= 3(3q^2 + 2q + 1), \end{aligned}$$

donc $P = 3(3q+1)(3q^2+2q+1)$.

**Cas $r = 2$.** On calcule :

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= 9q^2 + 12q + 6 \\ &= 3(3q^2 + 4q + 2), \end{aligned}$$

donc $P = 3(3q+2)(3q^2+4q+2)$.

**Conclusion.** Dans chacun des trois cas, $P$ est un multiple de $3$ : c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

### 2.

Montrer que si $n$ est pair, alors $P$ est un multiple de $6$.

INDICE

Montre que $P$ est un multiple de $2$, puis utilise la propriété des multiples communs et du PPCM.

CORRIGÉ

**Multiple de $2$.** Supposons $n$ pair : $n = 2m$, avec $m \in \mathbb{Z}$. Alors $P = 2m(4m^2+2)$ est un multiple de $2$.

**Multiple de $3$.** D'après la question 1, $P$ est aussi un multiple de $3$.

**Multiple de $6$.** Ainsi $P$ est un multiple commun à $2$ et à $3$. D'après la propriété des multiples communs, c'est un multiple de $2 \vee 3$. Or $2 \vee 3 = 6$ : $6$ est multiple de $2$ et de $3$, et aucun des entiers $1$ à $5$ n'est multiple à la fois de $2$ et de $3$.

**Conclusion.** Si $n$ est pair, $P$ est un multiple de $6$.

### 3.

Si $n$ est impair, $P$ est-il un multiple de $6$ ?

INDICE

Étudie la parité de $n^2+2$ quand $n$ est impair.

CORRIGÉ

Supposons $n$ impair : $n = 2m+1$, avec $m \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned} & n^2+2 \\ & = 4m^2+4m+3 \\ & = 2(2m^2+2m+1)+1, \end{aligned}$$

donc $n^2+2$ est impair.

Le produit de deux entiers impairs est impair : $P = n(n^2+2)$ est impair. Il n'est donc pas multiple de $2$, et pas multiple de $6$, car tout multiple de $6$ est pair.

**Conclusion.** Si $n$ est impair, $P$ n'est pas un multiple de $6$.

### Exercice 3

## Une divisibilité par 5, de deux façons

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = 2^{3n+1} + 3^{n+1}$.

### 1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5$ divise $A_n$.

INDICE

Écris $2^{3n+4} = 8 \times 2^{3n+1}$ et $3^{n+2} = 3 \times 3^{n+1}$, puis fais apparaître $8A_n$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $5 \mid A_n$ ».

**Initialisation.** $A_0 = 2^1 + 3^1 = 5 = 5 \times 1$ : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $A_n = 5k$. Comme $2^{3n+4} = 8 \times 2^{3n+1}$ et $3^{n+2} = 3 \times 3^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 2^{3n+4} + 3^{n+2} \\ &= 8 \times 2^{3n+1} \\ &\quad + 3 \times 3^{n+1} \\ &= 8A_n - 5 \times 3^{n+1} \\ &= 5(8k - 3^{n+1}). \end{aligned}$$

Comme $8k - 3^{n+1} \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence, $5$ divise $A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### 2.

Retrouver ce résultat à l'aide des congruences modulo $5$.

INDICE

Écris $2^{3n+1} = 2 \times 8^n$ et remarque que $8 \equiv 3\ [5]$.

CORRIGÉ

**Cas $n = 0$.** $A_0 = 5$ est divisible par $5$.

**Cas $n \geq 1$.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $2^{3n+1} = 2 \times 8^n$ et $8 \equiv 3\ [5]$, donc $8^n \equiv 3^n\ [5]$ par compatibilité avec les puissances. Par compatibilité avec la multiplication et l'addition :

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \times 8^n + 3 \times 3^n \\ &\equiv 2 \times 3^n + 3 \times 3^n\ [5] \\ &\equiv 5 \times 3^n\ [5] \\ &\equiv 0\ [5]. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \equiv 0\ [5]$, c'est-à-dire $5 \mid A_n$ : on retrouve le résultat de la question 1.

### 3.

Calculer $A_3$ et vérifier le résultat.

INDICE

$3n+1=10$ et $n+1=4$.

CORRIGÉ

Pour $n=3$, on a $3n+1=10$ et $n+1=4$ :

$$\begin{aligned} A_3 &= 2^{10}+3^4 \\ &= 1\,024+81 \\ &= 1\,105 \\ &= 5\times 221. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $A_3=1\,105$, et $5$ divise bien $A_3$.

### Exercice 4

## Des entiers qui ont exactement dix diviseurs

On cherche les entiers naturels de la forme $n = 2^a \times 3^b$, où $a$ et $b$ sont des entiers naturels non nuls, qui ont exactement $10$ diviseurs positifs.

### 1.

Exprimer le nombre de diviseurs positifs de $2^a \times 3^b$ en fonction de $a$ et de $b$.

INDICE

L'écriture $2^a \times 3^b$, avec $a \geq 1$ et $b \geq 1$, est déjà une décomposition en facteurs premiers.

CORRIGÉ

Comme $2$ et $3$ sont premiers, avec $a \geq 1$ et $b \geq 1$, l'écriture $n = 2^a \times 3^b$ est la décomposition de $n$ en produit de facteurs premiers.

**Conclusion.** D'après la propriété des diviseurs d'un entier, $n$ a $(a+1)(b+1)$ diviseurs positifs.

### 2.

Déterminer tous les entiers cherchés.

INDICE

Écris $10$ comme produit de deux entiers supérieurs ou égaux à $2$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, on cherche les entiers $a \geq 1$ et $b \geq 1$ tels que :

$$(a+1)(b+1) = 10,$$

avec $a+1 \geq 2$ et $b+1 \geq 2$.

**Factorisations de $10$.** Les diviseurs positifs de $10$ sont $1$, $2$, $5$ et $10$. Un facteur égal à $1$ est exclu, et un facteur égal à $10$ imposerait l'autre égal à $1$. Il reste $10 = 2 \times 5$ et $10 = 5 \times 2$.

**Les deux cas.**

- $a+1 = 2$ et $b+1 = 5$ : $a = 1$, $b = 4$, et $n = 2 \times 81 = 162$.
- $a+1 = 5$ et $b+1 = 2$ : $a = 4$, $b = 1$, et $n = 16 \times 3 = 48$.

**Conclusion.** Les entiers cherchés sont $48$ et $162$.

### 3.

Vérifier le résultat en donnant la liste des diviseurs positifs de $48$.

INDICE

Range les produits $2^{\beta} \times 3^{\gamma}$, avec $0 \leq \beta \leq 4$ et $0 \leq \gamma \leq 1$.

CORRIGÉ

On a $48 = 2^4 \times 3$. Ses diviseurs positifs sont les produits $2^{\beta} \times 3^{\gamma}$, avec $0 \leq \beta \leq 4$ et $0 \leq \gamma \leq 1$ :

- avec $\gamma = 0$ : $1, 2, 4, 8, 16$ ;
- avec $\gamma = 1$ : $3, 6, 12, 24, 48$.

**Conclusion.** L'entier $48$ a bien $10$ diviseurs positifs, comme prévu.

### Exercice 5

## Un PGCD qui dépend de n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 4n + 9$, $b = n + 1$ et $d = a \wedge b$.

**1.**

Montrer que les diviseurs communs à $a$ et à $b$ sont exactement les diviseurs communs à $b$ et à $5$.

INDICE

Écris $a$ en fonction de $b$. Démontre ensuite les deux inclusions, par des combinaisons linéaires.

CORRIGÉ

**Écriture de $a$.** On a $a = 4n + 9 = 4(n + 1) + 5 = 4b + 5$.

Soit $\delta$ un entier relatif.

**Première inclusion.** Si $\delta \mid a$ et $\delta \mid b$, alors, par combinaison linéaire, $\delta \mid a - 4b$, c'est-à-dire $\delta \mid 5$.

**Seconde inclusion.** Si $\delta \mid b$ et $\delta \mid 5$, alors, par combinaison linéaire, $\delta \mid 4b + 5$, c'est-à-dire $\delta \mid a$.

**Conclusion.** Les diviseurs communs à $a$ et à $b$ sont exactement les diviseurs communs à $b$ et à $5$.

**2.**

En déduire que $d = 5$ si $5$ divise $n + 1$, et $d = 1$ sinon.

INDICE

Deux couples qui ont les mêmes diviseurs communs ont le même PGCD. Quels sont les diviseurs positifs de $5$ ?

CORRIGÉ

**Même PGCD.** D'après la question 1, les couples $(a, b)$ et $(b, 5)$ ont les mêmes diviseurs communs, donc le même plus grand d'entre eux :

$$d = b \wedge 5.$$

**Les deux cas.** Comme $5$ est premier, ses diviseurs positifs sont $1$ et $5$.

- Si $5 \mid n + 1$, alors $5$ divise $b$ et $5$ : $d = 5$.
- Sinon, $5$ n'est pas un diviseur commun ; le seul diviseur positif commun est $1$, et $d = 1$.

**Conclusion.** $d = 5$ si $5$ divise $n + 1$, et $d = 1$ sinon.

### 3.

Pour $n = 59$, calculer $a \wedge b$ par l'algorithme d'Euclide, et comparer avec la question 2.

INDICE

Calcule d'abord $a$ et $b$ pour $n = 59$.

CORRIGÉ

Pour $n = 59$, on a $a = 4 \times 59 + 9 = 245$ et $b = 59 + 1 = 60$.

$$245 = 60 \times 4 + 5$$
$$60 = 5 \times 12 + 0$$

Le dernier reste non nul est $5$, donc $a \wedge b = 5$.

**Conclusion.** Pour $n = 59$, $a \wedge b = 5$. C'est cohérent avec la question 2, car $n + 1 = 60 = 5 \times 12$ est un multiple de $5$.

### Exercice 6

## Les puissances de 5 modulo 13

### 1.

Déterminer les restes des divisions euclidiennes de $5$, $5^2$, $5^3$ et $5^4$ par $13$.

INDICE

Multiplie chaque fois le reste précédent par $5$, puis réduis modulo $13$.

CORRIGÉ

On multiplie chaque fois le reste précédent par $5$, puis on réduit modulo $13$.

- $5 \equiv 5\ [13]$.
- $5^2 = 25 = 13 + 12$, donc $5^2 \equiv 12\ [13]$.
- $5^3 \equiv 12 \times 5\ [13]$, et $60 = 13 \times 4 + 8$, donc $5^3 \equiv 8\ [13]$.
- $5^4 \equiv 8 \times 5\ [13]$, et $40 = 13 \times 3 + 1$, donc $5^4 \equiv 1\ [13]$.

**Conclusion.** Les restes de $5$, $5^2$, $5^3$ et $5^4$ par $13$ sont $5$, $12$, $8$ et $1$.

### 2.

En déduire le reste de la division euclidienne de $5^{1003}$ par $13$.

INDICE

Divise l'exposant $1\,003$ par $4$.

CORRIGÉ

**Division de l'exposant.** On a $1\,003 = 4 \times 250 + 3$, donc :

$$5^{1003} = (5^4)^{250} \times 5^3.$$

**Réduction.** Par compatibilité avec les puissances et le produit, et d'après la question 1 :

$$\begin{aligned} 5^{1003} &\equiv 1^{250} \times 8\ [13] \\ &\equiv 8\ [13]. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Comme $0 \leq 8 < 13$, le reste cherché est $8$.

### 3.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $13$ divise $5^{4k+2}+1$.

INDICE

Écris $5^{4k+2} = (5^4)^k \times 5^2$, et utilise la question 1.

CORRIGÉ

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $5^{4k+2} = (5^4)^k \times 25$.

**Le facteur $(5^4)^k$.** Si $k \geq 1$, la compatibilité avec les puissances et la question 1 donnent $(5^4)^k \equiv 1\ [13]$. Si $k = 0$, $(5^4)^0 = 1$.

**Réduction.** Dans les deux cas :

$$\begin{aligned} 5^{4k+2}+1 &\equiv 25+1\ [13] \\ &\equiv 26\ [13] \\ &\equiv 0\ [13], \end{aligned}$$

car $26 = 13 \times 2$.

**Conclusion.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $13$ divise $5^{4k+2}+1$.

### Exercice 7

## Un critère de divisibilité par 7 par tranches de trois chiffres

#### 1.

Vérifier que $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$, puis en déduire que $1\,000 \equiv -1\ [7]$.

INDICE

Pour la congruence, calcule la différence $1\,000 - (-1)$.

CORRIGÉ

**Produit.** On a $7 \times 11 = 77$ et $77 \times 13 = 1\,001$, donc $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$.

**Congruence.** On calcule la différence :

$$\begin{aligned} 1\,000 - (-1) &= 1\,001 \\ &= 7 \times 143. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $7$ divise $1\,000 - (-1)$ : par définition, $1\,000 \equiv -1\ [7]$.

#### 2.

Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels, et $N = 1\,000a + b$. Montrer que $N \equiv b - a\ [7]$.

INDICE

Multiplie la congruence de la question 1 par $a$, puis ajoute $b$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $1\,000 \equiv -1\ [7]$.

**Multiplication par $a$.** Par compatibilité avec la multiplication, $1\,000a \equiv -a\ [7]$.

**Addition de $b$.** Par compatibilité avec l'addition, $1\,000a + b \equiv -a + b\ [7]$.

**Conclusion.** $N \equiv b - a\ [7]$.

#### 3.

L'entier $594\,223$ est-il divisible par $7$ ?

INDICE

Écris $594\,223 = 1\,000 \times 594 + 223$.

CORRIGÉ

On a $594\,223 = 1\,000 \times 594 + 223$. Avec $a = 594$ et $b = 223$, la question 2 donne :

$$\begin{aligned} 594\,223 &\equiv 223 - 594\ [7] \\ &\equiv -371\ [7]. \end{aligned}$$

Or $-371 = 7 \times (-53)$, donc $-371 \equiv 0\ [7]$. Par transitivité, $594\,223 \equiv 0\ [7]$.

**Conclusion.** L'entier $594\,223$ est divisible par $7$.

### 4.

Le même raisonnement vaut-il modulo $13$ ? L'entier $594\,223$ est-il divisible par $13$ ?

INDICE

D'après la question 1, $13$ divise aussi $1\,001$.

CORRIGÉ

**Le raisonnement modulo $13$.** D'après la question 1, $1\,001 = 13 \times 77$, donc $1\,000 - (-1)$ est un multiple de $13$ : $1\,000 \equiv -1\ [13]$. Le calcul de la question 2 s'applique sans changement et donne $N \equiv b - a\ [13]$.

**Le cas de $594\,223$.** On obtient $594\,223 \equiv -371\ [13]$. Or $-371 = 13 \times (-29) + 6$, avec $0 \leq 6 < 13$.

**Conclusion.** Oui, le raisonnement vaut modulo $13$. Le reste de $594\,223$ par $13$ vaut $6 \neq 0$ : l'entier $594\,223$ n'est pas divisible par $13$.

### Exercice 8

## Une même équation dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

On considère l'équation $(E)$ : $x^2 + \overline{3}x + \overline{2} = \overline{0}$, d'inconnue $x$.

### 1.

Résoudre $(E)$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

INDICE

Calcule $x^2 + 3x + 2$ pour $x = 0, 1, \dots, 6$, puis réduis modulo $7$.

CORRIGÉ

Pour chaque classe $\overline{x}$, on calcule $x^2 + 3x + 2$ et on réduit modulo $7$. Par exemple, pour $x = 5$ : $25 + 15 + 2 = 42 = 7 \times 6$.

| $x$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$ | $\overline{2}$ | $\overline{6}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |

**Conclusion.** Les solutions de $(E)$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sont $\overline{5}$ et $\overline{6}$.

### 2.

Résoudre $(E)$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

INDICE

Même méthode, avec six classes ; réduis cette fois modulo $6$.

CORRIGÉ

On procède de même avec les six classes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, en réduisant modulo $6$.

| $x$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |

**Conclusion.** Les solutions de $(E)$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{4}$ et $\overline{5}$ : quatre solutions pour une équation du second degré.

### 3.

En déduire les entiers relatifs $n$ tels que $6$ divise $n^2+3n+2$.

INDICE

$6 \mid n^2+3n+2$ signifie $\overline{n^2+3n+2}=\overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

**Traduction dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.** D'après les opérations sur les classes, $\overline{n^2+3n+2}=\overline{n}^2+\overline{3}\,\overline{n}+\overline{2}$. Donc $6$ divise $n^2+3n+2$ si et seulement si $\overline{n}$ est solution de $(E)$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

**Lecture de la question 2.** Cela équivaut à $\overline{n} \in \{\overline{1},\overline{2},\overline{4},\overline{5}\}$, c'est-à-dire :

- $n \equiv 1\ [6]$, ou $n \equiv 2\ [6]$,
- ou $n \equiv 4\ [6]$, ou $n \equiv 5\ [6]$.

**Conclusion.** Les entiers relatifs $n$ tels que $6$ divise $n^2+3n+2$ sont ceux dont le reste par $6$ vaut $1$, $2$, $4$ ou $5$ : ce sont exactement les entiers qui ne sont pas multiples de $3$.

### Exercice 9

## Les carrés modulo 7 et une équation sans solution

### 1.

Pour chaque entier $r$ tel que $0 \leq r \leq 6$, déterminer le reste de $r^2$ par 7. En déduire les restes possibles du carré d'un entier relatif par 7.

INDICE

Un entier $n$ est congru modulo 7 à son reste $r$ ; élève cette congruence au carré.

CORRIGÉ

**Les carrés des restes.**

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| reste de $r^2$ | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |

**Cas général.** Soit $n \in \mathbb{Z}$, et $r$ son reste par 7. Alors $n \equiv r\ [7]$, donc $n^2 \equiv r^2\ [7]$ par compatibilité avec la multiplication : $n^2$ et $r^2$ ont le même reste par 7.

**Conclusion.** Le reste du carré d'un entier relatif par 7 est $0$, $1$, $2$ ou $4$.

### 2.

Soient $x$ et $y$ deux entiers relatifs tels que 7 divise $x^2 + y^2$. Montrer que 7 divise $x$ et que 7 divise $y$.

INDICE

Note $s$ et $t$ les restes de $x^2$ et de $y^2$ par 7. Commence par montrer que $s + t \equiv 0\ [7]$. Puis dresse les sommes $s + t$ possibles avec $s, t \in \{0, 1, 2, 4\}$ et repère celles qui sont des multiples de 7.

CORRIGÉ

**Les restes des carrés.** Soient $s$ et $t$ les restes de $x^2$ et de $y^2$ par 7. D'après la question 1, $s, t \in \{0, 1, 2, 4\}$, et, par compatibilité avec l'addition :

$$x^2 + y^2 \equiv s + t\ [7].$$

**La somme $s + t$.** Par hypothèse, $x^2 + y^2 \equiv 0\ [7]$, donc $s + t \equiv 0\ [7]$. Comme $0 \leq s + t \leq 8$, on a $s + t = 0$ ou $s + t = 7$. Or les sommes de deux éléments de $\{0, 1, 2, 4\}$ sont $0$, $1$, $2$, $3$, $4$, $5$, $6$ et $8$ : jamais 7. Donc $s + t = 0$, puis $s = t = 0$.

**Retour à $x$ et $y$.** D'après la table, $r^2$ a le reste $0$ seulement pour $r = 0$ : le reste de $x$ par 7 est $0$, donc $7 \mid x$. De même, $7 \mid y$.

**Conclusion.** Si 7 divise $x^2 + y^2$, alors 7 divise $x$ et 7 divise $y$.

### 3.

En déduire que l'équation $x^2 + y^2 = 147$ n'a aucune solution $(x, y)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

INDICE

Raisonne par l'absurde : écris $x = 7u$ et $y = 7v$, puis simplifie par $49$.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $x^2 + y^2 = 147$.

**Divisibilité par $7$.** Comme $147 = 7 \times 21$, $7$ divise $x^2 + y^2$. D'après la question 2, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 7u$ et $y = 7v$. Alors $49(u^2 + v^2) = 147 = 49 \times 3$, donc :

$$u^2 + v^2 = 3.$$

**Contradiction.** Si $|u| \geq 2$, alors $u^2 \geq 4 > 3$ : c'est impossible. Donc $u^2 \in \{0, 1\}$, et de même $v^2 \in \{0, 1\}$. Alors $u^2 + v^2 \leq 2 < 3$ : c'est une contradiction.

**Conclusion.** L'équation $x^2 + y^2 = 147$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.