BURHAN

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/arithmetique-dans-z/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Application	11

Exercice 1

Vérifier une divisibilité

1.

Montrer que -17 divise 391.

INDICE

Cherche un entier k tel que $391 = k \times (-17)$. Commence par diviser 391 par 17.

2.

Montrer que $13 \nmid 200$.

INDICE

Effectue la division euclidienne de 200 par 13 et regarde le reste.

3.

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a - 1$ divise $a^3 - 1$.

INDICE

Factorise $a^3 - 1$ par $a - 1$: le second facteur est un polynôme du second degré en a.

Exercice 2

Éliminer n par une combinaison linéaire

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et d un entier relatif qui divise à la fois $3n+4$ et $5n+7$.

1.

Calculer $5(3n+4) - 3(5n+7)$.

INDICE

Développe chaque produit, puis regroupe les termes en n.

2.

En déduire les valeurs possibles de d.

INDICE

Un entier qui divise deux nombres divise toute combinaison linéaire de ces nombres. Compare ensuite $|d|$ et 1.

3.

Contrôler ce résultat pour $n = 6$, en cherchant les diviseurs positifs communs à $3n+4$ et à $5n+7$.

INDICE

Pour $n = 6$, calcule les deux entiers, puis liste les diviseurs positifs du plus petit.

Exercice 3

Division euclidienne d'un entier négatif

1.

Effectuer la division euclidienne de 215 par 12.

INDICE

Cherche le plus grand multiple de 12 inférieur ou égal à 215.

2.

Effectuer la division euclidienne de -215 par 12.

INDICE

Encadre -215 entre deux multiples consécutifs de 12 : le quotient est négatif, le reste ne l'est pas.

3.

Un élève écrit $-215 = 12 \times (-17) - 11$. Cette égalité est-elle juste ? Donne-t-elle la division euclidienne de -215 par 12 ?

INDICE

Calcule le membre de droite, puis vérifie la condition imposée au reste.

Exercice 4

Tester la primalité de deux entiers

1.

Donner la liste des nombres premiers p tels que $p^2 \leq 331$.

INDICE

Calcule les carrés des nombres premiers successifs, jusqu'au premier qui dépasse 331.

2.

L'entier 331 est-il premier ?

INDICE

Divise 331 par chacun des nombres de la question 1 et regarde les restes.

3.

L'entier 323 est-il premier ?

INDICE

Les nombres premiers à tester sont les mêmes qu'à la question 1, car $17^2 \leq 323 < 19^2$.

Exercice 5

Décomposer deux entiers en facteurs premiers

1.

Décomposer $3\,528$ en produit de facteurs premiers.

INDICE

Divise par 2 autant de fois que possible, puis par 3.

2.

Décomposer $5\,445$ en produit de facteurs premiers.

INDICE

L'entier est impair et se termine par 5 : commence par diviser par 5.

3.

Montrer que $3\,528 \times 2$ est le carré d'un entier.

INDICE

Écris la décomposition de $3\,528 \times 2$: quand tous les exposants sont pairs, regroupe les facteurs pour faire apparaître un carré.

Exercice 6

Les diviseurs positifs de 675

1.

Décomposer 675 en produit de facteurs premiers.

INDICE

L'entier se termine par 5 et la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

2.

Combien 675 a-t-il de diviseurs positifs ?

INDICE

Ajoute 1 à chaque exposant de la décomposition, puis multiplie.

3.

Donner la liste de ces diviseurs.

INDICE

Les diviseurs positifs sont les produits $3^{\beta} \times 5^{\gamma}$, avec $0 \leq \beta \leq 3$ et $0 \leq \gamma \leq 2$: range-les dans un tableau.

Exercice 7

Un PGCD par l'algorithme d'Euclide

1.

Calculer $2\,431 \wedge 1\,001$ par l'algorithme d'Euclide.

INDICE

Divise $2\,431$ par $1\,001$, puis le diviseur par le reste, jusqu'à un reste nul.

2.

En déduire la liste des diviseurs positifs communs à $2\,431$ et à $1\,001$.

INDICE

Les diviseurs communs à deux entiers sont exactement les diviseurs de leur PGCD. Décompose 143.

3.

En déduire $4\,862 \wedge 2\,002$, sans nouvelle division.

INDICE

Fais apparaître un facteur commun aux deux entiers.

Exercice 8

PGCD et PPCM par les décompositions

1.

Décomposer 84 et 90 en produits de facteurs premiers.

INDICE

Commence par diviser chacun d'eux par 2.

2.

Calculer $84 \wedge 90$ et $84 \vee 90$, puis contrôler le résultat.

INDICE

Écris les deux entiers avec les nombres premiers 2, 3, 5 et 7, quitte à mettre des exposants nuls.

3.

Déterminer les multiples communs à 84 et à 90 compris entre $3\,000$ et $5\,000$.

INDICE

Les multiples communs à deux entiers sont exactement les multiples de leur PPCM.

Exercice 9

Reconnaître une congruence

1.

Montrer que $143 \equiv -1 \ [12]$.

INDICE

Calcule la différence $143 - (-1)$.

2.

Trouver l'entier r tel que $0 \leq r < 9$ et $-58 \equiv r \ [9]$.

INDICE

Effectue la division euclidienne de -58 par 9 : le reste convient.

3.

A-t-on $2\,018 \equiv 53 \ [15]$? A-t-on $2\,018 \equiv 53 \ [14]$?

INDICE

Calcule $2\,018 - 53$, puis divise-le par 15 et par 14.

Exercice 10

Un reste sans grand calcul

1.

Déterminer les restes des divisions euclidiennes de $1\,234$, de $5\,678$ et de 999 par 7.

INDICE

Cherche pour chaque entier le plus grand multiple de 7 qui lui est inférieur ou égal.

2.

En déduire que 7 divise $1\,234 \times 5\,678 + 999$.

INDICE

Chaque entier est congru à son reste modulo 7 ; la congruence est compatible avec le produit et la somme.

3.

Déterminer le reste de la division euclidienne de 13^{15} par 7.

INDICE

Trouve un entier très simple congru à 13 modulo 7.

Exercice 11

La table de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

1.

Dresser la table de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

INDICE

Dans la case de la ligne $\overline{a}$ et de la colonne $\overline{b}$, écris la classe $\overline{r}$, où r est le reste de ab par 6.

2.

Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'équation $x \times \overline{3} = \overline{0}$.

INDICE

Lis la colonne de $\overline{3}$ dans la table.

3.

Calculer $\overline{4} + \overline{5} \times \overline{3}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

INDICE

Comme dans $\mathbb{Z}$, la multiplication passe avant l'addition.