BURHAN

Résumé : Analytique du produit scalaire et applications

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/resume

Chapitre	Semestre
Analytique du produit scalaire et applications	Semestre 1

Produit scalaire : définition et expression analytique

À retenir : Le réflexe : annoncer le repère

Avant tout calcul par les coordonnées, annonce le repère : « le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ». Les formules de ce chapitre exigent un repère **orthonormé**.

Écris ensuite les coordonnées de chaque vecteur : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs (rappel)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Sinon, en notant θ la mesure, dans $[0, \pi]$, de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'un d'eux est nul ou si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Remarque

Cette définition est **supposée acquise** du tronc commun : elle n'est pas redémontrée dans ce chapitre. Tout le reste en découle ici, dans l'ordre : l'expression analytique, puis la symétrie, la linéarité, le carré scalaire et l'orthogonalité.

Théorème : Expression analytique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Propriété : Propriétés du produit scalaire ; orthogonalité

Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$, $\vec{w}$ et tout réel λ :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \, (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \, \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est-à-dire $xx' + yy' = 0$.

Produit scalaire de u(x, y) et v(x', y')

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Norme de u(x, y)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Distance de deux points A et B

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Déterminant de u(x, y) et v(x', y')

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$$

Méthode : montrer une orthogonalité

1. **Choisir** un vecteur de chaque objet : les vecteurs donnés, ou un vecteur directeur ou normal de chaque droite.
2. **Calculer** leur produit scalaire $xx' + yy'$ par l'expression analytique du produit scalaire.
3. **Conclure** par le critère d'orthogonalité : les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire est nul.

Rédaction : « $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, donc, d'après le critère d'orthogonalité, les vecteurs sont orthogonaux, et le triangle est rectangle en A ».

Exemple

Énoncé. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $A(2, -1)$, $B(5, 3)$ et $C(-2, 2)$. Montre que ABC est rectangle en A, puis calcule BC.

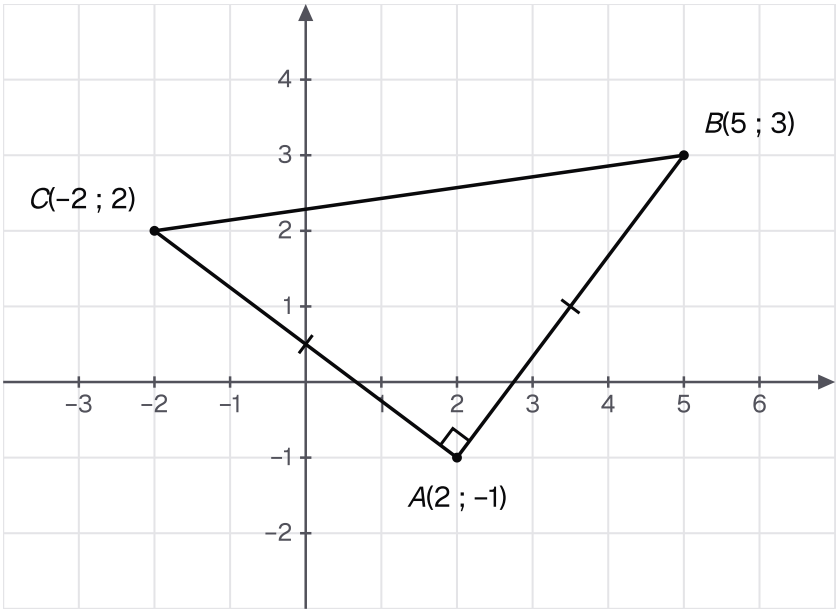
Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(3, 4)$ et $\overrightarrow{AC}(-4, 3)$.

Orthogonalité. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-4) + 4 \times 3 = 0.$$

D'après le critère d'orthogonalité, (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle est rectangle en A.

Distances. $AB = AC = 5$, et $\overrightarrow{BC}(-7, -1)$ donne $BC = \sqrt{49 + 1} = 5\sqrt{2}$.



Rectangle en A et isocèle : AB = AC = 5, et l'hypoténuse [BC] mesure 5√2.

Attention : Un produit scalaire est un nombre

Le produit scalaire est un **réel**. Écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ n'a aucun sens, alors que $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$ est un vecteur. Et la formule $xx' + yy'$ ne vaut que dans un repère **orthonormé** : c'est pour cela que tu l'annonces.

Cosinus et sinus d'un angle orienté

Théorème : Cosinus et sinus d'un angle orienté

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs non nuls, et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$ leur **déterminant**. Pour toute mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$:

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy'}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|},$$
$$\sin\theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

En particulier :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta,$$
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta.$$

Méthode : cosinus, sinus et mesure d'un angle orienté

1. **Annoncer** le repère orthonormé direct, puis lire $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, tous deux non nuls.
2. **Calculer** $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et les deux normes.
3. **Diviser** par $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$: tu obtiens $\cos\theta$ et $\sin\theta$ (formule du cosinus et du sinus d'un angle orienté).

4. **Reconnaître** l'angle par ses **deux** valeurs. Si elles ne sont pas remarquables, donne seulement $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Rédaction : « d'après la formule du cosinus et du sinus d'un angle orienté, $\cos\theta = \dots$ et $\sin\theta = \dots$, donc $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \dots\ [2\pi]$ ».

Exemple

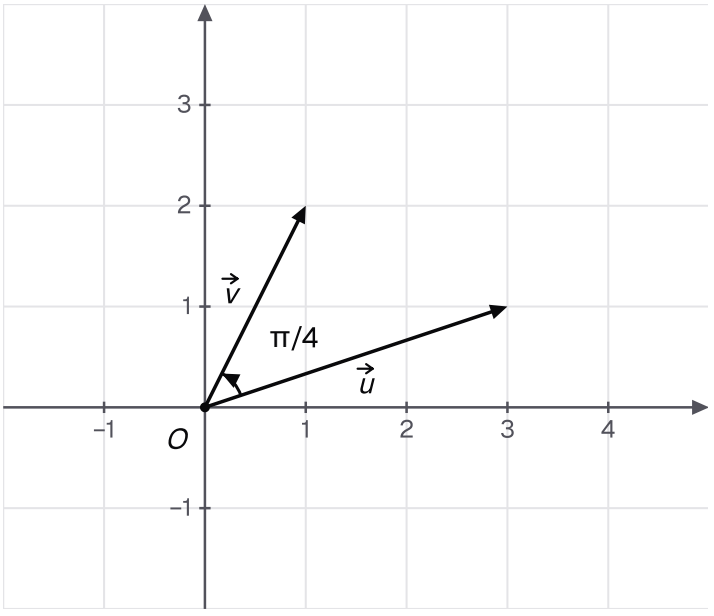
Énoncé. Dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, soit $\vec{u}(3,1)$ et $\vec{v}(1,2)$. Donne une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$.

Calculs. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3+2 = 5$ et $\det(\vec{u},\vec{v}) = 3\times 2 - 1\times 1 = 5$. De plus, $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = \sqrt{10}\times\sqrt{5} = 5\sqrt{2}$.

Lignes. Soit θ une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$. D'après la formule du cosinus et du sinus d'un angle orienté :

$$\cos\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

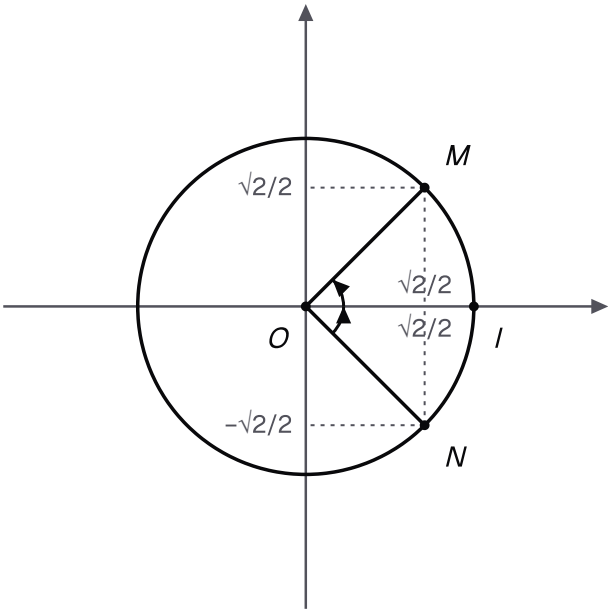
Conclure. $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$, et donc $(\vec{v},\vec{u}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.



De u vers v, l'arc fléché tourne dans le sens direct : sinus positif, mesure π/4.

Attention : Le cosinus seul ne suffit pas

Le cosinus seul ne fixe pas l'angle orienté : $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ convient à $\dfrac{\pi}{4}$ comme à $-\dfrac{\pi}{4}$. C'est le **signe du déterminant**, donc celui de $\sin\theta$, qui tranche.



Sur le cercle trigonométrique, M et N ont la même abscisse √2/2 mais des ordonnées opposées : seul le sinus les sépare.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &|xx' + yy'| \\ &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \, \sqrt{x'^2 + y'^2}. \end{aligned}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété : Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

En particulier, pour tous points A, B et C : $AC \leq AB + BC$.

À retenir : Reconnaître un produit scalaire

Point important : une expression $ax + by$ est le produit scalaire de $\vec{u}(a, b)$ et de $\vec{v}(x, y)$. Pour la majorer, applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \, \sqrt{x^2 + y^2}.$$

> Le cas d'égalité, celui des vecteurs colinéaires, dit où la borne est atteinte.

Exemple

Énoncé. Montre que, pour tous réels a et b, $|3a+4b| \leq 5\sqrt{a^2+b^2}$, et trouve les cas d'égalité.

Vecteurs. Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, pose $\vec{u}(3,4)$ et $\vec{v}(a,b)$. Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3a+4b$ et $\|\vec{u}\| = 5$.

Inégalité. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|3a+4b| \leq 5\sqrt{a^2+b^2}$.

Égalité. Elle a lieu si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $3b-4a=0$. Par exemple, $a=6$ et $b=8$ donnent $50 = 5\times 10$.

Droites : vecteur normal, perpendiculaires, parallèles

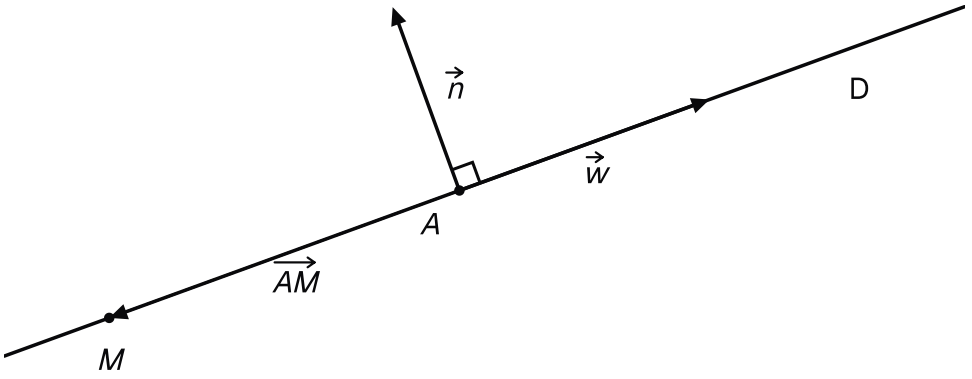
Définition : Vecteur normal à une droite

Soit D une droite. Un **vecteur normal** à D est un vecteur **non nul** orthogonal à un vecteur directeur de D.

Théorème : Droite définie par un point et un vecteur normal ; équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, soit $A(x_A, y_A)$ un point et $\vec{n}(a, b)$ un vecteur non nul.

- La droite D passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Elle a pour équation $ax + by + c = 0$, avec $c = -ax_A - by_A$.
- Réciproquement, pour tous réels a, b et c tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(-b, a)$.



Vecteur normal n et vecteur directeur w d'une même droite D : ils sont perpendiculaires, et AM est toujours colinéaire à w.

Méthode : équation d'une droite de vecteur normal donné

1. **Trouver** un point A de la droite et un vecteur normal $\vec{n}(a, b)$, orthogonal à la droite : le côté opposé pour une hauteur (par exemple $\overrightarrow{BC}$ pour la hauteur issue de A), le segment lui-même pour une médiatrice.
2. **Écrire** $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ pour $M(x, y)$ (droite définie par un point et un vecteur normal).
3. **Développer** jusqu'à la forme $ax + by + c = 0$.
4. **Vérifier** que les coordonnées de A satisfont l'équation.

Rédaction : « $M(x,y)$ appartient à D si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, soit … ; vérification : A convient ».

Exemple

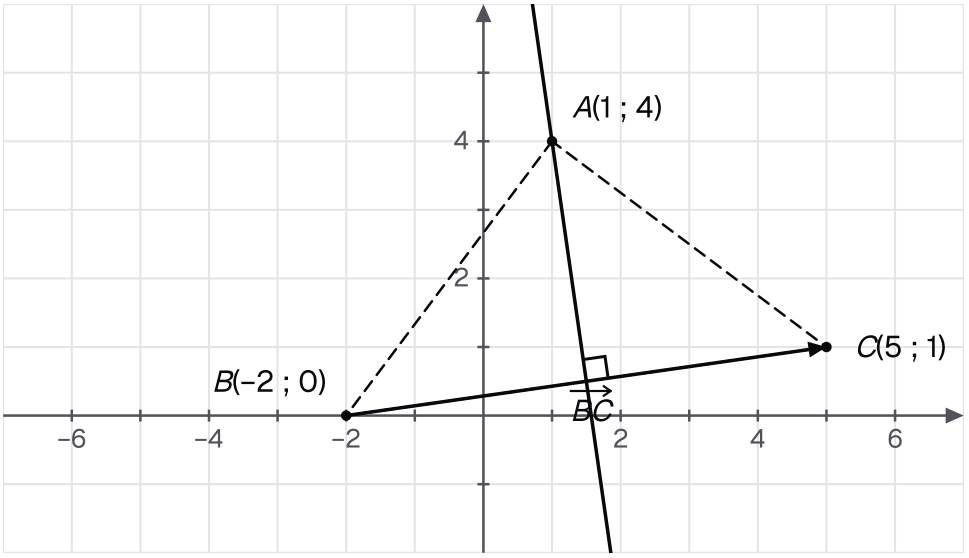
Énoncé. Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, soit $A(1,4)$, $B(-2,0)$ et $C(5,1)$. Écris une équation de la hauteur h_A du triangle ABC issue de A.

Vecteur normal. h_A passe par A et elle est perpendiculaire à (BC) : le vecteur $\overrightarrow{BC}(7,1)$ lui est normal.

Équation. Le point A et le vecteur normal $\overrightarrow{BC}$ caractérisent la droite : $M(x,y)$ appartient à h_A si et seulement si $7(x-1)+(y-4)=0$, soit :

$$h_A : 7x+y-11=0.$$

Vérifier. $7\times 1+4-11=0$: le point A convient.



La hauteur issue de A tombe à angle droit sur [BC] ; le vecteur BC(7, 1) sert de vecteur normal à cette hauteur.

Attention : Normal ou directeur : ne pas confondre

Pour la droite $5x+2y-3=0$, le vecteur $\vec{n}(5,2)$ est **normal** ; un vecteur **directeur** est $\vec{w}(-2,5)$. Contrôle : $\vec{n}\cdot\vec{w}=-10+10=0$. Échanger les deux rôles donne une droite perpendiculaire à celle que tu cherches.

Propriété : Droites perpendiculaires, droites parallèles

Soit $D : ax+by+c=0$ et $D' : a'x+b'y+c'=0$ deux droites, avec $(a,b)\neq(0,0)$ et $(a',b')\neq(0,0)$.

- D et D' sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'=0$.

- D et D' sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Exemple

Énoncé. Compare les droites $D : 4x - 6y + 5 = 0$, $D' : 2x - 3y - 7 = 0$ et $D'' : 3x + 2y = 0$.

D et D'. $ab' - a'b = 4 \times (-3) - 2 \times (-6) = 0$: d'après le critère de parallélisme, elles sont parallèles. Le point $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ est sur D', mais $4 \times \frac{7}{2} + 5 = 19 \neq 0$: elles sont distinctes.

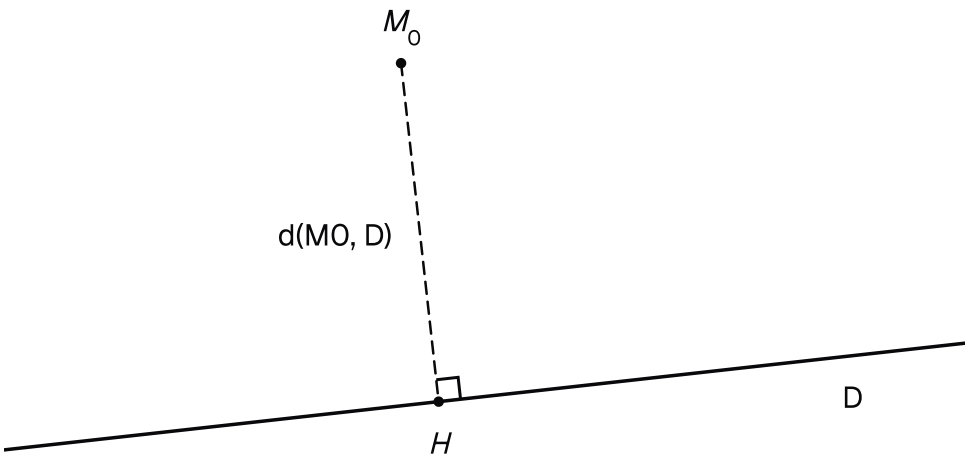
D et D''. $aa' + bb' = 4 \times 3 + (-6) \times 2 = 0$: d'après le critère de perpendicularité, elles sont perpendiculaires.

Distance d'un point à une droite

Théorème : Distance d'un point à une droite

Soit $D : ax + by + c = 0$ une droite, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et $M_0(x_0, y_0)$ un point. Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur D ; la **distance** de M_0 à D est $d(M_0, D) = M_0H$. Alors :

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



La distance d(M0, D) est la longueur M0H, où H est le projeté orthogonal de M0 sur la droite D.

Méthode : la distance d'un point à une droite

1. **Mettre** l'équation de la droite sous la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
2. **Remplacer** x et y par les coordonnées du point, puis prendre la valeur absolue.

3. **Diviser** par $\sqrt{a^2+b^2}$, puis simplifier.

Rédaction : « d'après la formule de la distance à une droite, $d(M_0, D) = \dots$ ».

Exemple

Énoncé. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, calcule la distance du point $M_0(-1, 3)$ à la droite $D : 8x - 6y + 1 = 0$.

Formule. Ici $(a, b) = (8, -6) \neq (0, 0)$ et $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{100} = 10$. D'après la formule de la distance à une droite :

$$d(M_0, D) = \frac{|8 \times (-1) - 6 \times 3 + 1|}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

Attention : Forme ax + by + c = 0, valeur absolue, racine

La droite $y = -3x + 2$ s'écrit d'abord $3x + y - 2 = 0$. La distance de O à cette droite vaut alors $\frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, et non $\frac{2}{10}$: le dénominateur est une **racine carrée**, et la valeur absolue est indispensable.

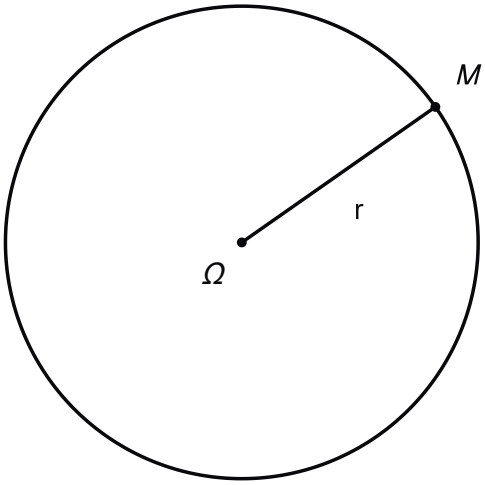
Équation d'un cercle, cercle de diamètre [AB]

Théorème : Équation cartésienne d'un cercle

Soit $\Omega(a, b)$ un point et r un réel strictement positif. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

c'est-à-dire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.



Un point M est sur le cercle de centre Ω exactement quand ΩM vaut le rayon r.

Théorème : Ensemble des points d'équation x² + y² − 2ax − 2by + c = 0

Soit a, b et c trois réels, E l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, et $k=a^2+b^2-c$.

- Si $k>0$, E est le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.
- Si $k=0$, E est réduit au point $\Omega(a,b)$.
- Si $k<0$, E est vide.

Méthode : reconnaître l'ensemble d'équation x² + y² − 2ax − 2by + c = 0

1. **Identifier** a et b : les coefficients de x et de y valent $-2a$ et $-2b$. Si x^2 et y^2 ont un même coefficient λ non nul et différent de 1, divise d'abord l'équation par λ.
2. **Compléter les carrés** : $x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$, et de même en y.
3. **Calculer** $k=a^2+b^2-c$, puis **conclure** selon son signe.

Rédaction : « l'équation équivaut à $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ avec $k>0$, donc l'ensemble est le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $\sqrt{k}$ ».

Exemple

Énoncé. Reconnais l'ensemble E des points $M(x,y)$ tels que $x^2+y^2+6x-4y-12=0$.

Carrés. $x^2+6x=(x+3)^2-9$ et $y^2-4y=(y-2)^2-4$. L'équation équivaut donc à

$$(x+3)^2+(y-2)^2=25.$$

Conclure. Ici $k = 25 > 0$: d'après l'étude de l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, E est le cercle de centre $\Omega(-3, 2)$ et de rayon 5.

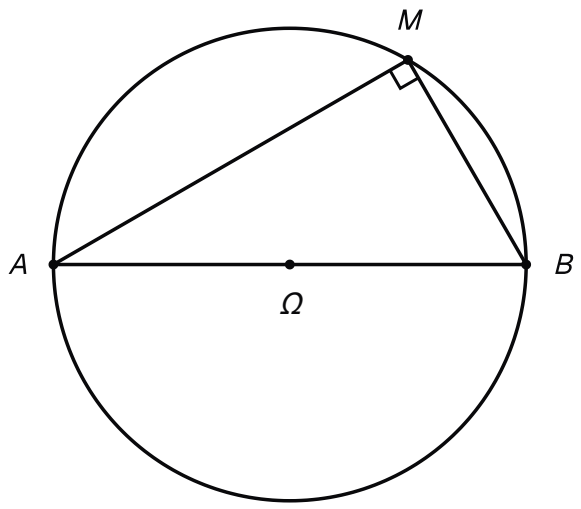
Attention : Pas de cercle sans k > 0

Avant de lire un rayon, calcule k. Pour $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$, on trouve $k = 4 + 1 - 5 = 0$: l'ensemble est réduit au point $\Omega(2, -1)$. Ce n'est pas un cercle, car un rayon est strictement positif.

Propriété : Cercle de diamètre [AB]

Soit A et B deux points distincts. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$



Avec M sur le cercle de diamètre [AB], autre que A et B, les vecteurs MA et MB sont orthogonaux.

Exemple

Énoncé. Écris une équation du cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(1, -2)$ et $B(5, 4)$.

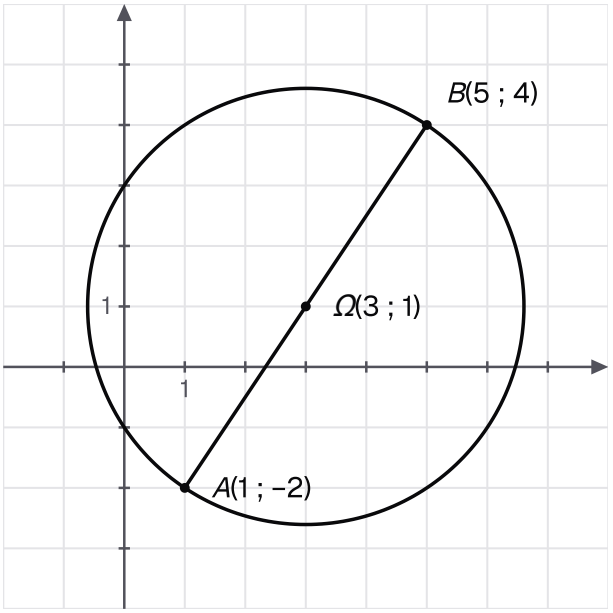
Produit scalaire. D'après la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$, $M(x, y)$ est sur ce cercle si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, soit

$$\begin{aligned}&(1 - x)(5 - x)\\ &\quad + (-2 - y)(4 - y) = 0.\end{aligned}$$

Développer. On obtient $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$, c'est-à-dire

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13.$$

Contrôle. Le centre $(3, 1)$ est le milieu de $[AB]$, et le rayon $\sqrt{13}$ vaut bien $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$.



Le cercle de diamètre [AB], avec A(1, -2) et B(5, 4) : centre (3, 1), rayon √13.

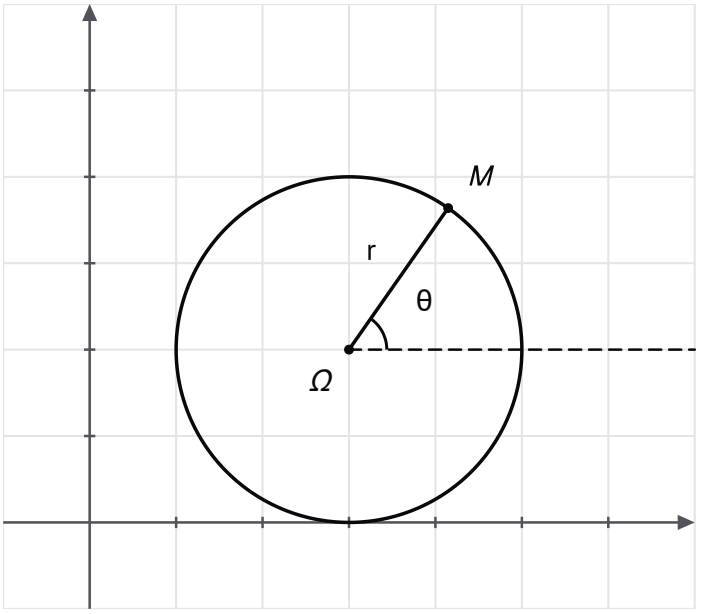
Représentation paramétrique d'un cercle

Théorème : Représentation paramétrique d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel θ tel que

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

Ce système, où θ décrit $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** de $\mathcal{C}$.



Le paramètre θ repère le point M du cercle : c'est l'angle entre la direction de l'axe des abscisses et le rayon [ΩM].

Méthode : de l'équation au paramétrage, et retour

1. **Vers le paramétrage** : lis le centre $\Omega(a, b)$ et le rayon r, puis écris $x = a + r\cos\theta$ et $y = b + r\sin\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
2. **Vers l'équation** : isole $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis utilise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
3. **Contrôler** que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont multipliés par le **même** nombre non nul : le rayon, strictement positif, est sa valeur absolue (voir l'encadré ci-dessous).

Rédaction : « c'est la représentation paramétrique d'un cercle avec $a = \ldots$, $b = \ldots$ et $r = \cdots > 0$, donc l'ensemble est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r ».

Exemple

Énoncé. Reconnais l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x = -2 + \sqrt{5}\cos\theta$ et $y = 3 + \sqrt{5}\sin\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Lire. C'est la représentation paramétrique d'un cercle avec $a = -2$, $b = 3$ et $r = \sqrt{5} > 0$: l'ensemble est le cercle de centre $\Omega(-2, 3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Équation. Pour tout réel θ :

$$\begin{aligned}&(x+2)^2 + (y-3)^2\\ &= 5\cos^2\theta + 5\sin^2\theta = 5,\end{aligned}$$

soit $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$.

Attention : Le rayon est un coefficient positif

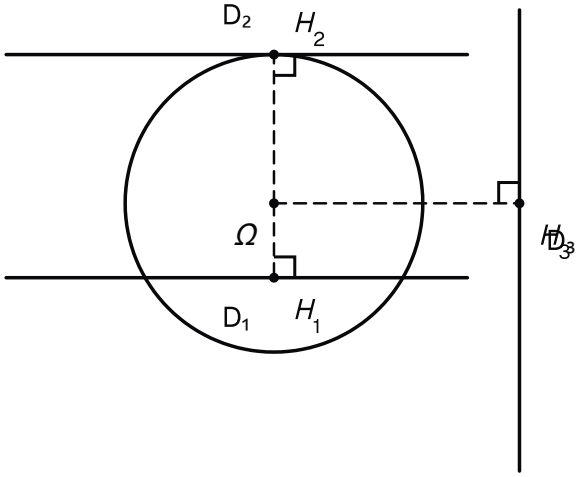
Le système $x = 3 - 2\cos\theta$, $y = 1 - 2\sin\theta$ décrit bien un cercle, mais son rayon n'est pas -2. Pose $\varphi = \theta + \pi$: alors $x = 3 + 2\cos\varphi$ et $y = 1 + 2\sin\varphi$. C'est le cercle de centre $(3, 1)$ et de rayon 2.

Position relative d'une droite et d'un cercle

Théorème : Position relative d'une droite et d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, D une droite, et $d = d(\Omega, D)$.

- Si $d > r$, D et $\mathcal{C}$ n'ont aucun point commun.
- Si $d = r$, D et $\mathcal{C}$ ont un seul point commun : le projeté orthogonal H de Ω sur D.
- Si $d < r$, D et $\mathcal{C}$ ont exactement deux points communs.



Selon que d(Ω, D) est inférieure, égale ou supérieure au rayon, la droite coupe le cercle, le touche, ou passe à côté.

Méthode : position relative et points communs

1. **Lire** le centre Ω et le rayon r du cercle, et une équation $ax + by + c = 0$ de la droite.
2. **Calculer** $d = d(\Omega, D)$ par la formule de la distance à une droite, puis **comparer** d et r.
3. **Pour les points communs**, résoudre le système : tire x ou y de l'équation de la droite, puis résous l'équation du second degré obtenue.
4. **Contrôler** que le nombre de solutions, lu sur le discriminant, est celui qu'annonce le théorème de position relative.

Rédaction : « $d(\Omega, D) = \cdots < r$, donc, d'après le théorème de position relative, D coupe $\mathcal{C}$ en deux points ».

Exemple

Énoncé. Soit $\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ et $D : x - 2y + 1 = 0$. Étudie leur position et leurs points communs.

Comparer. $\mathcal{C}$ a pour centre $\Omega(2, -1)$ et pour rayon 5. Or

$$d(\Omega, D) = \frac{|2 + 2 + 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < 5.$$

Il y a donc deux points communs, d'après le théorème de position relative.

Système. D donne $x = 2y - 1$. En remplaçant : $(2y-3)^2 + (y+1)^2 = 25$, soit

$$y^2 - 2y - 3 = 0.$$

Le discriminant vaut 16 : $y = 3$ ou $y = -1$.

Points. $(5, 3)$ et $(-3, -1)$ vérifient les deux équations.

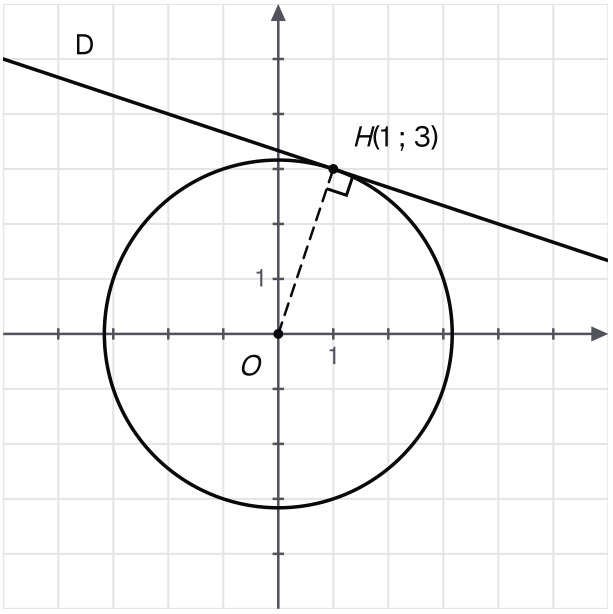
Exemple

Énoncé. Montre que $D : x + 3y - 10 = 0$ est tangente au cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 10$, et trouve le point de contact.

Comparer. $\mathcal{C}$ a pour centre O et pour rayon $\sqrt{10}$. Or $d(O, D) = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$, le rayon.

D'après le théorème de position relative, D et $\mathcal{C}$ ont un seul point commun, le projeté orthogonal H de O sur D. D'après la réciproque de l'équation de la tangente en un point, D est tangente à $\mathcal{C}$ en H.

Contact. D donne $x = 10 - 3y$, puis $10y^2 - 60y + 90 = 0$, soit $(y-3)^2 = 0$. La racine double $y = 3$ donne le seul point $H(1, 3)$.



La droite D est à la distance √10 de O, le rayon du cercle : elle le touche en H(1, 3), où [OH] lui est perpendiculaire.

À retenir : La distance prédit, le système calcule

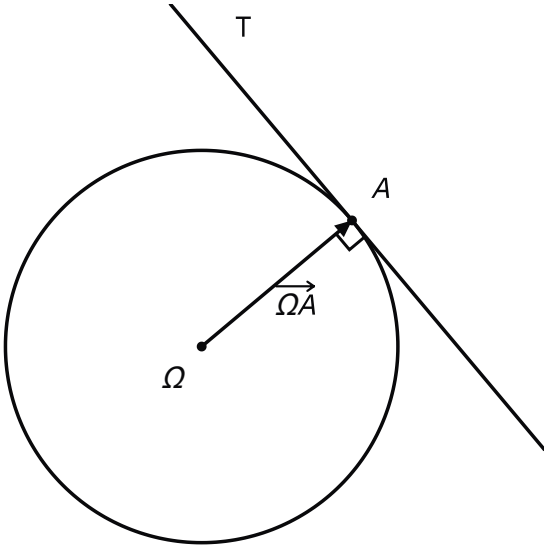
Point important : comparer $d(\Omega, D)$ et r dit **combien** il y a de points communs, sans résoudre de système. Le système dit **lesquels**.

Un discriminant négatif, nul ou positif correspond à $d > r$, $d = r$ ou $d < r$.

Tangente à un cercle en un point

Définition : Tangente à un cercle en un point

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, et A un point de $\mathcal{C}$; le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est non nul, car $\Omega A = r$. La **tangente** à $\mathcal{C}$ en A est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.



En un point A du cercle, la tangente est la droite passant par A dont ΩA est un vecteur normal.

Propriété : Équation de la tangente en un point

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $r>0$, et $A(x_A,y_A)$ un point de $\mathcal{C}$. La tangente T à $\mathcal{C}$ en A a pour équation

$$\begin{aligned}&(x_A-a)(x-x_A)\\&\quad+(y_A-b)(y-y_A)=0,\end{aligned}$$

et A est le seul point commun à T et à $\mathcal{C}$.

Réciproquement, toute droite D telle que $d(\Omega,D)=r$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au projeté orthogonal de Ω sur D ; on dit que D est **tangente** à $\mathcal{C}$.

Méthode : la tangente en un point du cercle

1. **Vérifier** que le point A appartient au cercle : ses coordonnées satisfont l'équation.
2. **Calculer** $\overrightarrow{\Omega A}$: c'est un vecteur normal à la tangente (définition de la tangente).
3. **Écrire** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=0$, développer, puis vérifier que A convient.

Rédaction : « A appartient à $\mathcal{C}$; d'après l'équation de la tangente, la tangente en A a pour équation … ».

Exemple

Énoncé. Écris une équation de la tangente T en $A(1,5)$ au cercle $\mathcal{C}$: $(x+1)^2+(y-2)^2=13$.

Appartenance. $(1+1)^2+(5-2)^2=4+9=13$: le point A appartient à $\mathcal{C}$.

Équation. Le centre est $\Omega(-1, 2)$ et $\overrightarrow{\Omega A}(2, 3)$. D'après l'équation de la tangente, $2(x-1)+3(y-5)=0$, soit :

$$T : 2x + 3y - 17 = 0.$$

Contrôle. $d(\Omega, T) = \dfrac{|-2+6-17|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$: c'est bien le rayon.

Attention : Le rayon est normal à la tangente

La tangente en A est **perpendiculaire** au rayon $[\Omega A]$: $\overrightarrow{\Omega A}$ lui est **normal**, pas directeur. Et si A n'est pas sur le cercle, il n'y a pas de tangente en A : vérifie l'appartenance avant tout.

À retenir : Coin devoir : les formes de questions

Un devoir surveillé enchaîne des questions types.

- « Montrer que ABC est rectangle » : un produit scalaire nul, avec l'énoncé nommé.
- « Reconnaître l'ensemble » : la forme canonique, puis le signe de k.
- « Étudier la position relative » : $d(\Omega, D)$ comparé à r, puis le système résolu.
- « Écrire la tangente » : l'appartenance, puis le vecteur normal.

Rédige chaque réponse comme une courte preuve. Annonce le repère orthonormé, nomme l'énoncé employé et vérifie ses conditions : vecteurs non nuls, $(a, b) \neq (0, 0)$, $r > 0$, point sur le cercle.

Termine par une phrase de conclusion, et contrôle chaque équation sur un point connu.