BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

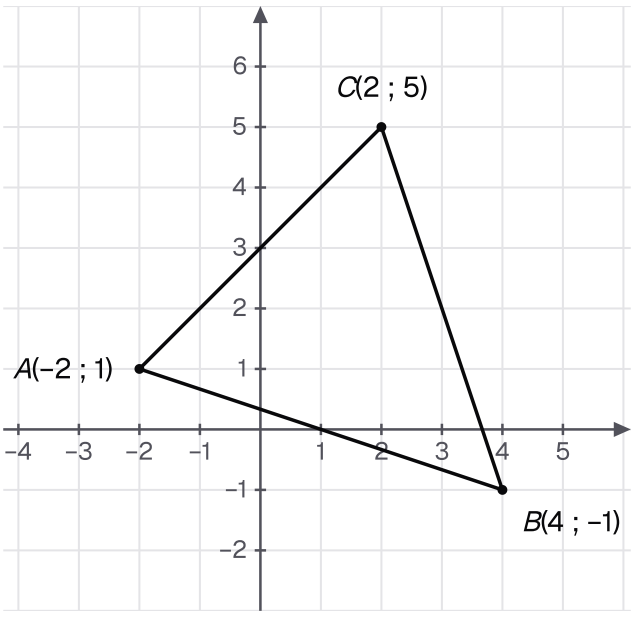
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Niveau examen	5

Exercice 1 — 10 pts

Problème : Un triangle isocèle et son orthocentre

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-2, 1)$, $B(4, -1)$ et $C(2, 5)$. Fais un croquis sur papier.



Les trois sommets de l'énoncé, A(-2, 1), B(4, -1) et C(2, 5), et le triangle qu'ils forment.

1. — 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, AB et AC.

2. — 1 pts

En déduire $\cos\theta$ et $\sin\theta$, où θ désigne une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

INDICE

Calcule d'abord $AB \times AC$ en simplifiant $\sqrt{10} \times \sqrt{2}$. Les valeurs ne sont pas remarquables.

3. — 0,5 pts

Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

4. — 1 pts

Montrer que la droite (AB) a pour équation $x + 3y - 1 = 0$.

5. — 1 pts

Calculer la distance du point C à la droite (AB).

6. — 1 pts

En déduire l'aire du triangle ABC.

7. 1 pts

Écrire une équation de la hauteur h_C du triangle issue de C.

8. 1,5 pts

Écrire une équation de la médiatrice Δ de $[AC]$. Montrer que B appartient à Δ, puis que Δ est la hauteur du triangle issue de B.

INDICE

La médiatrice passe par le milieu de $[AC]$, avec $\overrightarrow{AC}$ pour vecteur normal. La hauteur issue de B a le même vecteur normal.

9. 2 pts

En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC, et contrôler que (AH) est perpendiculaire à (BC).

INDICE

L'orthocentre est le point commun des hauteurs : résous le système formé par les équations de h_C et de Δ.

Exercice 2 — 10 pts

Problème : Un cercle, une sécante et des tangentes

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$, et D la droite d'équation $x + y - 7 = 0$. Fais un croquis sur papier et complète-le au fil des questions.

1. — 1 pts

Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

2. — 1,5 pts

Vérifier que le point $A(6, 3)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

3. — 1 pts

Montrer que D coupe $\mathcal{C}$ en deux points.

INDICE

Compare $d(\Omega, D)$ au rayon. Pour comparer deux nombres positifs, compare leurs carrés.

4. — 1,5 pts

Déterminer les coordonnées des deux points communs E et F, avec E d'abscisse la plus petite.

5. — 1,5 pts

Écrire les équations des tangentes T_E et T_F à $\mathcal{C}$ en E et en F. Montrer qu'elles se coupent en $P(8, 4)$.

6. — 1 pts

En déduire que le quadrilatère $\Omega E P F$ est un carré.

INDICE

Compare les vecteurs $\overrightarrow{\Omega E}$ et $\overrightarrow{FP}$, puis regarde l'angle en Ω et deux côtés consécutifs.

7. — 1,5 pts

Déterminer les équations des deux tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à D.

8. — 1 pts

Montrer que, pour tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{C}$:

$$x + y \leq 2 + 5\sqrt{2}.$$

INDICE

Cherche un vecteur $\vec{e}$ à coordonnées numériques et un vecteur $\vec{v}$ lié à $\overrightarrow{\Omega M}$ dont le produit scalaire contient $x + y$.

Exercice 3 — 10 pts

Problème : Une famille de droites autour d'un point du cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel m, on note D_m l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$mx + (1 - m)y + 2m - 3 = 0.$$

On note Δ la droite d'équation $x + 2y = 0$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0.$$

Un croquis sur papier, avec quelques droites D_m, aide à suivre le problème.

1. — 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel m, D_m est une droite.

2. — 1 pts

Montrer que toutes les droites D_m passent par le point $P(1, 3)$.

3. — 1 pts

Déterminer le réel m pour lequel D_m est perpendiculaire à Δ, et donner une équation de cette droite.

4. — 1 pts

Déterminer le réel m pour lequel D_m est parallèle à Δ, et donner une équation de cette droite.

5. — 1 pts

Montrer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ et de rayon 5, et que P appartient à $\mathcal{C}$.

6. — 1,5 pts

Montrer que, pour tout réel m :

$$d(\Omega, D_m) = \frac{|m - 4|}{\sqrt{2m^2 - 2m + 1}}.$$

INDICE

Applique la formule de la distance à une droite avec $a = m$, $b = 1 - m$ et $c = 2m - 3$. Développe $m^2 + (1 - m)^2$.

7. — 1,5 pts

Montrer que D_m est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $m = \dfrac{3}{7}$. Écrire une équation de cette tangente.

INDICE

Les deux membres de $d(\Omega, D_m) = 5$ sont positifs : élève au carré. Tu dois reconnaître une identité remarquable.

8. 1 pts

En déduire que, pour $m \neq \dfrac{3}{7}$, la droite D_m coupe $\mathcal{C}$ en deux points.

INDICE

Relis le calcul de la question 7 : que vaut $25(2m^2 - 2m + 1) - (m - 4)^2$?

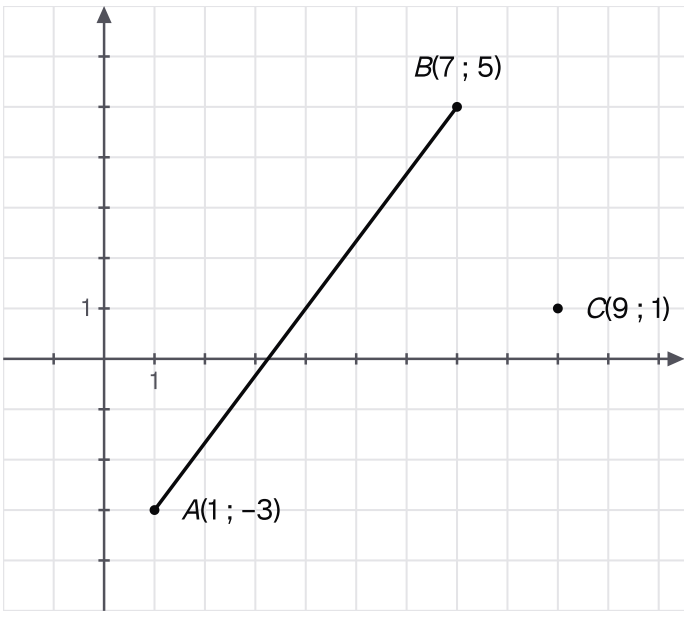
9. 1,5 pts

Pour $m = 2$, déterminer le second point d'intersection Q de D_2 et de $\mathcal{C}$, distinct de P.

Exercice 4 — 10 pts

Problème : Un cercle de diamètre donné et une aire maximale

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1, -3)$, $B(7, 5)$ et $C(9, 1)$, et l'on note Γ le cercle de diamètre $[AB]$. Fais un croquis sur papier.



Les points A(1, -3), B(7, 5) et C(9, 1) de l'énoncé, et le segment [AB], diamètre du cercle Γ.

1. — 1 pts

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$, puis $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, CA et CB.

2. — 1 pts

En déduire la nature du triangle ABC et son aire, puis la distance de C à la droite (AB), sachant que $AB = 10$.

INDICE

Un produit scalaire nul de deux vecteurs non nuls traduit un angle droit. Écris l'aire de deux façons : avec les côtés de l'angle droit, puis avec la base $[AB]$ et la hauteur issue de C.

3. — 1,5 pts

Montrer que Γ a pour équation $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$, puis préciser son centre Ω et son rayon. En déduire que C appartient à Γ.

INDICE

Utilise la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ par un produit scalaire nul.

4. — 0,5 pts

Donner une représentation paramétrique de Γ.

5. 1,5 pts

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M(4+5\cos\theta, 1+5\sin\theta)$ le point de Γ correspondant. Montrer que :

$$MA^2 = 50 + 30\cos\theta + 40\sin\theta,$$
$$MB^2 = 50 - 30\cos\theta - 40\sin\theta.$$

En déduire $MA^2 + MB^2$.

INDICE

Développe les carrés et utilise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

6. 1,5 pts

Montrer que la droite (AB) a pour équation $4x - 3y - 13 = 0$, puis que, pour tout réel θ :

$$d(M,(AB)) = |4\cos\theta - 3\sin\theta|.$$

7. 1,5 pts

Vérifier que, pour tout réel θ :

$$(4\cos\theta - 3\sin\theta)^2 + (3\cos\theta + 4\sin\theta)^2 = 25.$$

En déduire que, pour tout point M de Γ distinct de A et de B, l'aire du triangle AMB est inférieure ou égale à 25.

INDICE

L'aire vaut la moitié du produit de AB par la hauteur issue de M. Un carré est positif.

8. 1,5 pts

Déterminer les points M de Γ pour lesquels l'aire du triangle AMB vaut 25. Montrer que ce sont exactement les points de Γ équidistants de A et de B.

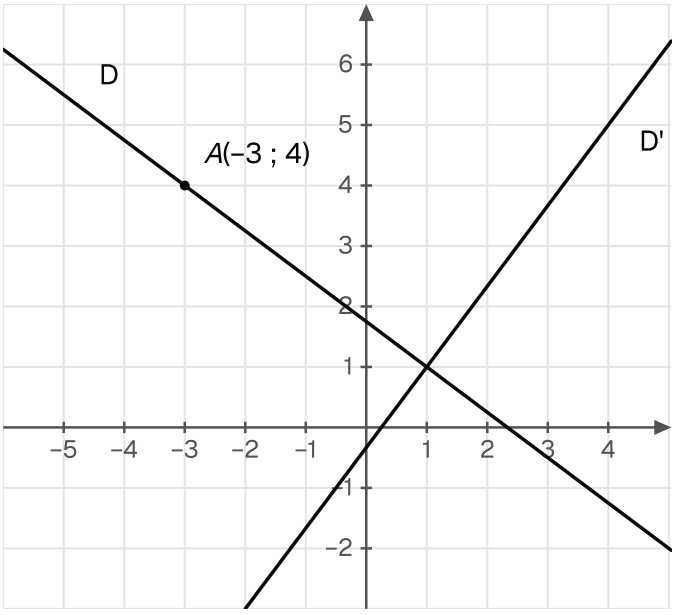
INDICE

Relis l'égalité de la question 7 : à quelle condition le premier carré vaut-il 25 ?

Exercice 5 — 10 pts

Problème : Points équidistants de deux droites et cercles tangents

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les droites $D : 3x + 4y - 7 = 0$ et $D' : 4x - 3y - 1 = 0$, ainsi que le point $A(-3, 4)$. Fais un croquis sur papier.



Les données de l'énoncé : les droites D : 3x + 4y - 7 = 0 et D' : 4x - 3y - 1 = 0, et le point A(-3, 4).

1. — 1 pts

Montrer que D et D' sont perpendiculaires, puis déterminer les coordonnées de leur point commun S.

2. — 1,5 pts

Soit $M(x, y)$ un point du plan. Montrer que $d(M, D) = d(M, D')$ si et seulement si :

$$3x + 4y - 7 = 4x - 3y - 1$$

ou

$$3x + 4y - 7 = -(4x - 3y - 1).$$

En déduire que l'ensemble E des points équidistants de D et de D' est la réunion des droites $\Delta_1 : x - 7y + 6 = 0$ et $\Delta_2 : 7x + y - 8 = 0$.

INDICE

Les deux dénominateurs de la formule de la distance valent 5. Deux réels ont la même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés.

3. — 0,5 pts

Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires et qu'elles passent par S.

4. 1 pts

Vérifier que A appartient à D. Écrire une équation de la droite L perpendiculaire à D passant par A, puis montrer que L est parallèle à D'.

5. 1,5 pts

Déterminer les points de L équidistants de D et de D'. On notera Ω_1 celui de Δ_2 et Ω_2 celui de Δ_1.

INDICE

Un point de L équidistant de D et de D' appartient à E : résous deux systèmes.

6. 2 pts

Soit Γ_1 le cercle de centre Ω_1 passant par A, et Γ_2 le cercle de centre Ω_2 passant par A. Montrer que chacun de ces cercles est tangent à D en A et tangent à D', puis donner une équation de chacun d'eux.

INDICE

Pour D, compare son vecteur normal au rayon en A. Pour D', compare la distance du centre au rayon.

7. 1 pts

Déterminer les coordonnées des points de contact T_1 et T_2 de D' avec Γ_1 et avec Γ_2.

INDICE

Le point de contact est le projeté orthogonal du centre sur D' : il appartient à la perpendiculaire à D' passant par le centre.

8. 1,5 pts

Montrer que, pour tout point $M(x, y)$ du plan :

$$d(M, D)^2 + d(M, D')^2 = SM^2.$$

En déduire que les points A, T_1 et T_2 appartiennent à un même cercle de centre S, dont on donnera une équation.

INDICE

Écris $3x + 4y - 7 = 3(x - 1) + 4(y - 1)$ et $4x - 3y - 1 = 4(x - 1) - 3(y - 1)$, puis développe.