BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

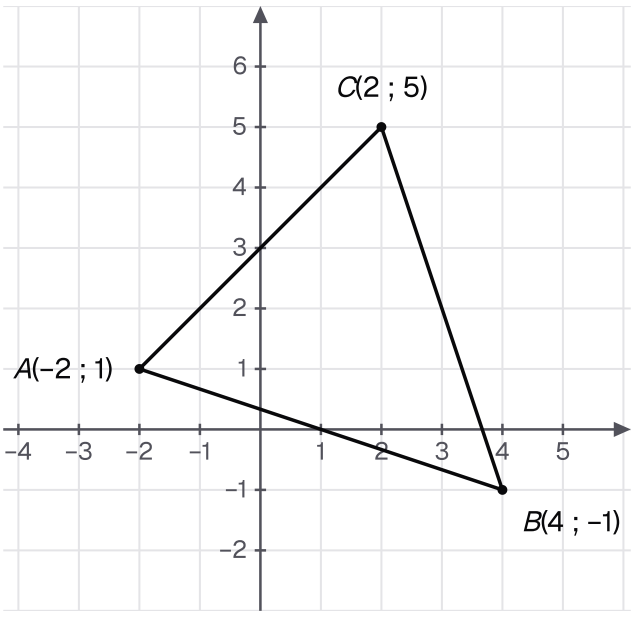
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Niveau examen	5

Exercice 1 10 pts

Problème : Un triangle isocèle et son orthocentre

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-2, 1)$, $B(4, -1)$ et $C(2, 5)$. Fais un croquis sur papier.



Les trois sommets de l'énoncé, A(-2, 1), B(4, -1) et C(2, 5), et le triangle qu'ils forment.

1. 1 pts

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, AB et AC.

CORRIGÉ

Coordonnées. On a $\overrightarrow{AB}(6, -2)$ et $\overrightarrow{AC}(4, 4)$.

Produit scalaire et déterminant. D'après l'expression analytique du produit scalaire et la définition du déterminant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 24 - 8 = 16, \\ \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= 6 \times 4 \\ &\quad - 4 \times (-2) \\ &= 32. \end{aligned}$$

Longueurs.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}, \\ AC &= \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 32$, $AB = 2\sqrt{10}$ et $AC = 4\sqrt{2}$.

2. 1 pts

En déduire $\cos\theta$ et $\sin\theta$, où θ désigne une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

INDICE

Calcule d'abord $AB \times AC$ en simplifiant $\sqrt{10} \times \sqrt{2}$. Les valeurs ne sont pas remarquables.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls, et :

$$\begin{aligned} AB \times AC &= 2\sqrt{10} \times 4\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{20} = 16\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la formule du cosinus et du sinus :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{16}{16\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ \sin\theta &= \frac{32}{16\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

3. 0,5 pts

Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{BC}(-2, 6)$, donc :

$$BC = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}.$$

D'après la question 1, $BA = AB = 2\sqrt{10}$. Donc $BA = BC$.

Conclusion. Le triangle ABC est isocèle en B.

4. 1 pts

Montrer que la droite (AB) a pour équation $x + 3y - 1 = 0$.

CORRIGÉ

Un vecteur normal. Le vecteur $\vec{n}(1, 3)$ est non nul et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 6 - 6 = 0$. D'après le critère d'orthogonalité, $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de (AB) : il est normal à (AB).

Équation. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal, $M(x, y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$:

$$\begin{aligned} &(x + 2) + 3(y - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x + 3y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vérification. $-2 + 3 - 1 = 0$ pour A et $4 - 3 - 1 = 0$ pour B.

Conclusion. La droite (AB) a pour équation $x + 3y - 1 = 0$.

5. 1 pts

Calculer la distance du point C à la droite (AB).

CORRIGÉ

Ici $(a, b) = (1, 3) \neq (0, 0)$. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(C, (AB)) &= \frac{|2 + 15 - 1|}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance de C à (AB) vaut $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$.

6. 1 pts

En déduire l'aire du triangle ABC.

CORRIGÉ

La distance de C à (AB) est la longueur de la hauteur issue de C. L'aire vaut donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times d(C, (AB)) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{16}{\sqrt{10}} \\ &= 16. \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du triangle ABC vaut 16.

7. 1 pts

Écrire une équation de la hauteur h_C du triangle issue de C.

CORRIGÉ

La hauteur h_C passe par C et elle est perpendiculaire à (AB) : $\overrightarrow{AB}(6, -2)$, non nul, lui est normal.

D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal :

$$\begin{aligned} &6(x - 2) - 2(y - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &6x - 2y - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &3x - y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vérification. $3 \times 2 - 5 - 1 = 0$: le point C vérifie l'équation.

Conclusion. h_C : $3x - y - 1 = 0$.

8. 1,5 pts

Écrire une équation de la médiatrice Δ de $[AC]$. Montrer que B appartient à Δ, puis que Δ est la hauteur du triangle issue de B.

INDICE

La médiatrice passe par le milieu de $[AC]$, avec $\overrightarrow{AC}$ pour vecteur normal. La hauteur issue de B a le même vecteur normal.

CORRIGÉ

Équation de Δ. Le milieu de $[AC]$ est $(0, 3)$, et $\overrightarrow{AC}(4, 4)$, non nul, est normal à Δ. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal :

$$\begin{aligned} &4x + 4(y - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x + y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Le point B. $4 - 1 - 3 = 0$: le point B appartient à Δ.

Hauteur issue de B. C'est la droite passant par B et perpendiculaire à (AC), donc de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal, une seule droite passe par B avec ce vecteur normal : c'est Δ.

Conclusion. Δ : $x + y - 3 = 0$; elle passe par B et c'est la hauteur du triangle issue de B.

9. 2 pts

En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC, et contrôler que (AH) est perpendiculaire à (BC).

INDICE

L'orthocentre est le point commun des hauteurs : résous le système formé par les équations de h_C et de Δ.

CORRIGÉ

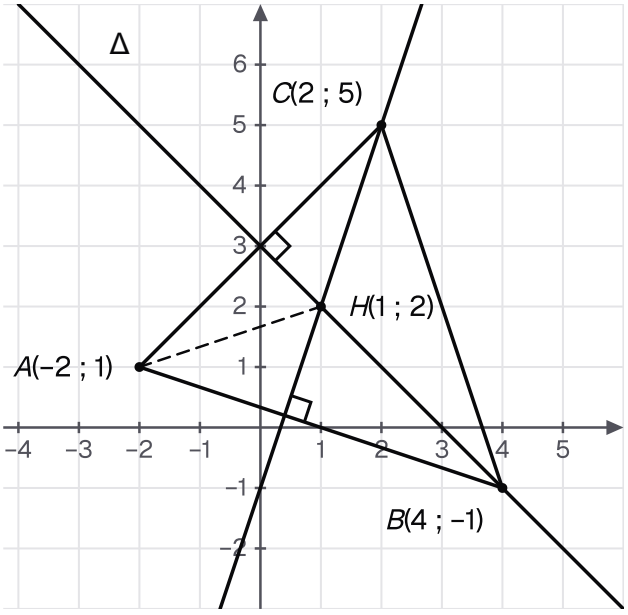
Système. L'orthocentre est le point commun des hauteurs. D'après les questions 7 et 8, H vérifie :

$$\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

En additionnant, $4x - 4 = 0$, donc $x = 1$, puis $y = 3 - 1 = 2$.

Contrôle. $\overrightarrow{AH}(3, 1)$ et $\overrightarrow{BC}(-2, 6)$ donnent $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 + 6 = 0$. D'après le critère d'orthogonalité, (AH) et (BC) sont perpendiculaires : la troisième hauteur passe bien par H.

Conclusion. L'orthocentre du triangle ABC est le point $H(1, 2)$.



La hauteur issue de C et la médiatrice Δ de [AC], qui est aussi la hauteur issue de B, se coupent en H(1, 2), l'orthocentre ; la droite (AH) est la troisième hauteur.

Exercice 2 10 pts

Problème : Un cercle, une sécante et des tangentes

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$, et D la droite d'équation $x + y - 7 = 0$. Fais un croquis sur papier et complète-le au fil des questions.

1. 1 pts

Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

CORRIGÉ

Carrés complétés. On a $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$ et $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$. L'équation équivaut à :

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y+1)^2 \\ = 9 + 1 + 15 = 25.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $k = 25 > 0$, d'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(3, -1)$ et de rayon $r = 5$.

2. 1,5 pts

Vérifier que le point $A(6, 3)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

CORRIGÉ

Appartenance. $(6-3)^2 + (3+1)^2 = 9 + 16 = 25$: le point A appartient à $\mathcal{C}$.

Tangente. On a $\overrightarrow{\Omega A}(3, 4)$. D'après l'équation de la tangente :

$$\begin{aligned}3(x-6) + 4(y-3) = 0 \\ \Leftrightarrow 3x + 4y - 30 = 0.\end{aligned}$$

Conclusion. La tangente à $\mathcal{C}$ en A est T : $3x + 4y - 30 = 0$.

3. 1 pts

Montrer que D coupe $\mathcal{C}$ en deux points.

INDICE

Compare $d(\Omega, D)$ au rayon. Pour comparer deux nombres positifs, compare leurs carrés.

CORRIGÉ

Distance. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned}d(\Omega, D) &= \frac{|3 - 1 - 7|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Comparaison. Les deux nombres sont positifs et $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{2} < 25$, donc $d(\Omega, D) < 5$.

Conclusion. D'après le théorème de position relative, D coupe $\mathcal{C}$ en exactement deux points.

4. 1,5 pts

Déterminer les coordonnées des deux points communs E et F, avec E d'abscisse la plus petite.

CORRIGÉ

Substitution. L'équation de D donne $y = 7 - x$, donc $y + 1 = 8 - x$. En remplaçant dans l'équation réduite :

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (8-x)^2 &= 25\\ 2x^2 - 22x + 48 &= 0\\ x^2 - 11x + 24 &= 0.\end{aligned}$$

Résolution. Le discriminant vaut $121 - 96 = 25 > 0$: $x = 3$ ou $x = 8$, comme l'annonce la question 3. Avec $y = 7 - x$, on obtient $y = 4$ et $y = -1$.

Conclusion. $E(3, 4)$ et $F(8, -1)$.

5. 1,5 pts

Écrire les équations des tangentes T_E et T_F à $\mathcal{C}$ en E et en F. Montrer qu'elles se coupent en $P(8, 4)$.

CORRIGÉ

Tangentes. On a $\overrightarrow{\Omega E}(0, 5)$ et $\overrightarrow{\Omega F}(5, 0)$. D'après l'équation de la tangente :

- T_E : $0 \times (x - 3) + 5(y - 4) = 0$, soit $y - 4 = 0$;
- T_F : $5(x - 8) + 0 \times (y + 1) = 0$, soit $x - 8 = 0$.

Point commun. Le point $P(8, 4)$ vérifie les deux équations. Les droites ne sont pas parallèles, car $0 \times 0 - 1 \times 1 \neq 0$ (critère de parallélisme) : elles ont un seul point commun.

Conclusion. T_E : $y - 4 = 0$ et T_F : $x - 8 = 0$ se coupent en $P(8, 4)$.

6. 1 pts

En déduire que le quadrilatère ΩEPF est un carré.

INDICE

Compare les vecteurs $\overrightarrow{\Omega E}$ et $\overrightarrow{FP}$, puis regarde l'angle en Ω et deux côtés consécutifs.

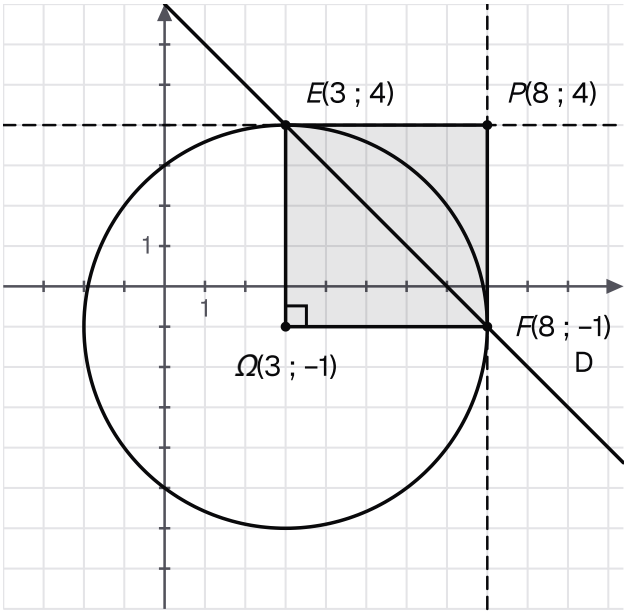
CORRIGÉ

Parallélogramme. On a $\overrightarrow{\Omega E}(0,5)$ et $\overrightarrow{FP}(0,5)$: ces vecteurs sont égaux, donc ΩEPF est un parallélogramme.

Rectangle. $\overrightarrow{\Omega E}\cdot\overrightarrow{\Omega F}=0\times5+5\times0=0$: d'après le critère d'orthogonalité, l'angle en Ω est droit, et le parallélogramme est un rectangle.

Côtés consécutifs. $\Omega E=\Omega F=5$: deux côtés consécutifs sont égaux.

Conclusion. Le quadrilatère ΩEPF est un carré.



La sécante D coupe le cercle en E(3, 4) et F(8, -1) ; les tangentes en ces points se croisent en P(8, 4), et ΩEPF est un carré de côté 5.

7. 1,5 pts

Déterminer les équations des deux tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à D.

CORRIGÉ

Droites parallèles à D. Soit D' : $a'x + b'y + c' = 0$, avec $(a', b') \neq (0, 0)$. D'après le critère de parallélisme, D' est parallèle à D si et seulement si $1 \times b' - a' \times 1 = 0$, soit $a' = b'$, avec alors $a' \neq 0$. En divisant par a', D' a une équation de la forme $x + y + c = 0$.

Tangence. D'après le théorème de position relative et l'équation de la tangente, D' est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $d(\Omega, D') = 5$. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} &\frac{|3 - 1 + c|}{\sqrt{2}} = 5 \\ &\Leftrightarrow |2 + c| = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Valeurs de c. Deux réels ont la même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés :

$$\begin{aligned} c &= -2 + 5\sqrt{2}, \\ c &= -2 - 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à D ont pour équations $x + y - 2 + 5\sqrt{2} = 0$ et $x + y - 2 - 5\sqrt{2} = 0$.

8. 1 pts

Montrer que, pour tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{C}$:

$$x + y \leq 2 + 5\sqrt{2}.$$

INDICE

Cherche un vecteur $\vec{e}$ à coordonnées numériques et un vecteur $\vec{v}$ lié à $\overrightarrow{\Omega M}$ dont le produit scalaire contient $x + y$.

CORRIGÉ

Vecteurs. Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{C}$, $\vec{e}(1, 1)$ et $\vec{v}(x - 3, y + 1)$, c'est-à-dire $\vec{v} = \overrightarrow{\Omega M}$. On a $\|\vec{v}\| = \Omega M = 5$, $\|\vec{e}\| = \sqrt{2}$ et :

$$\vec{e} \cdot \vec{v} = x + y - 2.$$

Majoration. Un réel est inférieur ou égal à sa valeur absolue. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} x + y - 2 &\leq |\vec{e} \cdot \vec{v}| \\ &\leq \sqrt{2} \times 5. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{C}$, $x + y \leq 2 + 5\sqrt{2}$.

Exercice 3 10 pts

Problème : Une famille de droites autour d'un point du cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel m, on note D_m l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$mx + (1 - m)y + 2m - 3 = 0.$$

On note Δ la droite d'équation $x + 2y = 0$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0.$$

Un croquis sur papier, avec quelques droites D_m, aide à suivre le problème.

1. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel m, D_m est une droite.

CORRIGÉ

Soit m un réel. Si l'on avait $m = 0$ et $1 - m = 0$, on aurait à la fois $m = 0$ et $m = 1$: c'est impossible. Donc $(m, 1 - m) \neq (0, 0)$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal, pour tout réel m, D_m est une droite, de vecteur normal $\vec{n}_m(m, 1 - m)$.

2. 1 pts

Montrer que toutes les droites D_m passent par le point $P(1, 3)$.

CORRIGÉ

Soit m un réel. On remplace les coordonnées de $P(1, 3)$ dans l'équation de D_m :

$$\begin{aligned} & m \times 1 + (1 - m) \times 3 \\ & \quad + 2m - 3 \\ & = m + 3 - 3m + 2m - 3 \\ & = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel m, le point P appartient à D_m : toutes les droites D_m passent par $P(1, 3)$.

3. 1 pts

Déterminer le réel m pour lequel D_m est perpendiculaire à Δ, et donner une équation de cette droite.

CORRIGÉ

D'après le critère de perpendicularité, appliqué aux vecteurs normaux $(m, 1 - m)$ et $(1, 2)$:

$$\begin{aligned} & m \times 1 + (1 - m) \times 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2 - m = 0 \\ & \Leftrightarrow m = 2. \end{aligned}$$

Pour $m = 2$, l'équation de D_m devient $2x - y + 4 - 3 = 0$.

Conclusion. D_m est perpendiculaire à Δ si et seulement si $m = 2$; cette droite est $D_2 : 2x - y + 1 = 0$.

4. 1 pts

Déterminer le réel m pour lequel D_m est parallèle à Δ, et donner une équation de cette droite.

CORRIGÉ

D'après le critère de parallélisme, appliqué aux coefficients $(m, 1-m)$ et $(1, 2)$:

$$\begin{aligned} & m \times 2 - 1 \times (1-m) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3m - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & m = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pour $m = \dfrac{1}{3}$, on multiplie l'équation de $D_{\frac{1}{3}}$ par 3 : $x + 2y + 2 - 9 = 0$.

Conclusion. D_m est parallèle à Δ si et seulement si $m = \dfrac{1}{3}$; cette droite a pour équation $x + 2y - 7 = 0$.

5. 1 pts

Montrer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ et de rayon 5, et que P appartient à $\mathcal{C}$.

CORRIGÉ

Le cercle. On a $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$ et $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$. L'équation équivaut à :

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 + (y+1)^2 \\ & = 4 + 1 + 20 = 25. \end{aligned}$$

Comme $k = 25 > 0$, d'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ et de rayon 5.

Le point P. $(1+2)^2 + (3+1)^2 = 9 + 16 = 25$.

Conclusion. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ et de rayon 5, et P appartient à $\mathcal{C}$.

6. 1,5 pts

Montrer que, pour tout réel m :

$$d(\Omega, D_m) = \frac{|m-4|}{\sqrt{2m^2-2m+1}}.$$

INDICE

Applique la formule de la distance à une droite avec $a = m$, $b = 1-m$ et $c = 2m-3$. Développe $m^2 + (1-m)^2$.

CORRIGÉ

Soit m un réel. D'après la question 1, $(m, 1-m) \neq (0,0)$.

Numérateur. Pour $\Omega(-2,-1)$:

$$\begin{aligned} &-2m - (1-m) + 2m - 3 \\ &= m - 4. \end{aligned}$$

Dénominateur. $m^2 + (1-m)^2 = 2m^2 - 2m + 1$.

Conclusion. D'après la formule de la distance d'un point à une droite, pour tout réel m :

$$d(\Omega, D_m) = \frac{|m-4|}{\sqrt{2m^2-2m+1}}.$$

7. 1,5 pts

Montrer que D_m est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $m = \dfrac{3}{7}$. Écrire une équation de cette tangente.

INDICE

Les deux membres de $d(\Omega, D_m) = 5$ sont positifs : élève au carré. Tu dois reconnaître une identité remarquable.

CORRIGÉ

Condition de tangence. D'après le théorème de position relative et l'équation de la tangente, D_m est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $d(\Omega, D_m) = 5$.

Résolution. Les deux membres étant positifs, cette égalité équivaut à celle de leurs carrés :

$$\begin{aligned} &(m-4)^2 \\ &= 25(2m^2 - 2m + 1) \\ &\Leftrightarrow 49m^2 - 42m + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (7m-3)^2 = 0, \end{aligned}$$

soit $m = \dfrac{3}{7}$.

Équation. En multipliant l'équation de $D_{\frac{3}{7}}$ par 7 : $3x + 4y + 6 - 21 = 0$, soit $3x + 4y - 15 = 0$.

Contrôle. C'est la tangente en P donnée par l'équation de la tangente, car $\overrightarrow{\Omega P}(3,4)$.

Conclusion. D_m est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $m = \dfrac{3}{7}$; cette tangente a pour équation $3x + 4y - 15 = 0$.

8. 1 pts

En déduire que, pour $m \neq \dfrac{3}{7}$, la droite D_m coupe $\mathcal{C}$ en deux points.

INDICE

Relis le calcul de la question 7 : que vaut $25(2m^2-2m+1)-(m-4)^2$?

CORRIGÉ

Soit m un réel tel que $m \neq \dfrac{3}{7}$. Le calcul de la question 7 donne :

$$\begin{aligned} &25(2m^2-2m+1)-(m-4)^2 \\ &= (7m-3)^2. \end{aligned}$$

Comme $m \neq \dfrac{3}{7}$, ce nombre est strictement positif, donc $(m-4)^2 < 25(2m^2-2m+1)$.

Les nombres comparés étant positifs, on en déduit $d(\Omega, D_m) < 5$.

Conclusion. D'après le théorème de position relative, pour $m \neq \dfrac{3}{7}$, la droite D_m coupe $\mathcal{C}$ en exactement deux points.

9. 1,5 pts

Pour $m = 2$, déterminer le second point d'intersection Q de D_2 et de $\mathcal{C}$, distinct de P.

CORRIGÉ

Substitution. L'équation de D_2 donne $y = 2x + 1$. En remplaçant dans l'équation de $\mathcal{C}$:

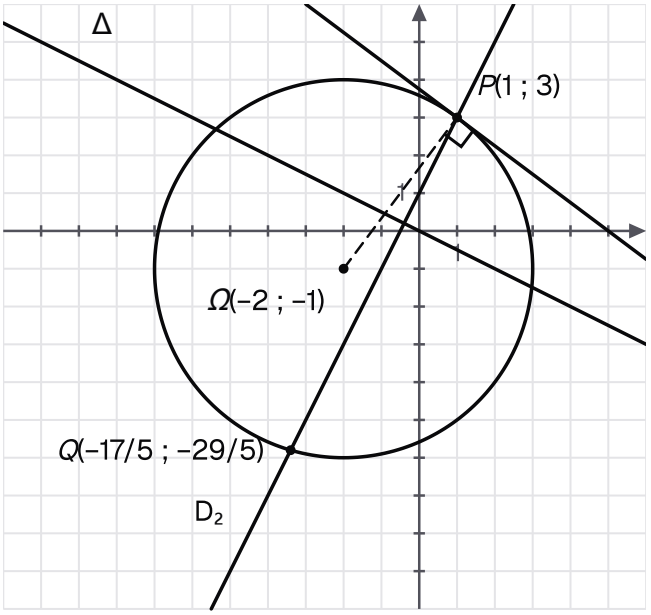
$$\begin{aligned} &x^2 + (2x+1)^2 + 4x \\ &\quad + 2(2x+1) - 20 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &5x^2 + 12x - 17 = 0. \end{aligned}$$

Résolution. Le discriminant vaut $144 + 340 = 484 = 22^2$:

$$x = \frac{-12 + 22}{10} = 1,$$
$$x = \frac{-12 - 22}{10} = -\frac{17}{5}.$$

La valeur 1 redonne P. Pour $x = -\dfrac{17}{5}$, $y = -\dfrac{34}{5} + 1 = -\dfrac{29}{5}$.

Conclusion. Le second point d'intersection est $Q\left(-\dfrac{17}{5}, -\dfrac{29}{5}\right)$.

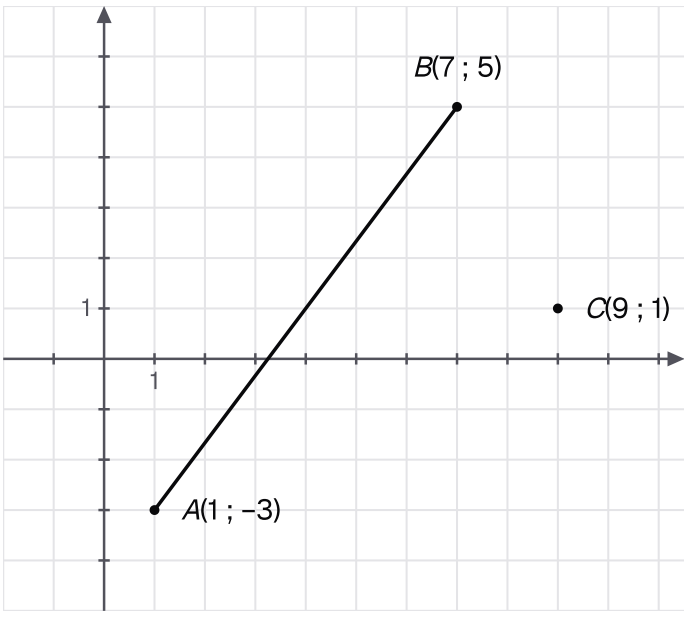


La droite D2 traverse le cercle en P(1, 3) et Q(-17/5, -29/5) ; la tangente en P, perpendiculaire à [ΩP], est la droite obtenue pour m = 3/7.

Exercice 4 — 10 pts

Problème : Un cercle de diamètre donné et une aire maximale

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1, -3)$, $B(7, 5)$ et $C(9, 1)$, et l'on note Γ le cercle de diamètre $[AB]$. Fais un croquis sur papier.



Les points A(1, -3), B(7, 5) et C(9, 1) de l'énoncé, et le segment [AB], diamètre du cercle Γ.

1. — 1 pts

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$, puis $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, CA et CB.

CORRIGÉ

Coordonnées. On a $\overrightarrow{CA}(-8, -4)$ et $\overrightarrow{CB}(-2, 4)$.

Produit scalaire. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= (-8) \times (-2) + (-4) \times 4 \\ &= 16 - 16 = 0. \end{aligned}$$

Longueurs.

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}, \\ CB &= \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{CA}(-8, -4)$, $\overrightarrow{CB}(-2, 4)$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, $CA = 4\sqrt{5}$ et $CB = 2\sqrt{5}$.

2. 1 pts

En déduire la nature du triangle ABC et son aire, puis la distance de C à la droite (AB), sachant que $AB = 10$.

INDICE

Un produit scalaire nul de deux vecteurs non nuls traduit un angle droit. Écris l'aire de deux façons : avec les côtés de l'angle droit, puis avec la base $[AB]$ et la hauteur issue de C.

CORRIGÉ

Nature. Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont non nuls et, d'après la question 1, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. D'après le critère d'orthogonalité, ils sont orthogonaux : le triangle ABC est rectangle en C. Contrôle : $CA^2 + CB^2 = 80 + 20 = 100 = AB^2$.

Aire. Les côtés de l'angle droit sont $[CA]$ et $[CB]$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times CA \times CB \\ &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20.\end{aligned}$$

Distance. La distance de C à (AB) est la longueur de la hauteur issue de C. L'aire vaut aussi $\frac{1}{2} \times AB \times d(C,(AB))$, donc :

$$d(C,(AB)) = \frac{2 \times 20}{10} = 4.$$

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en C, son aire vaut 20 et la distance de C à (AB) vaut 4.

3. 1,5 pts

Montrer que Γ a pour équation $x^2+y^2-8x-2y-8=0$, puis préciser son centre Ω et son rayon. En déduire que C appartient à Γ.

INDICE

Utilise la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ par un produit scalaire nul.

CORRIGÉ

Équation. Les points A et B sont distincts. D'après la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$, $M(x,y)$ appartient à Γ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. Avec $\overrightarrow{MA}(1-x,-3-y)$ et $\overrightarrow{MB}(7-x,5-y)$, cela s'écrit :

$$\begin{aligned}&(1-x)(7-x)\\&\quad+(-3-y)(5-y)=0\\\Leftrightarrow\ &x^2-8x+7\\&\quad+y^2-2y-15=0\\\Leftrightarrow\ &x^2+y^2-8x\\&\quad-2y-8=0.\end{aligned}$$

Centre et rayon. Ici $a=4$, $b=1$, $c=-8$ et $k=16+1+8=25>0$. D'après l'étude de l'ensemble $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, Γ a pour centre $\Omega(4,1)$, milieu de $[AB]$, et pour rayon 5.

Le point C. D'après la question 1, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$: par la même caractérisation, C appartient à Γ. Contrôle : $81+1-72-2-8=0$.

Conclusion. Γ : $x^2+y^2-8x-2y-8=0$, de centre $\Omega(4,1)$ et de rayon 5, et C appartient à Γ.

4. 0,5 pts

Donner une représentation paramétrique de Γ.

CORRIGÉ

Le cercle Γ a pour centre $\Omega(4,1)$ et pour rayon 5, avec $5>0$.

Conclusion. D'après la représentation paramétrique d'un cercle, Γ admet la représentation :

$$\begin{cases}x=4+5\cos\theta\\y=1+5\sin\theta\end{cases}\qquad(\theta\in\mathbb{R}).$$

5. 1,5 pts

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M(4+5\cos\theta, 1+5\sin\theta)$ le point de Γ correspondant. Montrer que :

$$MA^2 = 50 + 30\cos\theta + 40\sin\theta,$$
$$MB^2 = 50 - 30\cos\theta - 40\sin\theta.$$

En déduire $MA^2 + MB^2$.

INDICE

Développe les carrés et utilise $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

CORRIGÉ

Calcul de MA^2. On a $\overrightarrow{MA}(-3-5\cos\theta, -4-5\sin\theta)$, donc :

$$\begin{aligned} MA^2 &= 9 + 30\cos\theta + 25\cos^2\theta \\ &\quad + 16 + 40\sin\theta + 25\sin^2\theta \\ &= 50 + 30\cos\theta + 40\sin\theta, \end{aligned}$$

car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Calcul de MB^2. De même, $\overrightarrow{MB}(3-5\cos\theta, 4-5\sin\theta)$ donne :

$$\begin{aligned} MB^2 &= 50 - 30\cos\theta - 40\sin\theta. \end{aligned}$$

Somme. En additionnant, les termes en $\cos\theta$ et en $\sin\theta$ s'éliminent.

Conclusion. $MA^2 + MB^2 = 100$. C'est AB^2, ce qui est cohérent avec la question 3 : pour M distinct de A et de B, le triangle AMB est rectangle en M.

6. 1,5 pts

Montrer que la droite (AB) a pour équation $4x-3y-13=0$, puis que, pour tout réel θ :

$$d(M,(AB))=|4\cos\theta-3\sin\theta|.$$

CORRIGÉ

Un vecteur normal. Le vecteur $\vec{n}(4,-3)$ est non nul et $\overrightarrow{AB}(6,8)$ vérifie $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=24-24=0$: d'après le critère d'orthogonalité, $\vec{n}$ est normal à (AB).

Équation. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal :

$$\begin{aligned}&4(x-1)-3(y+3)=0\\&\Leftrightarrow 4x-3y-13=0.\end{aligned}$$

Contrôle pour B : $28-15-13=0$.

Distance. Soit θ un réel. D'après la formule de la distance d'un point à une droite, avec $\sqrt{16+9}=5$:

$$\begin{aligned}&d(M,(AB))\\&=\frac{1}{5}\,|4(4+5\cos\theta)\\&\qquad-3(1+5\sin\theta)-13|\\&=\frac{|20\cos\theta-15\sin\theta|}{5}\\&=|4\cos\theta-3\sin\theta|.\end{aligned}$$

Conclusion. (AB) : $4x-3y-13=0$ et, pour tout réel θ, $d(M,(AB))=|4\cos\theta-3\sin\theta|$.

7. 1,5 pts

Vérifier que, pour tout réel θ :

$$\begin{aligned}&(4\cos\theta - 3\sin\theta)^2\\&\quad + (3\cos\theta + 4\sin\theta)^2 = 25.\end{aligned}$$

En déduire que, pour tout point M de Γ distinct de A et de B, l'aire du triangle AMB est inférieure ou égale à 25.

INDICE

L'aire vaut la moitié du produit de AB par la hauteur issue de M. Un carré est positif.

CORRIGÉ

Identité. Soit θ un réel. En développant, les doubles produits $-24\cos\theta\sin\theta$ et $24\cos\theta\sin\theta$ s'éliminent :

$$\begin{aligned}&(4\cos\theta - 3\sin\theta)^2\\&\quad + (3\cos\theta + 4\sin\theta)^2\\&= 25\cos^2\theta + 25\sin^2\theta\\&= 25.\end{aligned}$$

Hauteur. Soit M un point de Γ distinct de A et de B. D'après la représentation paramétrique, il existe un réel θ tel que $M(4 + 5\cos\theta, 1 + 5\sin\theta)$. Comme $(3\cos\theta + 4\sin\theta)^2 \geq 0$, on a $(4\cos\theta - 3\sin\theta)^2 \leq 25$, donc $d(M, (AB)) \leq 5$ d'après la question 6.

Aire. Cette distance est la longueur de la hauteur issue de M du triangle AMB :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times d(M, (AB))\\&\leq \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout point M de Γ distinct de A et de B, l'aire du triangle AMB est inférieure ou égale à 25.

8. 1,5 pts

Déterminer les points M de Γ pour lesquels l'aire du triangle AMB vaut 25. Montrer que ce sont exactement les points de Γ équidistants de A et de B.

INDICE

Relis l'égalité de la question 7 : à quelle condition le premier carré vaut-il 25 ?

CORRIGÉ

Soit M le point de Γ de paramètre θ.

Condition sur θ. D'après la question 7, l'aire vaut 25 si et seulement si $(4\cos\theta - 3\sin\theta)^2 = 25$, c'est-à-dire $(3\cos\theta + 4\sin\theta)^2 = 0$, soit $3\cos\theta + 4\sin\theta = 0$.

Résolution. On a alors $\sin\theta = -\dfrac{3}{4}\cos\theta$. Avec $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on obtient $\dfrac{25}{16}\cos^2\theta = 1$, donc :

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$
$$\text{ou } (\cos\theta, \sin\theta) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

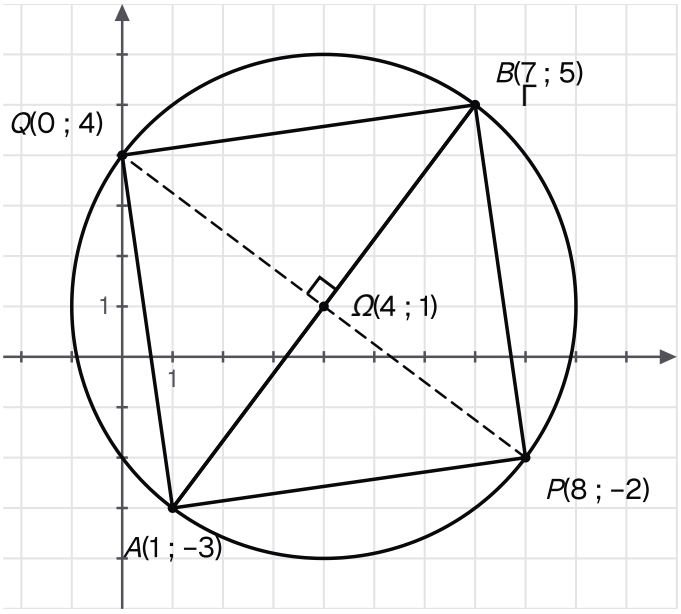
Les points cherchés sont $P(8, -2)$ et $Q(0, 4)$, distincts de A et de B.

Points équidistants. D'après la question 5 :

$$\begin{aligned} &MA^2 - MB^2 \\ &= 60\cos\theta + 80\sin\theta \\ &= 20(3\cos\theta + 4\sin\theta). \end{aligned}$$

Les distances étant positives, $MA = MB$ si et seulement si $3\cos\theta + 4\sin\theta = 0$, c'est-à-dire si et seulement si M est l'un des points P et Q. Contrôle : $PA^2 = 49 + 1 = 50 = PB^2$.

Conclusion. L'aire du triangle AMB vaut 25 exactement pour $M = P(8, -2)$ et $M = Q(0, 4)$, et ce sont exactement les points de Γ équidistants de A et de B.



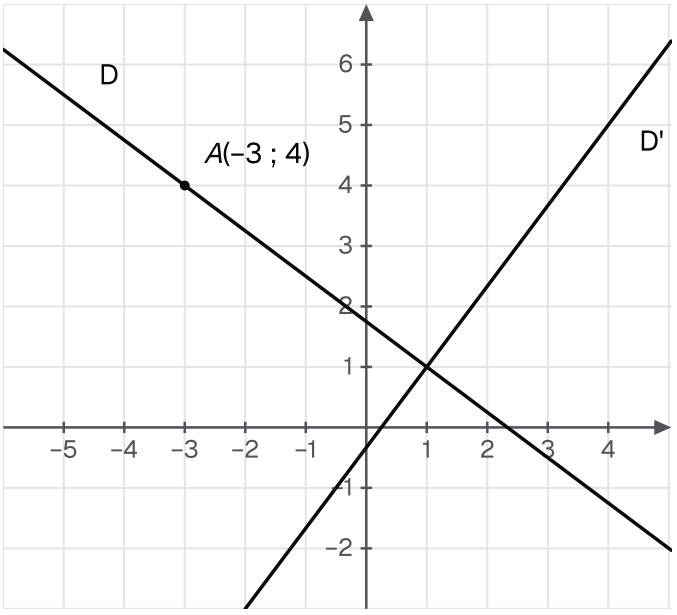
Les deux sommets d'aire maximale, P(8, -2) et Q(0, 4), sont aux extrémités du diamètre perpendiculaire à [AB] : à la distance 5 de (AB).

Exercice 5

10 pts

Problème : Points équidistants de deux droites et cercles tangents

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les droites $D : 3x + 4y - 7 = 0$ et $D' : 4x - 3y - 1 = 0$, ainsi que le point $A(-3, 4)$. Fais un croquis sur papier.



Les données de l'énoncé : les droites D : 3x + 4y - 7 = 0 et D' : 4x - 3y - 1 = 0, et le point A(-3, 4).

1.

1 pts

Montrer que D et D' sont perpendiculaires, puis déterminer les coordonnées de leur point commun S.

CORRIGÉ

Perpendicularité. Les vecteurs $\vec{n}(3, 4)$ et $\vec{n}'(4, -3)$ sont normaux à D et à D', et $3 \times 4 + 4 \times (-3) = 0$. D'après le critère de perpendicularité, D et D' sont perpendiculaires, donc sécantes.

Point commun. Il vérifie le système :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 3, la seconde par 4, puis en additionnant : $25x = 25$, donc $x = 1$, puis $4y = 7 - 3 = 4$, soit $y = 1$.

Conclusion. D et D' sont perpendiculaires et se coupent en $S(1, 1)$.

2. 1,5 pts

Soit $M(x, y)$ un point du plan. Montrer que $d(M, D) = d(M, D')$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} &3x + 4y - 7 \\ &= 4x - 3y - 1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &3x + 4y - 7 \\ &= -(4x - 3y - 1). \end{aligned}$$

En déduire que l'ensemble E des points équidistants de D et de D' est la réunion des droites $\Delta_1 : x - 7y + 6 = 0$ et $\Delta_2 : 7x + y - 8 = 0$.

INDICE

Les deux dénominateurs de la formule de la distance valent 5. Deux réels ont la même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés.

CORRIGÉ

Égalité des distances. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(M, D) &= \frac{|3x + 4y - 7|}{5}, \\ d(M, D') &= \frac{|4x - 3y - 1|}{5}. \end{aligned}$$

Les deux distances sont égales si et seulement si $|3x + 4y - 7| = |4x - 3y - 1|$. Deux réels ont la même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés : c'est l'équivalence demandée.

Les deux cas.

- $3x + 4y - 7 = 4x - 3y - 1$ équivaut à $-x + 7y - 6 = 0$, soit $x - 7y + 6 = 0$;
- $3x + 4y - 7 = -4x + 3y + 1$ équivaut à $7x + y - 8 = 0$.

Conclusion. Comme $(1, -7) \neq (0, 0)$ et $(7, 1) \neq (0, 0)$, ces équations sont celles de deux droites : E est la réunion de $\Delta_1 : x - 7y + 6 = 0$ et de $\Delta_2 : 7x + y - 8 = 0$.

3. 0,5 pts

Montrer que Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires et qu'elles passent par S.

CORRIGÉ

Perpendicularité. On a $1 \times 7 + (-7) \times 1 = 0$: d'après le critère de perpendicularité, Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires.

Le point S. $1 - 7 + 6 = 0$ et $7 + 1 - 8 = 0$: le point $S(1, 1)$ appartient aux deux droites. C'est cohérent : S, sur D et sur D', est à la distance 0 de chacune.

Conclusion. Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires et passent toutes deux par S.

4. 1 pts

Vérifier que A appartient à D. Écrire une équation de la droite L perpendiculaire à D passant par A, puis montrer que L est parallèle à D'.

CORRIGÉ

Le point A. $3 \times (-3) + 4 \times 4 - 7 = 0$: le point A appartient à D.

Équation de L. La droite L passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{n}(3, 4)$, normal à D. Le vecteur $\vec{n}'(4, -3)$ est non nul et $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$: il est normal à L. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal :

$$\begin{aligned} &4(x + 3) - 3(y - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &4x - 3y + 24 = 0. \end{aligned}$$

Parallélisme. $4 \times (-3) - 4 \times (-3) = 0$: d'après le critère de parallélisme, L et D' sont parallèles. Elles sont distinctes, car A appartient à L et $4 \times (-3) - 3 \times 4 - 1 = -25 \neq 0$.

Conclusion. L : $4x - 3y + 24 = 0$, et L est parallèle à D'.

5. 1,5 pts

Déterminer les points de L équidistants de D et de D'. On notera Ω_1 celui de Δ_2 et Ω_2 celui de Δ_1.

INDICE

Un point de L équidistant de D et de D' appartient à E : résous deux systèmes.

CORRIGÉ

Méthode. D'après la question 2, ces points sont les points communs de L avec Δ_1 et avec Δ_2. D'après le critère de parallélisme, L n'est parallèle à aucune de ces deux droites, car $4 \times (-7) - 1 \times (-3) = -25 \neq 0$ et $4 \times 1 - 7 \times (-3) = 25 \neq 0$: chaque intersection est un seul point.

Intersections.

- L et Δ_2 : l'équation de Δ_2 donne $y = 8 - 7x$, et $4x - 3(8 - 7x) + 24 = 0$ s'écrit $25x = 0$. Donc $x = 0$ et $y = 8$.
- L et Δ_1 : l'équation de Δ_1 donne $x = 7y - 6$, et $4(7y - 6) - 3y + 24 = 0$ s'écrit $25y = 0$. Donc $y = 0$ et $x = -6$.

Conclusion. Les points de L équidistants de D et de D' sont $\Omega_1(0, 8)$ et $\Omega_2(-6, 0)$.

6. 2 pts

Soit Γ_1 le cercle de centre Ω_1 passant par A, et Γ_2 le cercle de centre Ω_2 passant par A. Montrer que chacun de ces cercles est tangent à D en A et tangent à D', puis donner une équation de chacun d'eux.

INDICE

Pour D, compare son vecteur normal au rayon en A. Pour D', compare la distance du centre au rayon.

CORRIGÉ

Cercle Γ_1, tangence à D. On a $\overrightarrow{\Omega_1 A}(-3,-4)$, donc le rayon de Γ_1 vaut 5. La droite D passe par A, point de Γ_1, et a pour vecteur normal $\vec{n}(3,4)$. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_1 A} = -\vec{n}$, non nul, lui est colinéaire, donc normal à D : d'après la définition de la tangente, D est la tangente à Γ_1 en A.

Cercle Γ_1, tangence à D'. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$d(\Omega_1, D') = \frac{|0 - 24 - 1|}{5} = 5.$$

D'après le théorème de position relative, D' a un seul point commun avec Γ_1, le projeté orthogonal T_1 de Ω_1 sur D'. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_1 T_1}$ est normal à D' : D' est la tangente à Γ_1 en T_1.

Cercle Γ_2. De même, $\overrightarrow{\Omega_2 A}(3,4) = \vec{n}$, non nul, est normal à D : il donne le rayon 5 et la tangente D en A. De plus, $d(\Omega_2, D') = \dfrac{|-24-1|}{5} = 5$: D' est tangente à Γ_2 en le projeté orthogonal T_2 de Ω_2 sur D'.

Équations. D'après l'équation cartésienne d'un cercle :

$$\Gamma_1 : x^2 + (y-8)^2 = 25,$$
$$\Gamma_2 : (x+6)^2 + y^2 = 25.$$

Conclusion. Chacun des deux cercles est tangent à D en A et tangent à D' ; sous forme développée, $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 16y + 39 = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + 12x + 11 = 0$.

7. 1 pts

Déterminer les coordonnées des points de contact T_1 et T_2 de D' avec Γ_1 et avec Γ_2.

INDICE

Le point de contact est le projeté orthogonal du centre sur D' : il appartient à la perpendiculaire à D' passant par le centre.

CORRIGÉ

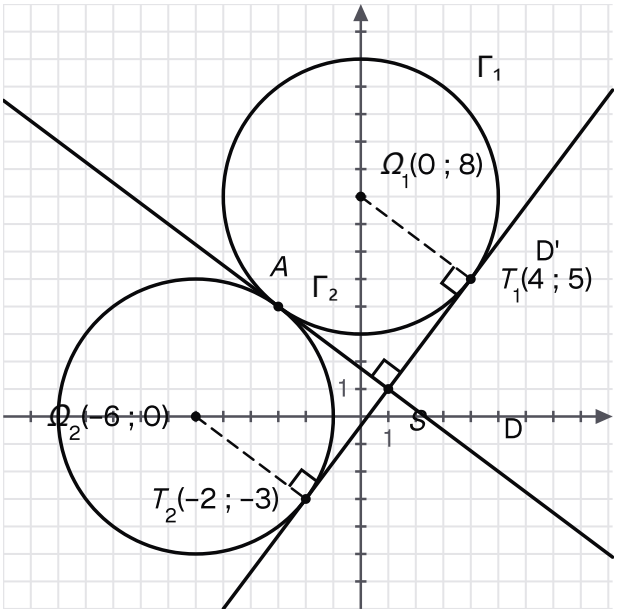
Point T_1. D'après le théorème de position relative, T_1 est le projeté orthogonal de Ω_1 sur D'. La perpendiculaire à D' passant par Ω_1 a pour vecteur normal $\vec{n}(3,4)$. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal, elle a pour équation $3x+4(y-8)=0$, soit $3x+4y-32=0$.

Avec $4x-3y-1=0$, la combinaison de la question 1 donne $25x=100$, donc $x=4$, puis $y=5$.

Point T_2. De même, la perpendiculaire à D' passant par Ω_2 a pour équation $3(x+6)+4y=0$, soit $3x+4y+18=0$. Avec l'équation de D', on obtient $25x=-50$, donc $x=-2$, puis $y=-3$.

Contrôle. $\overrightarrow{\Omega_1 T_1}(4,-3)$ et $\overrightarrow{\Omega_2 T_2}(4,-3)$ ont pour norme 5, le rayon commun.

Conclusion. Les points de contact sont $T_1(4,5)$ et $T_2(-2,-3)$.



Les cercles Γ1 et Γ2, de rayon 5, sont tangents à D en A et touchent D' en T1(4, 5) et T2(-2, -3).

8. 1,5 pts

Montrer que, pour tout point $M(x,y)$ du plan :

$$d(M,D)^2 + d(M,D')^2 = SM^2.$$

En déduire que les points A, T_1 et T_2 appartiennent à un même cercle de centre S, dont on donnera une équation.

INDICE

Écris $3x+4y-7 = 3(x-1)+4(y-1)$ et $4x-3y-1 = 4(x-1)-3(y-1)$, puis développe.

CORRIGÉ

Changement d'écriture. Soit $M(x,y)$ un point du plan, $u = x-1$ et $v = y-1$. Comme $S(1,1)$ appartient à D et à D', on a $3x+4y-7 = 3u+4v$ et $4x-3y-1 = 4u-3v$.

Égalité. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} &d(M,D)^2 + d(M,D')^2 \\ &= \frac{(3u+4v)^2 + (4u-3v)^2}{25} \\ &= \frac{25u^2+25v^2}{25} \\ &= u^2+v^2 = SM^2. \end{aligned}$$

Les trois points.

- A est sur D : $d(A,D) = 0$ et $d(A,D') = \dfrac{25}{5} = 5$ (question 4), donc $SA = 5$.
- T_1 et T_2 sont sur D' : $d(T_1,D) = \dfrac{|12+20-7|}{5} = 5$ et $d(T_2,D) = \dfrac{|-6-12-7|}{5} = 5$, donc $ST_1 = ST_2 = 5$.

Équation. Le cercle de centre $S(1,1)$ et de rayon 5 a pour équation $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Conclusion. Les points A, T_1 et T_2 appartiennent au cercle de centre S et de rayon 5, d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.