BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

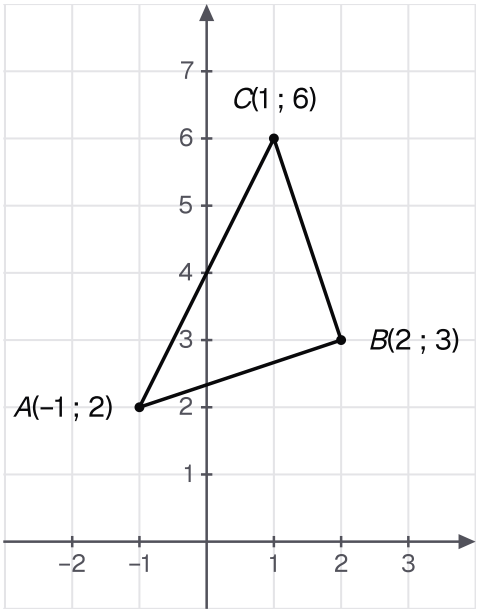
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Entraînement	8

Exercice 1

Les angles d'un triangle par les coordonnées

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$ et $C(1, 6)$. Fais un croquis sur papier pour suivre les calculs.



Le triangle ABC de l'énoncé, avec A(-1, 2), B(2, 3) et C(1, 6), pour suivre les calculs.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, AB et AC.

INDICE

Écris d'abord les coordonnées des deux vecteurs. Le déterminant se calcule par $xy' - x'y$, dans cet ordre.

2.

En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

INDICE

Divise le produit scalaire et le déterminant par $AB \times AC$ (formule du cosinus et du sinus d'un angle orienté). Simplifie $\sqrt{10} \times 2\sqrt{5}$ avant de reconnaître l'angle.

3.

Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis compare les longueurs BA et BC.

4.

Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Vérifier que la somme des trois mesures obtenues est congrue à π modulo 2π.

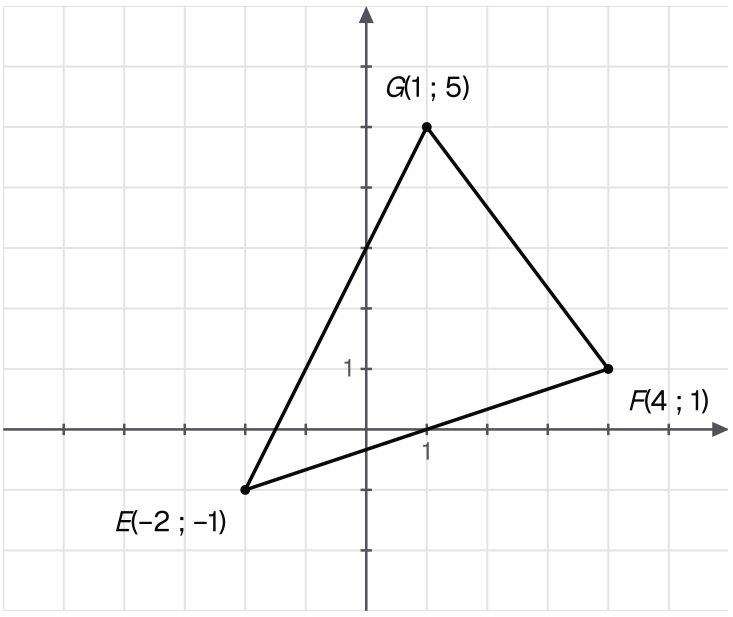
INDICE

Applique la formule du cosinus et du sinus deux fois. Pour $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, le produit scalaire est nul : seul le signe du déterminant décide entre $\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2

Hauteur, distance et aire d'un triangle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le triangle EFG avec $E(-2, -1)$, $F(4, 1)$ et $G(1, 5)$. Fais un croquis sur papier du triangle.



Le triangle EFG de l'énoncé : E(-2, -1), F(4, 1) et G(1, 5).

1.

Montrer que la droite (EF) a pour équation $x - 3y - 1 = 0$.

INDICE

Trouve un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{EF}$, puis applique la caractérisation d'une droite par un vecteur normal en E. Termine en vérifiant aussi F.

2.

Calculer la distance d du point G à la droite (EF).

INDICE

Applique la formule de la distance à une droite à l'équation de la question 1. Rends le dénominateur rationnel à la fin.

3.

En déduire l'aire du triangle EFG.

INDICE

La distance d est la longueur de la hauteur issue de G. Il te manque la base EF.

4.

Écrire une équation de la hauteur h issue de G, puis calculer les coordonnées de son pied H. Contrôler le résultat de la question 2.

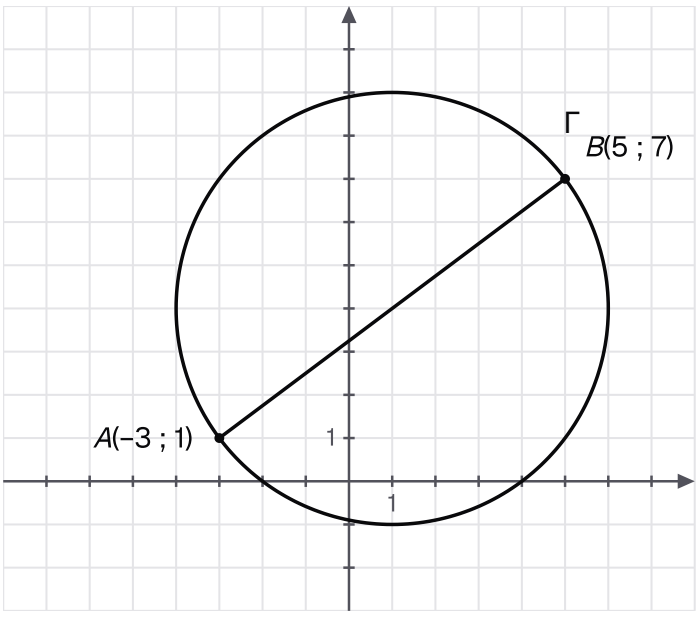
INDICE

$\overrightarrow{EF}$ est normal à h. Le pied H est sur h et sur (EF) : résous le système de leurs deux équations.

Exercice 3

Le cercle de diamètre [AB]

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(-3, 1)$ et $B(5, 7)$, et Γ le cercle de diamètre $[AB]$. Fais un croquis sur papier du cercle et de son diamètre.



Les points A(-3, 1) et B(5, 7), et le cercle Γ dont [AB] est un diamètre.

1.

Montrer que Γ a pour équation $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$.

INDICE

Les points A et B sont distincts : applique la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$, puis développe.

2.

Déterminer le centre et le rayon de Γ par l'équation, et contrôler avec A et B.

INDICE

Complète les carrés (étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$). Pour le contrôle, compare au milieu de $[AB]$ et à $\dfrac{AB}{2}$.

3.

Vérifier que $P(4, 0)$ appartient à Γ. Que peut-on dire du triangle APB ?

INDICE

Remplace dans l'équation. Puis relis la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$: que vaut $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$?

4.

Déterminer les points de Γ situés sur l'axe des ordonnées.

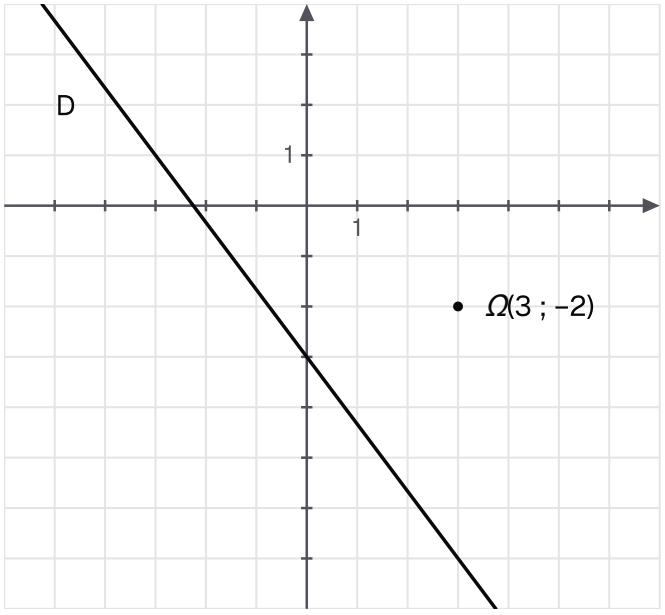
INDICE

Un point de l'axe des ordonnées a pour abscisse 0. Tu obtiens une équation du second degré en y : calcule son discriminant.

Exercice 4

Un cercle tangent à une droite

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\Omega(3, -2)$ et D la droite d'équation $4x + 3y + 9 = 0$. Fais un croquis sur papier : place Ω et la droite D.



Le point Ω(3, -2) et la droite D d'équation 4x + 3y + 9 = 0, à placer d'abord sur le croquis.

1.

Calculer $d(\Omega, D)$. En déduire une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω tangent à D.

INDICE

Relis le théorème de position relative et l'équation de la tangente : quand une droite est-elle tangente à un cercle de centre Ω ?

2.

Déterminer le point de contact H de D et de $\mathcal{C}$.

INDICE

H est sur D et sur la perpendiculaire à D passant par Ω : écris l'équation de cette perpendiculaire (un vecteur directeur de D lui est normal), puis résous le système.

3.

Retrouver ce résultat en résolvant le système formé par les équations de D et de $\mathcal{C}$.

INDICE

Tire $y + 2$ de l'équation de D, remplace, puis multiplie par 9. Que vaut le discriminant d'une équation qui n'a qu'une seule solution ?

4.

Déterminer une équation de l'autre droite D', parallèle à D, tangente à $\mathcal{C}$.

INDICE

Une droite parallèle à D a une équation $4x + 3y + c = 0$ (critère de parallélisme). Écris $d(\Omega, D') = 3$: une valeur absolue donne deux cas.

Exercice 5

Deux droites face à un cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$, $D_1 : x - y + 8 = 0$ et $D_2 : x + 2y + 12 = 0$. Un croquis sur papier aide à prévoir les positions.

1.

Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

INDICE

Complète les carrés en x et en y, puis regarde le signe de k.

2.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de chacune des droites D_1 et D_2.

INDICE

Calcule $d(\Omega, D_1)$ et $d(\Omega, D_2)$, puis compare à 5. Pour comparer deux nombres positifs, compare leurs carrés.

3.

Déterminer les coordonnées des points communs à D_1 et à $\mathcal{C}$.

INDICE

Tire y de l'équation de D_1 et remplace dans celle de $\mathcal{C}$. Simplifie l'équation du second degré obtenue avant de la résoudre.

4.

Confirmer par le calcul que le système formé par les équations de D_2 et de $\mathcal{C}$ n'a pas de solution.

INDICE

Tire x de l'équation de D_2. Que dit le signe du discriminant de l'équation en y obtenue sur le nombre de solutions ?

Exercice 6

Un paramétrage à reconnaître

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel θ, on note M_θ le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x = -1 + 3\cos\theta \\ y = 4 - 3\sin\theta \end{cases}$$

On note Γ l'ensemble des points M_θ, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1.

Montrer que tout point M_θ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-1, 4)$ et de rayon 3.

INDICE

Calcule $(x+1)^2 + (y-4)^2$ pour M_θ, puis utilise la relation entre $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$.

2.

Réciproquement, montrer que tout point de $\mathcal{C}$ est un point M_θ. Conclure sur Γ et en donner une équation cartésienne développée.

INDICE

La représentation paramétrique d'un cercle fournit un réel φ avec un signe $+$ devant le sinus. Quel réel θ faut-il choisir pour retrouver le signe $-$?

3.

Calculer les coordonnées du point $M_{\frac{5\pi}{6}}$.

INDICE

Utilise $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, valeurs remarquables du chapitre de trigonométrie. Attention au signe $-$ devant le sinus.

4.

Déterminer les réels θ de $]-\pi, \pi]$ tels que M_θ ait pour ordonnée 4, et les points correspondants.

INDICE

L'ordonnée vaut 4 si et seulement si $\sin\theta = 0$. Quelles en sont les solutions dans $]-\pi, \pi]$?

Exercice 7

Des inégalités par Cauchy-Schwarz

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Montrer que, pour tous réels x et y :

$$|2x - 3y| \leq \sqrt{13}\,\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Préciser les cas d'égalité.

INDICE

Reconnais $2x - 3y$ comme le produit scalaire de deux vecteurs. L'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz demande la colinéarité : écris-la avec le déterminant.

2.

En déduire que, si $x^2 + y^2 = 13$, alors $-13 \leq 2x - 3y \leq 13$. Pour quels couples (x, y) a-t-on $2x - 3y = 13$?

INDICE

Remplace $\sqrt{x^2 + y^2}$ par $\sqrt{13}$. Pour l'égalité, écris $(x, y) = \lambda(2, -3)$, puis trouve λ avec les deux conditions.

3.

Montrer que, pour tous réels a et b :

$$(a + 2b)^2 \leq 5(a^2 + b^2),$$

avec égalité si et seulement si $b = 2a$.

INDICE

Choisis deux vecteurs dont le produit scalaire vaut $a + 2b$. Élève ensuite au carré : les deux membres sont positifs.

4.

Pour un réel x, on pose $\vec{p}(x, 1)$ et $\vec{q}(3 - x, 2)$. Calculer $\|\vec{p}\|$, $\|\vec{q}\|$ et $\|\vec{p} + \vec{q}\|$, puis en déduire que, pour tout réel x :

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(3 - x)^2 + 4} \geq 3\sqrt{2}.$$

INDICE

Compare $\|\vec{p} + \vec{q}\|$ à $\|\vec{p}\| + \|\vec{q}\|$.

Exercice 8

Une famille d'ensembles à paramètre

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel m, on note E_m l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$x^2 + y^2 - 2mx + 4y + 4m + 1 = 0.$$

1.

Montrer que l'équation de E_m équivaut à $(x - m)^2 + (y + 2)^2 = m^2 - 4m + 3$.

INDICE

Complète le carré en x, où m joue le rôle de a, puis celui en y.

2.

Discuter, suivant les valeurs de m, la nature de E_m.

INDICE

Factorise $m^2 - 4m + 3$: 1 en est une racine. Étudie son signe : chaque cas donne un cercle, un point ou l'ensemble vide.

3.

Déterminer les réels m pour lesquels E_m est un cercle de rayon $2\sqrt{2}$, et préciser son centre.

INDICE

Écris $m^2 - 4m + 3 = 8$, résous, puis vérifie que les valeurs trouvées sont bien dans le cas « cercle ».

4.

Déterminer le réel m pour lequel E_m est un cercle passant par l'origine O.

INDICE

Remplace x et y par 0 dans l'équation de départ. Contrôle ensuite le signe de $m^2 - 4m + 3$.