BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

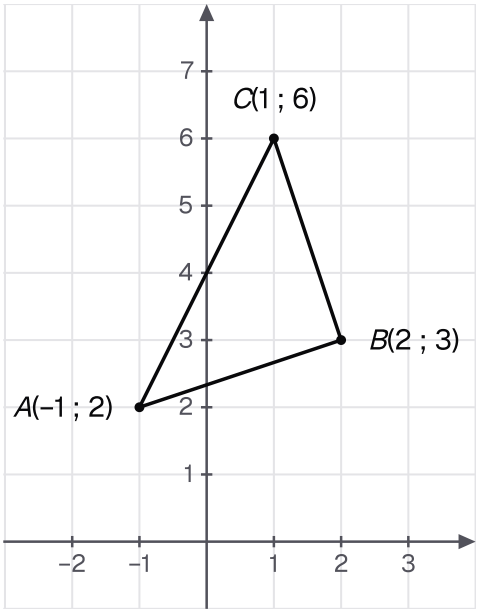
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Entraînement	8

Exercice 1

Les angles d'un triangle par les coordonnées

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$ et $C(1, 6)$. Fais un croquis sur papier pour suivre les calculs.



Le triangle ABC de l'énoncé, avec A(-1, 2), B(2, 3) et C(1, 6), pour suivre les calculs.

1.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, AB et AC.

INDICE

Écris d'abord les coordonnées des deux vecteurs. Le déterminant se calcule par $xy' - x'y$, dans cet ordre.

CORRIGÉ

Coordonnées. On a $\overrightarrow{AB}(3, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(2, 4)$.

Produit scalaire et déterminant. D'après l'expression analytique du produit scalaire et la définition du déterminant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 6 + 4 = 10, \\ \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= 3 \times 4 - 2 \times 1 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Longueurs.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}, \\ AC &= \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 10$, $AB = \sqrt{10}$ et $AC = 2\sqrt{5}$.

2.

En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

INDICE

Divise le produit scalaire et le déterminant par $AB \times AC$ (formule du cosinus et du sinus d'un angle orienté). Simplifie $\sqrt{10} \times 2\sqrt{5}$ avant de reconnaître l'angle.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls, et :

$$\begin{aligned} AB \times AC &= \sqrt{10} \times 2\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Cosinus et sinus. D'après la formule du cosinus et du sinus, une mesure θ de l'angle vérifie :

$$\cos\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mesure. Ces deux valeurs sont le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{4}$.

Conclusion.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

3.

Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis compare les longueurs BA et BC.

CORRIGÉ

Angle droit. On a $\overrightarrow{BA}(-3, -1)$ et $\overrightarrow{BC}(-1, 3)$, non nuls. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 - 3 = 0.$$

D'après le critère d'orthogonalité, ces vecteurs sont orthogonaux : le triangle est rectangle en B.

Longueurs. $BA = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et $BC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, donc $BA = BC$.

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

4.

Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Vérifier que la somme des trois mesures obtenues est congrue à π modulo 2π.

INDICE

Applique la formule du cosinus et du sinus deux fois. Pour $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, le produit scalaire est nul : seul le signe du déterminant décide entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

CORRIGÉ

Angle en B. Le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ est nul (question 3) et $BC \times BA = 10$. Le déterminant vaut :

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &= (-1) \times (-1) - (-3) \times 3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

D'après la formule du cosinus et du sinus, une mesure θ' de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ vérifie $\cos\theta' = 0$ et $\sin\theta' = 1$. Donc :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Angle en C. On a $\overrightarrow{CA}(-2, -4)$ et $\overrightarrow{CB}(1, -3)$, non nuls :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= -2 + 12 \\ &= 10, \\ \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) &= 6 + 4 \\ &= 10, \end{aligned}$$

et $CA \times CB = 2\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 10\sqrt{2}$. Le cosinus et le sinus valent tous deux $\frac{\sqrt{2}}{2}$: d'après la formule du cosinus et du sinus, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Somme. Avec la question 2 :

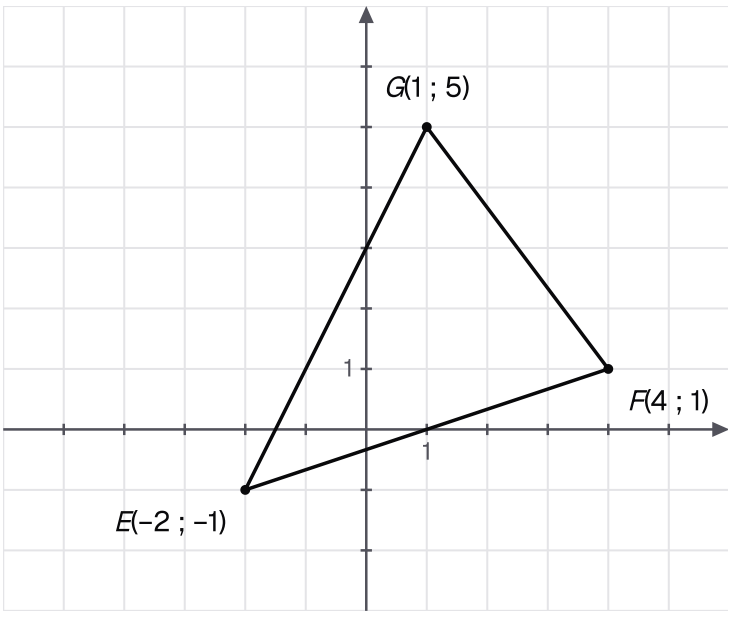
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Conclusion. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. La somme des trois mesures est congrue à π modulo 2π, comme pour tout triangle (somme des angles orientés, vue au chapitre de trigonométrie).

Exercice 2

Hauteur, distance et aire d'un triangle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le triangle EFG avec $E(-2, -1)$, $F(4, 1)$ et $G(1, 5)$. Fais un croquis sur papier du triangle.



Le triangle EFG de l'énoncé : E(-2, -1), F(4, 1) et G(1, 5).

1.

Montrer que la droite (EF) a pour équation $x - 3y - 1 = 0$.

INDICE

Trouve un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{EF}$, puis applique la caractérisation d'une droite par un vecteur normal en E. Termine en vérifiant aussi F.

CORRIGÉ

Un vecteur normal. On a $\overrightarrow{EF}(6, 2)$. Le vecteur $\vec{n}(1, -3)$ est non nul et $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 6 - 6 = 0$. D'après le critère d'orthogonalité, $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur directeur $\overrightarrow{EF}$ de (EF) : il est normal à (EF).

Équation. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal, $M(x, y)$ appartient à (EF) si et seulement si $\overrightarrow{EM} \cdot \vec{n} = 0$:

$$(x + 2) - 3(y + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 3y - 1 = 0.$$

Vérification. $-2 + 3 - 1 = 0$ pour E et $4 - 3 - 1 = 0$ pour F.

Conclusion. La droite (EF) a pour équation $x - 3y - 1 = 0$.

2.

Calculer la distance d du point G à la droite (EF).

INDICE

Applique la formule de la distance à une droite à l'équation de la question 1. Rends le dénominateur rationnel à la fin.

CORRIGÉ

Ici $(a, b) = (1, -3) \neq (0, 0)$. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d &= \frac{|1 - 3 \times 5 - 1|}{\sqrt{1 + 9}} \\ &= \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance de G à la droite (EF) vaut $d = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

3.

En déduire l'aire du triangle EFG.

INDICE

La distance d est la longueur de la hauteur issue de G. Il te manque la base EF.

CORRIGÉ

Base. $EF = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$.

Hauteur. La distance d de G à (EF) est la longueur de la hauteur issue de G.

Aire.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times EF \times d \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} \\ &= \frac{3 \times 10}{2} = 15. \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du triangle EFG vaut 15.

4.

Écrire une équation de la hauteur h issue de G, puis calculer les coordonnées de son pied H. Contrôler le résultat de la question 2.

INDICE

$\overrightarrow{EF}$ est normal à h. Le pied H est sur h et sur (EF) : résous le système de leurs deux équations.

CORRIGÉ

Équation de h. La hauteur h passe par G et elle est perpendiculaire à (EF) : $\overrightarrow{EF}(6,2)$, non nul, lui est normal. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal :

$$\begin{aligned} &6(x-1)+2(y-5)=0 \\ \Leftrightarrow\ &3x+y-8=0. \end{aligned}$$

Pied H. Le point H est sur (EF) et sur h :

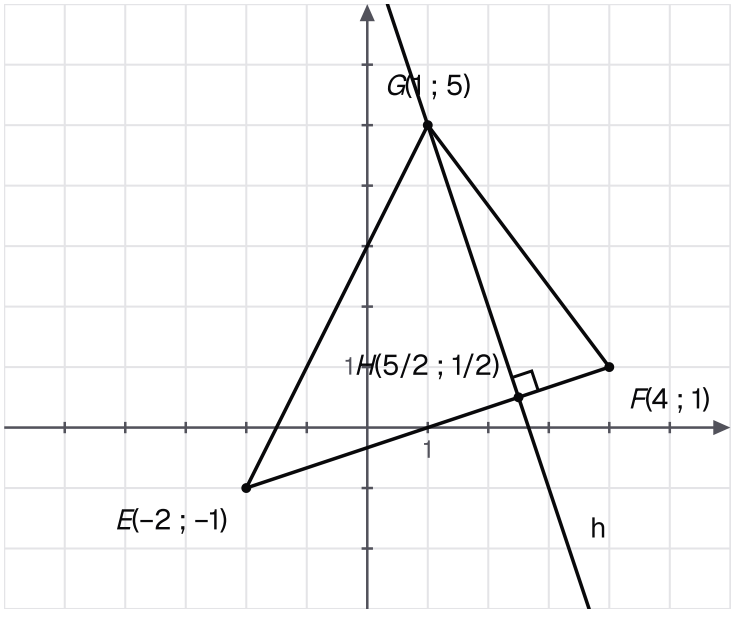
$$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ 3x+y-8=0 \end{cases}$$

La première équation donne $x=3y+1$. En remplaçant dans la seconde, $10y-5=0$, donc $y=\dfrac{1}{2}$, puis $x=\dfrac{5}{2}$.

Contrôle. $\overrightarrow{GH}\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{9}{2}\right)$, donc :

$$\begin{aligned} GH &= \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{81}{4}}=\frac{\sqrt{90}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{2}=d. \end{aligned}$$

Conclusion. h : $3x+y-8=0$ et $H\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$; la longueur GH redonne la distance de la question 2.

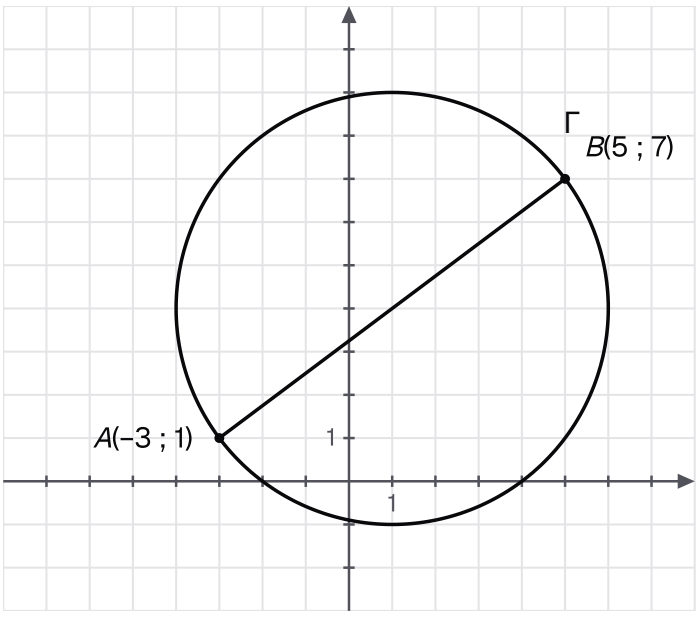


La hauteur h issue de G rencontre (EF) en H(5/2, 1/2), à angle droit ; GH est la distance calculée à la question 2.

Exercice 3

Le cercle de diamètre [AB]

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(-3, 1)$ et $B(5, 7)$, et Γ le cercle de diamètre $[AB]$. Fais un croquis sur papier du cercle et de son diamètre.



Les points A(-3, 1) et B(5, 7), et le cercle Γ dont [AB] est un diamètre.

1.

Montrer que Γ a pour équation $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$.

INDICE

Les points A et B sont distincts : applique la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$, puis développe.

CORRIGÉ

Les points A et B sont distincts. D'après la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$, $M(x, y)$ appartient à Γ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, avec $\overrightarrow{MA}(-3 - x, 1 - y)$ et $\overrightarrow{MB}(5 - x, 7 - y)$.

Cette condition s'écrit :

$$\begin{aligned} &(x + 3)(x - 5) \\ &\quad + (y - 1)(y - 7) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 - 2x - 15 \\ &\quad + y^2 - 8y + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 - 2x \\ &\quad - 8y - 8 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Le cercle Γ a pour équation $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$.

2.

Déterminer le centre et le rayon de Γ par l'équation, et contrôler avec A et B.

INDICE

Complète les carrés (étude de l'ensemble $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$). Pour le contrôle, compare au milieu de $[AB]$ et à $\dfrac{AB}{2}$.

CORRIGÉ

Par l'équation. On a $x^2-2x=(x-1)^2-1$ et $y^2-8y=(y-4)^2-16$. L'équation équivaut à :

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-4)^2\\ =1+16+8=25.\end{aligned}$$

Comme $k=25>0$, d'après l'étude de l'ensemble $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, Γ a pour centre $\Omega(1,4)$ et pour rayon 5.

Contrôle. Le milieu de $[AB]$ est $\left(\dfrac{-3+5}{2},\dfrac{1+7}{2}\right)$, soit $(1,4)$. De plus, $AB=\sqrt{64+36}=10$, dont la moitié vaut 5.

Conclusion. Γ est le cercle de centre $\Omega(1,4)$ et de rayon 5.

3.

Vérifier que $P(4,0)$ appartient à Γ. Que peut-on dire du triangle APB ?

INDICE

Remplace dans l'équation. Puis relis la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$: que vaut $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$?

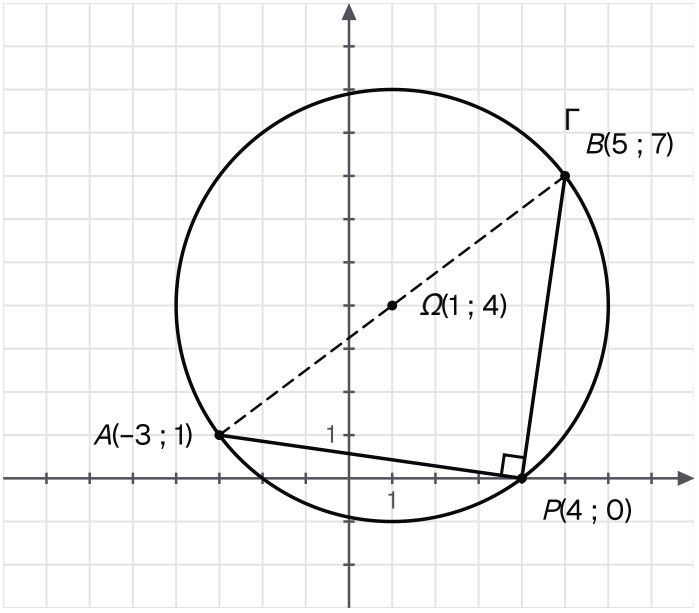
CORRIGÉ

Appartenance. $16+0-8-0-8=0$: le point P appartient à Γ.

Produit scalaire. D'après la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$. Contrôle direct : $\overrightarrow{PA}(-7,1)$ et $\overrightarrow{PB}(1,7)$ donnent $-7+7=0$.

Angle droit. Ces vecteurs sont non nuls, car P est distinct de A et de B. D'après le critère d'orthogonalité, ils sont orthogonaux.

Conclusion. Le triangle APB est rectangle en P.



Le point P(4, 0) est sur Γ : le triangle APB est rectangle en P, comme tout triangle inscrit dont un côté est le diamètre [AB].

4.

Déterminer les points de Γ situés sur l'axe des ordonnées.

INDICE

Un point de l'axe des ordonnées a pour abscisse 0. Tu obtiens une équation du second degré en y : calcule son discriminant.

CORRIGÉ

Un point de l'axe des ordonnées s'écrit $M(0, y)$. Il appartient à Γ si et seulement si :

$$y^2 - 8y - 8 = 0.$$

Discriminant. Il vaut $64 + 32 = 96 = 16 \times 6 > 0$: l'équation a deux solutions.

Solutions.

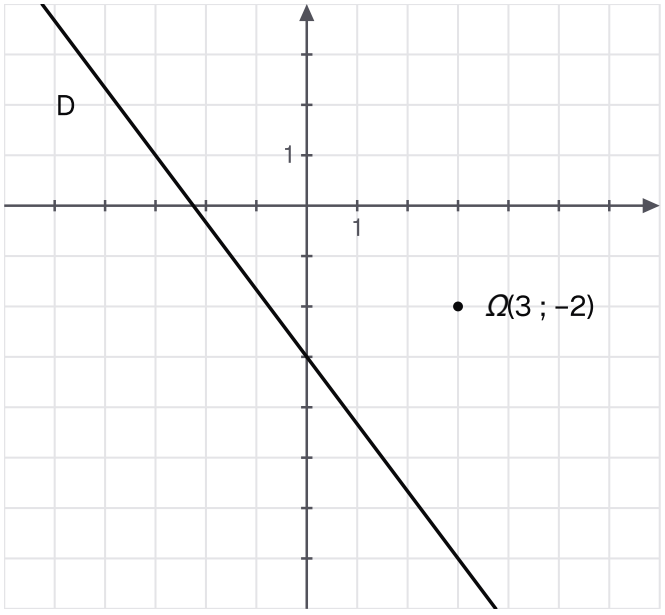
$$y = \frac{8 + 4\sqrt{6}}{2} = 4 + 2\sqrt{6},$$
$$y = \frac{8 - 4\sqrt{6}}{2} = 4 - 2\sqrt{6}.$$

Conclusion. Les points de Γ situés sur l'axe des ordonnées sont $(0, 4 + 2\sqrt{6})$ et $(0, 4 - 2\sqrt{6})$.

Exercice 4

Un cercle tangent à une droite

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\Omega(3, -2)$ et D la droite d'équation $4x + 3y + 9 = 0$. Fais un croquis sur papier : place Ω et la droite D.



Le point Ω(3, -2) et la droite D d'équation 4x + 3y + 9 = 0, à placer d'abord sur le croquis.

1.

Calculer $d(\Omega, D)$. En déduire une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω tangent à D.

INDICE

Relis le théorème de position relative et l'équation de la tangente : quand une droite est-elle tangente à un cercle de centre Ω ?

CORRIGÉ

Distance. Avec $(a, b) = (4, 3) \neq (0, 0)$, d'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$d(\Omega, D) = \frac{|12 - 6 + 9|}{5} = 3.$$

Condition de tangence. Soit $r > 0$ et le cercle de centre Ω et de rayon r.

- Si D est tangente à ce cercle, elle n'a qu'un point commun avec lui (équation de la tangente) ; d'après le théorème de position relative, $d(\Omega, D) = r$.
- Réciproquement, si $d(\Omega, D) = r$, l'équation de la tangente montre que D est tangente à ce cercle.

Donc D est tangente au cercle si et seulement si $r = 3$.

Conclusion. $d(\Omega, D) = 3$ et, d'après l'équation d'un cercle :

$$\mathcal{C} : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

2.

Déterminer le point de contact H de D et de $\mathcal{C}$.

INDICE

H est sur D et sur la perpendiculaire à D passant par Ω : écris l'équation de cette perpendiculaire (un vecteur directeur de D lui est normal), puis résous le système.

CORRIGÉ

Perpendiculaire Δ. D'après le théorème de position relative, H est le projeté orthogonal de Ω sur D : il est sur la perpendiculaire Δ à D passant par Ω. Le vecteur $\vec{w}(-3,4)$, directeur de D et non nul, est normal à Δ. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal :

$$\begin{aligned} &-3(x-3)+4(y+2)=0 \\ \Leftrightarrow\ &3x-4y-17=0. \end{aligned}$$

Système. Le point H vérifie :

$$\begin{cases} 4x+3y+9=0 \\ 3x-4y-17=0 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 4, la seconde par 3, puis en additionnant : $25x-15=0$. Donc $x=\dfrac{3}{5}$, puis $y=\dfrac{-4x-9}{3}=-\dfrac{19}{5}$.

Contrôle. $\overrightarrow{\Omega H}\left(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{9}{5}\right)$, donc $\Omega H=\dfrac{15}{5}=3$.

Conclusion. Le point de contact est $H\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{19}{5}\right)$.

3.

Retrouver ce résultat en résolvant le système formé par les équations de D et de $\mathcal{C}$.

INDICE

Tire $y+2$ de l'équation de D, remplace, puis multiplie par 9. Que vaut le discriminant d'une équation qui n'a qu'une seule solution ?

CORRIGÉ

Substitution. L'équation de D donne $y=\dfrac{-4x-9}{3}$, donc $y+2=-\dfrac{4x+3}{3}$. On remplace dans l'équation de $\mathcal{C}$, puis on multiplie par 9 :

$$\begin{aligned} 9(x-3)^2+(4x+3)^2&=81 \\ 25x^2-30x+9&=0 \\ (5x-3)^2&=0. \end{aligned}$$

Solution. Le discriminant est nul : la seule solution est $x=\dfrac{3}{5}$, et alors $y=-\dfrac{19}{5}$.

Conclusion. Le système a une seule solution : on retrouve le seul point commun $H\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{19}{5}\right)$.

4.

Déterminer une équation de l'autre droite D', parallèle à D, tangente à $\mathcal{C}$.

INDICE

Une droite parallèle à D a une équation $4x + 3y + c = 0$ (critère de parallélisme). Écris $d(\Omega, D') = 3$: une valeur absolue donne deux cas.

CORRIGÉ

Droites parallèles à D. Soit $D' : a'x + b'y + c' = 0$, avec $(a', b') \neq (0, 0)$. D'après le critère de parallélisme, D' est parallèle à D si et seulement si $4b' - 3a' = 0$. Par le critère de colinéarité, cela signifie $(a', b') = \lambda(4, 3)$ avec $\lambda \neq 0$. En divisant par λ, D' a une équation de la forme $4x + 3y + c = 0$.

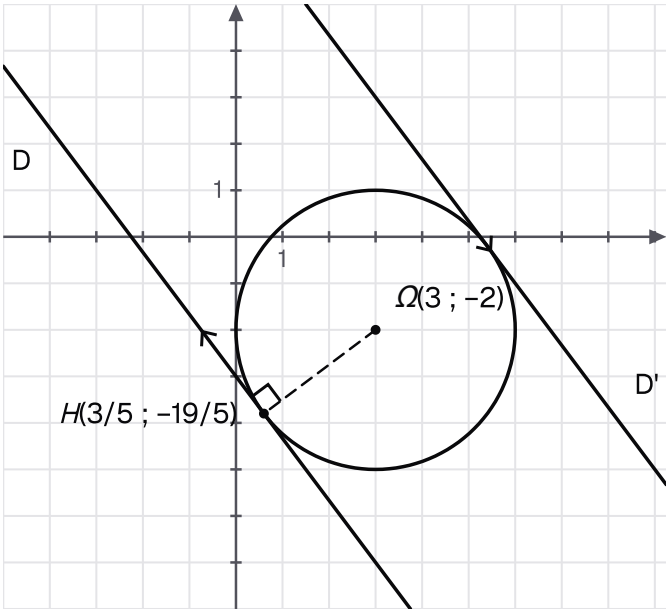
Tangence. Comme à la question 1, D' est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $d(\Omega, D') = 3$. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} &\frac{|12 - 6 + c|}{5} = 3 \\ &\Leftrightarrow |6 + c| = 15 \\ &\Leftrightarrow c = 9 \text{ ou } c = -21. \end{aligned}$$

La valeur $c = 9$ redonne D.

Point de contact. C'est le projeté orthogonal de Ω sur D'. Comme D' est parallèle à D, il est sur la même perpendiculaire $\Delta : 3x - 4y - 17 = 0$. La combinaison de la question 2 donne ici $25x - 135 = 0$, soit $x = \frac{27}{5}$, puis $y = -\frac{1}{5}$.

Conclusion. L'autre tangente parallèle à D est $D' : 4x + 3y - 21 = 0$, de point de contact $\left(\frac{27}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.



Le cercle centré en Ω, de rayon 3 est tangent à D en H(3/5, -19/5) et à la droite parallèle D' : 4x + 3y - 21 = 0, de l'autre côté.

Exercice 5

Deux droites face à un cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$, $D_1 : x - y + 8 = 0$ et $D_2 : x + 2y + 12 = 0$. Un croquis sur papier aide à prévoir les positions.

1.

Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

INDICE

Complète les carrés en x et en y, puis regarde le signe de k.

CORRIGÉ

Carrés complétés. On a $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ et $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$. L'équation équivaut à :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-2)^2 \\ = 1 + 4 + 20 = 25.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $k = 25 > 0$, d'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-1, 2)$ et de rayon $r = 5$.

2.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de chacune des droites D_1 et D_2.

INDICE

Calcule $d(\Omega, D_1)$ et $d(\Omega, D_2)$, puis compare à 5. Pour comparer deux nombres positifs, compare leurs carrés.

CORRIGÉ

Distances. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned}d(\Omega, D_1) &= \frac{|-1 - 2 + 8|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2}, \\ d(\Omega, D_2) &= \frac{|-1 + 4 + 12|}{\sqrt{5}} \\ &= 3\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Comparaison au rayon. Les distances et le rayon sont positifs : on compare leurs carrés.

- $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} < 25$, donc $d(\Omega, D_1) < 5$.
- $(3\sqrt{5})^2 = 45 > 25$, donc $d(\Omega, D_2) > 5$.

Conclusion. D'après le théorème de position relative, D_1 coupe $\mathcal{C}$ en deux points, et D_2 n'a aucun point commun avec $\mathcal{C}$.

3.

Déterminer les coordonnées des points communs à D_1 et à $\mathcal{C}$.

INDICE

Tire y de l'équation de D_1 et remplace dans celle de $\mathcal{C}$. Simplifie l'équation du second degré obtenue avant de la résoudre.

CORRIGÉ

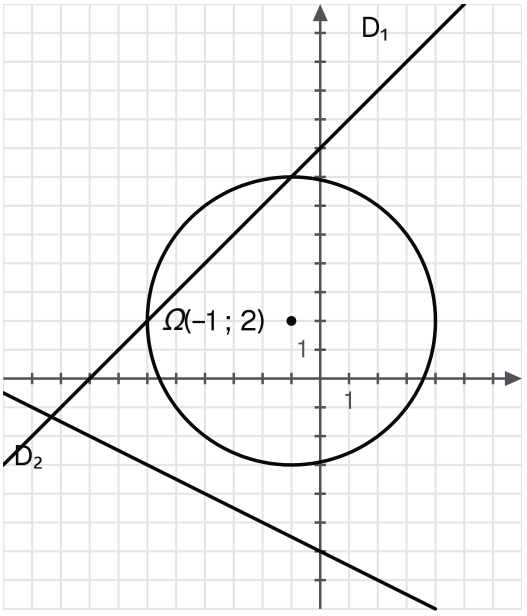
Substitution. L'équation de D_1 donne $y = x + 8$. En remplaçant dans celle de $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &x^2 + (x+8)^2 + 2x \\ &\quad - 4(x+8) - 20 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &2x^2 + 14x + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + 7x + 6 = 0. \end{aligned}$$

Résolution. Le discriminant vaut $49 - 24 = 25 > 0$: deux solutions, $x = -1$ et $x = -6$, comme l'annonçait le théorème de position relative. Avec $y = x + 8$, on obtient $y = 7$ et $y = 2$.

Contrôle. Dans l'équation réduite $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$: $0 + 25 = 25$ et $25 + 0 = 25$.

Conclusion. Les points communs à D_1 et à $\mathcal{C}$ sont $(-1, 7)$ et $(-6, 2)$.



Le cercle centré en Ω(-1, 2), de rayon 5 : D1 le coupe en (-1, 7) et (-6, 2), tandis que D2 passe au large.

4.

Confirmer par le calcul que le système formé par les équations de D_2 et de $\mathcal{C}$ n'a pas de solution.

INDICE

Tire x de l'équation de D_2. Que dit le signe du discriminant de l'équation en y obtenue sur le nombre de solutions ?

CORRIGÉ

Substitution. L'équation de D_2 donne $x = -12 - 2y$. En remplaçant dans l'équation de $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &(-12-2y)^2 + y^2 \\ &\quad + 2(-12-2y) \\ &\quad - 4y - 20 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &5y^2 + 40y + 100 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &y^2 + 8y + 20 = 0. \end{aligned}$$

Discriminant. Il vaut $64 - 80 = -16 < 0$: cette équation n'a aucune solution réelle.

Conclusion. Le système formé par les équations de D_2 et de $\mathcal{C}$ n'a pas de solution, ce qui confirme la question 2.

Exercice 6

Un paramétrage à reconnaître

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel θ, on note M_θ le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x = -1 + 3\cos\theta \\ y = 4 - 3\sin\theta \end{cases}$$

On note Γ l'ensemble des points M_θ, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1.

Montrer que tout point M_θ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-1, 4)$ et de rayon 3.

INDICE

Calcule $(x+1)^2 + (y-4)^2$ pour M_θ, puis utilise la relation entre $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$.

CORRIGÉ

Soit θ un réel. Pour M_θ, on a $x + 1 = 3\cos\theta$ et $y - 4 = -3\sin\theta$, donc :

$$\begin{aligned} &(x+1)^2 + (y-4)^2 \\ &= 9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta = 9. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après l'équation d'un cercle, tout point M_θ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-1, 4)$ et de rayon 3.

2.

Réciproquement, montrer que tout point de $\mathcal{C}$ est un point M_θ. Conclure sur Γ et en donner une équation cartésienne développée.

INDICE

La représentation paramétrique d'un cercle fournit un réel φ avec un signe $+$ devant le sinus. Quel réel θ faut-il choisir pour retrouver le signe $-$?

CORRIGÉ

Réciproque. Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{C}$. D'après la représentation paramétrique d'un cercle, il existe un réel φ tel que $x = -1 + 3\cos\varphi$ et $y = 4 + 3\sin\varphi$.

Choix du paramètre. Posons $\theta = -\varphi$. Le cosinus est pair et le sinus impair : $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin\theta = -\sin\varphi$. Donc $x = -1 + 3\cos\theta$ et $y = 4 - 3\sin\theta$: $M = M_\theta$.

Équation. Avec la question 1, $\Gamma = \mathcal{C}$. En développant $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$, on obtient $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 9$.

Conclusion. Γ est le cercle $\mathcal{C}$, d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$.

3.

Calculer les coordonnées du point $M_{\frac{5\pi}{6}}$.

INDICE

Utilise $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, valeurs remarquables du chapitre de trigonométrie. Attention au signe $-$ devant le sinus.

CORRIGÉ

On a $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Donc :

$$x = -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2},$$
$$y = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Contrôle. $(x+1)^2 + (y-4)^2 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = 9$.

Conclusion. $M_{\frac{5\pi}{6}}\left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

4.

Déterminer les réels θ de $]-\pi, \pi]$ tels que M_θ ait pour ordonnée 4, et les points correspondants.

INDICE

L'ordonnée vaut 4 si et seulement si $\sin\theta = 0$. Quelles en sont les solutions dans $]-\pi, \pi]$?

CORRIGÉ

Équation. L'ordonnée de M_θ vaut 4 si et seulement si $3\sin\theta = 0$, soit $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta \equiv 0\ [\pi]$.

Solutions dans l'intervalle. Dans $]-\pi, \pi]$, cela donne $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

Points. $M_0(-1+3, 4)$ et $M_\pi(-1-3, 4)$, soit $M_0(2, 4)$ et $M_\pi(-4, 4)$. Ces points sont distants de $6 = 2 \times 3$: ce sont les extrémités d'un diamètre de $\mathcal{C}$.

Conclusion. Les réels cherchés sont 0 et π ; les points correspondants sont $M_0(2, 4)$ et $M_\pi(-4, 4)$.

Exercice 7

Des inégalités par Cauchy-Schwarz

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Montrer que, pour tous réels x et y :

$$|2x - 3y| \leq \sqrt{13}\,\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Préciser les cas d'égalité.

INDICE

Reconnais $2x - 3y$ comme le produit scalaire de deux vecteurs. L'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz demande la colinéarité : écris-la avec le déterminant.

CORRIGÉ

Vecteurs. Soit x et y deux réels, $\vec{a}(2, -3)$ et $\vec{m}(x, y)$. D'après l'expression analytique du produit scalaire, $\vec{a} \cdot \vec{m} = 2x - 3y$. De plus, $\|\vec{a}\| = \sqrt{13}$ et $\|\vec{m}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Inégalité. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\vec{a} \cdot \vec{m}| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{m}\|$, soit :

$$|2x - 3y| \leq \sqrt{13}\,\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cas d'égalité. L'égalité a lieu si et seulement si $\vec{a}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires, c'est-à-dire :

$$\det(\vec{a}, \vec{m}) = 2y + 3x = 0.$$

Conclusion. L'inégalité est vraie pour tous réels x et y, avec égalité si et seulement si $3x + 2y = 0$.

2.

En déduire que, si $x^2 + y^2 = 13$, alors $-13 \leq 2x - 3y \leq 13$. Pour quels couples (x, y) a-t-on $2x - 3y = 13$?

INDICE

Remplace $\sqrt{x^2 + y^2}$ par $\sqrt{13}$. Pour l'égalité, écris $(x, y) = \lambda(2, -3)$, puis trouve λ avec les deux conditions.

CORRIGÉ

Encadrement. Si $x^2 + y^2 = 13$, la question 1 donne :

$$\begin{aligned} &|2x - 3y| \\ &\leq \sqrt{13} \times \sqrt{13} = 13, \end{aligned}$$

soit $-13 \leq 2x - 3y \leq 13$.

Cas $2x - 3y = 13$. On est alors dans le cas d'égalité : $\vec{m}$ est colinéaire à $\vec{a}$, qui est non nul. Il existe donc un réel λ tel que $(x, y) = \lambda(2, -3)$.

- La condition $x^2 + y^2 = 13$ donne $13\lambda^2 = 13$, soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.
- La condition $2x - 3y = 13$ donne $13\lambda = 13$, qui impose $\lambda = 1$.

Réciproque. Le couple $(2, -3)$ convient : $2^2 + (-3)^2 = 13$ et $2 \times 2 - 3 \times (-3) = 13$.

Conclusion. Si $x^2 + y^2 = 13$, alors $-13 \leq 2x - 3y \leq 13$, et l'on a $2x - 3y = 13$ pour $(x, y) = (2, -3)$. C'est le seul couple.

3.

Montrer que, pour tous réels a et b :

$$(a+2b)^2 \leq 5(a^2+b^2),$$

avec égalité si et seulement si $b = 2a$.

INDICE

Choisis deux vecteurs dont le produit scalaire vaut $a+2b$. Élève ensuite au carré : les deux membres sont positifs.

CORRIGÉ

Inégalité. Soit a et b deux réels, $\vec{e}(1,2)$ et $\vec{f}(a,b)$. Alors $\vec{e}\cdot\vec{f} = a+2b$ et $\|\vec{e}\| = \sqrt{5}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a+2b| \leq \sqrt{5}\,\sqrt{a^2+b^2}.$$

Les deux membres sont positifs : en élevant au carré, $(a+2b)^2 \leq 5(a^2+b^2)$.

Cas d'égalité. L'égalité des carrés équivaut à celle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc à la colinéarité de $\vec{e}$ et $\vec{f}$:

$$\det(\vec{e},\vec{f}) = b - 2a = 0.$$

Conclusion. Pour tous réels a et b, $(a+2b)^2 \leq 5(a^2+b^2)$, avec égalité si et seulement si $b = 2a$.

4.

Pour un réel x, on pose $\vec{p}(x,1)$ et $\vec{q}(3-x,2)$. Calculer $\|\vec{p}\|$, $\|\vec{q}\|$ et $\|\vec{p}+\vec{q}\|$, puis en déduire que, pour tout réel x :

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(3-x)^2+4} \geq 3\sqrt{2}.$$

INDICE

Compare $\|\vec{p}+\vec{q}\|$ à $\|\vec{p}\| + \|\vec{q}\|$.

CORRIGÉ

Normes. Soit x un réel. Alors :

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{x^2+1},$$
$$\|\vec{q}\| = \sqrt{(3-x)^2+4}.$$

Le vecteur $\vec{p}+\vec{q}$ a pour coordonnées $(3,3)$, donc $\|\vec{p}+\vec{q}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Inégalité triangulaire. Elle donne $\|\vec{p}+\vec{q}\| \leq \|\vec{p}\| + \|\vec{q}\|$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(3-x)^2+4} \geq 3\sqrt{2}.$$

Exercice 8

Une famille d'ensembles à paramètre

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel m, on note E_m l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$x^2 + y^2 - 2mx + 4y + 4m + 1 = 0.$$

1.

Montrer que l'équation de E_m équivaut à $(x - m)^2 + (y + 2)^2 = m^2 - 4m + 3$.

INDICE

Complète le carré en x, où m joue le rôle de a, puis celui en y.

CORRIGÉ

Soit m un réel. On complète les carrés :

$$\begin{aligned} x^2 - 2mx &= (x - m)^2 - m^2, \\ y^2 + 4y &= (y + 2)^2 - 4. \end{aligned}$$

L'équation de E_m équivaut donc à :

$$\begin{aligned} &(x - m)^2 + (y + 2)^2 \\ &= m^2 + 4 - 4m - 1 \\ &= m^2 - 4m + 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel m, l'équation de E_m équivaut à $(x - m)^2 + (y + 2)^2 = m^2 - 4m + 3$.

2.

Discuter, suivant les valeurs de m, la nature de E_m.

INDICE

Factorise $m^2 - 4m + 3$: 1 en est une racine. Étudie son signe : chaque cas donne un cercle, un point ou l'ensemble vide.

CORRIGÉ

Signe du second membre. On a $m^2 - 4m + 3 = (m - 1)(m - 3)$. Ce trinôme est strictement positif à l'extérieur de ses racines 1 et 3, nul en 1 et en 3, strictement négatif entre elles.

Conclusion. D'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$:

- si $m < 1$ ou $m > 3$, E_m est le cercle de centre $\Omega_m(m, -2)$ et de rayon $\sqrt{m^2 - 4m + 3}$;
- si $m = 1$, E_1 est réduit au point $(1, -2)$; si $m = 3$, E_3 est réduit au point $(3, -2)$;
- si $1 < m < 3$, E_m est vide.

3.

Déterminer les réels m pour lesquels E_m est un cercle de rayon $2\sqrt{2}$, et préciser son centre.

INDICE

Écris $m^2 - 4m + 3 = 8$, résous, puis vérifie que les valeurs trouvées sont bien dans le cas « cercle ».

CORRIGÉ

Équation en m. E_m est un cercle de rayon $2\sqrt{2}$ si et seulement si $m^2 - 4m + 3 = 8$, soit :

$$m^2 - 4m - 5 = 0.$$

Résolution. Le discriminant vaut $16 + 20 = 36$: $m = \dfrac{4+6}{2} = 5$ ou $m = \dfrac{4-6}{2} = -1$.

Vérification. On a $5 > 3$ et $-1 < 1$: ces deux valeurs donnent bien des cercles.

Conclusion. Les réels cherchés sont $m = 5$, de centre $(5, -2)$, et $m = -1$, de centre $(-1, -2)$.

4.

Déterminer le réel m pour lequel E_m est un cercle passant par l'origine O.

INDICE

Remplace x et y par 0 dans l'équation de départ. Contrôle ensuite le signe de $m^2 - 4m + 3$.

CORRIGÉ

Condition. O appartient à E_m si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation, soit $4m + 1 = 0$, donc $m = -\dfrac{1}{4}$.

Nature. Pour cette valeur, $m < 1$ et :

$$\begin{aligned} m^2 - 4m + 3 &= \frac{1}{16} + 1 + 3 \\ &= \frac{65}{16} > 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $m = -\dfrac{1}{4}$, $E_{-\frac{1}{4}}$ est le cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{4}, -2\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{65}}{4}$, qui passe par O.