BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Application	10

Exercice 1

Produit scalaire, normes et distance

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(5, -2)$ et $\vec{v}(3, 4)$.

1.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

INDICE

Le repère est orthonormé : utilise l'expression analytique $xx' + yy'$. Pour une norme, prends la racine carrée de $x^2 + y^2$.

2.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ de deux façons : par le développement du carré d'une somme, puis par les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$.

INDICE

Le développement du carré d'une somme donne $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ à partir de trois nombres déjà calculés. Pour la seconde façon, additionne d'abord les coordonnées.

3.

On considère les points $A(-2, 1)$, $B(4, -7)$ et $C(1, 5)$. Calculer la distance AB et le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Écris d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$: extrémité moins origine. La distance AB est la norme de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2

Orthogonal ou pas ?

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Soit $\vec{a}(6, -4)$, $\vec{b}(2, 3)$ et $\vec{c}(3, 5)$. Le vecteur $\vec{a}$ est-il orthogonal à $\vec{b}$? à $\vec{c}$?

INDICE

Calcule chaque produit scalaire par les coordonnées, puis conclus par le critère d'orthogonalité.

2.

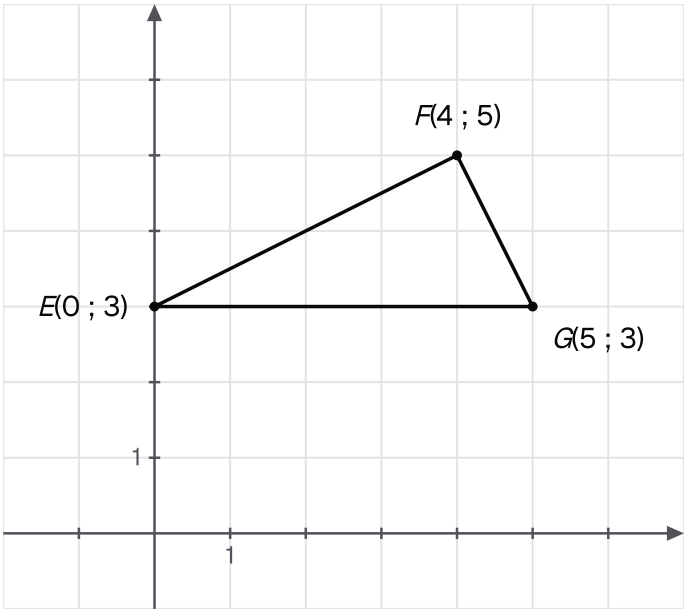
Déterminer les réels m tels que les vecteurs $\vec{p}(m, 2)$ et $\vec{q}(m-3, -5)$ soient orthogonaux.

INDICE

Écris la condition $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$: c'est une équation du second degré en m. Calcule son discriminant.

3.

Soit $E(0, 3)$, $F(4, 5)$ et $G(5, 3)$. Montrer que le triangle EFG est rectangle, en précisant le sommet de l'angle droit.



Les trois points de la question : E(0, 3), F(4, 5) et G(5, 3), sommets du triangle EFG.

INDICE

Teste les trois sommets. En F, calcule $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG}$.

Exercice 3

Cosinus et sinus d'un angle orienté

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note θ une mesure de l'angle orienté étudié.

1.

Soit $\vec{u}(\sqrt{3}, 1)$ et $\vec{v}(-\sqrt{3}, 1)$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour une mesure θ de $(\vec{u}, \vec{v})$, puis en déduire une mesure de cet angle.

INDICE

Les deux vecteurs sont non nuls. Calcule le produit scalaire, le déterminant $xy' - x'y$ et les normes, puis applique la formule du cosinus et du sinus. Reconnais l'angle à l'aide des **deux** valeurs.

2.

Soit $\vec{p}(2, -1)$ et $\vec{q}(1, 3)$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour une mesure θ de $(\vec{p}, \vec{q})$.

INDICE

Même méthode. Les valeurs obtenues ne sont pas remarquables : donne-les sous forme exacte, sans nommer d'angle.

3.

En déduire le cosinus et le sinus d'une mesure de $(\vec{q}, \vec{p})$.

INDICE

Dans la formule du cosinus et du sinus, échange les rôles de $\vec{p}$ et $\vec{q}$: que deviennent le produit scalaire et le déterminant ?

Exercice 4

Une droite par un vecteur normal

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Écrire une équation cartésienne de la droite D passant par $A(3, -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, 5)$.

INDICE

Un point $M(x, y)$ est sur D si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Développe, puis vérifie avec A.

2.

Soit D' la droite d'équation $-4x + 7y + 2 = 0$. Donner un vecteur normal, un vecteur directeur et un point de D'.

INDICE

Lis a et b dans l'équation, puis applique la réciproque de la caractérisation d'une droite par un vecteur normal. Pour un point, fixe x et calcule y.

3.

Soit $P(-3, 2)$ et $Q(5, 6)$. Écrire une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[PQ]$.

INDICE

La médiatrice passe par le milieu I de $[PQ]$, et $\overrightarrow{PQ}$ lui est normal. Pense à simplifier l'équation obtenue.

Exercice 5

Perpendiculaires ou parallèles ?

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les droites :

$$D_1 : 3x - 5y + 2 = 0,$$

$$D_2 : 10x + 6y - 1 = 0,$$

$$D_3 : -6x + 10y + 7 = 0.$$

1.

Montrer que D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

INDICE

Compare les vecteurs normaux : calcule $aa' + bb'$ et applique le critère de perpendicularité.

2.

Montrer que D_1 et D_3 sont parallèles. Sont-elles confondues ?

INDICE

Calcule $ab' - a'b$. Pour savoir si elles sont confondues, cherche un point de D_1 et teste-le dans l'équation de D_3.

3.

Écrire une équation de la droite Δ perpendiculaire à D_1 et passant par $K(2, -3)$.

INDICE

Un vecteur directeur de D_1 est normal à Δ. Lis-le dans l'équation de D_1, puis applique la méthode de la droite par un point et un vecteur normal.

4.

Déterminer le réel m tel que la droite $D_m : mx + 2y - 1 = 0$ soit parallèle à D_1.

INDICE

Le vecteur $(m, 2)$ n'est jamais nul. Écris le critère de parallélisme et résous l'équation du premier degré obtenue.

Exercice 6

Distance d'un point à une droite

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Calculer la distance du point $M_0(2, 7)$ à la droite $D : 3x - 4y + 7 = 0$.

INDICE

Vérifie que $(a, b) \neq (0, 0)$, puis applique la formule de la distance à une droite : valeur absolue au numérateur, racine carrée au dénominateur.

2.

Calculer la distance de l'origine O à la droite D' d'équation $y = 2x + 5$.

INDICE

Commence par écrire l'équation de D' sous la forme $ax + by + c = 0$.

3.

Soit $\Delta : 6x + 8y - 3 = 0$ et $\Delta' : 3x + 4y + 1 = 0$. Montrer que ces droites sont parallèles, puis calculer la distance d'un point quelconque de Δ' à Δ.

INDICE

Utilise le critère de parallélisme. Choisis ensuite un point simple de Δ', par exemple d'abscisse 1, et calcule sa distance à Δ.

Exercice 7

Écrire l'équation d'un cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega_1(-2, 5)$ et de rayon 3, sous forme réduite puis sous forme développée.

INDICE

Applique l'équation d'un cercle avec $a = -2$, $b = 5$ et $r = 3$. Développe ensuite les deux carrés.

2.

Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $\Omega_2(1, -3)$ passant par le point $P(4, 1)$.

INDICE

Le rayon est la distance $\Omega_2 P$. Calcule-la d'abord, puis applique l'équation d'un cercle.

3.

Les points $Q(-3, 0)$ et $S(5, 2)$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}_2$?

INDICE

Remplace les coordonnées dans l'équation réduite, et compare le résultat à 25.

Exercice 8

Cercle, point ou ensemble vide ?

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chaque cas, reconnaître l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation donnée.

1.

$E_1 : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0.$

INDICE

Complète les carrés : $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$. Fais de même en y, puis regarde le signe du second membre.

2.

$E_2 : x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 0.$

INDICE

Identifie a, b et c, puis calcule $k = a^2 + b^2 - c$ avant de conclure.

3.

$E_3 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = 0.$

INDICE

Même méthode. Une somme de deux carrés peut-elle être strictement négative ?

4.

$E_4 : 2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y - 6 = 0.$

INDICE

Les coefficients de x^2 et de y^2 ne valent pas 1, mais ils sont égaux : que faire avant de compléter les carrés ?

Exercice 9

Représentation paramétrique d'un cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le paramètre θ décrit $\mathbb{R}$.

1.

Donner une représentation paramétrique du cercle $\Gamma : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$.

INDICE

Lis le centre et le rayon sur l'équation, puis écris la représentation paramétrique d'un cercle.

2.

Calculer les coordonnées du point M_1 de Γ de paramètre $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Pour quels réels θ obtient-on le point $N(3, 2)$?

INDICE

Remplace θ par $\dfrac{\pi}{3}$. Pour N, écris les deux équations en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis reconnais l'angle par ses deux valeurs.

3.

Reconnaître l'ensemble F des points $M(x, y)$ tels que $x = -4 + \sqrt{7}\cos\theta$ et $y = 2 + \sqrt{7}\sin\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. En donner une équation cartésienne développée.

INDICE

Le coefficient commun de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$ est-il strictement positif ? Isole ensuite $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 10

Tangente en un point d'un cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

1.

Déterminer le centre Ω et le rayon r de $\mathcal{C}$.

INDICE

Complète les carrés en x et en y, puis calcule k.

2.

Vérifier que $A(5, 1)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

INDICE

Après l'appartenance, calcule $\overrightarrow{\Omega A}$: il est normal à T (définition de la tangente), pas directeur.

3.

Vérifier que $B(-3, -3)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente T' en B.

INDICE

Même méthode. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega B}$ a une coordonnée nulle : la tangente est parallèle à un axe.