BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Analytique du produit scalaire et applications	Application	10

Exercice 1

Produit scalaire, normes et distance

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(5, -2)$ et $\vec{v}(3, 4)$.

1.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

INDICE

Le repère est orthonormé : utilise l'expression analytique $xx' + yy'$. Pour une norme, prends la racine carrée de $x^2 + y^2$.

CORRIGÉ

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

Produit scalaire. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 5 \times 3 + (-2) \times 4 \\ &= 15 - 8 = 7. \end{aligned}$$

Normes. D'après les propriétés du produit scalaire, $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$. Donc :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= 25 + 4 = 29, \\ \|\vec{v}\|^2 &= 9 + 16 = 25. \end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{29}$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

2.

Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ de deux façons : par le développement du carré d'une somme, puis par les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$.

INDICE

Le développement du carré d'une somme donne $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ à partir de trois nombres déjà calculés. Pour la seconde façon, additionne d'abord les coordonnées.

CORRIGÉ

Par le développement. D'après les propriétés du produit scalaire (carré d'une somme) :

$$\begin{aligned} &\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= 29 + 14 + 25 = 68. \end{aligned}$$

Par les coordonnées. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(8, 2)$, donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 64 + 4 = 68.$$

Conclusion. Les deux calculs donnent le même résultat : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 68$.

3.

On considère les points $A(-2,1)$, $B(4,-7)$ et $C(1,5)$. Calculer la distance AB et le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Écris d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$: extrémité moins origine. La distance AB est la norme de $\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

Coordonnées. On a $\overrightarrow{AB}(4+2,-7-1)$, soit $\overrightarrow{AB}(6,-8)$, et $\overrightarrow{AC}(3,4)$.

Distance. La distance AB est la norme de $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} = 10. \end{aligned}$$

Produit scalaire. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= 6\times 3 + (-8)\times 4 \\ &= 18 - 32 = -14. \end{aligned}$$

Conclusion. $AB = 10$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -14$.

Exercice 2

Orthogonal ou pas ?

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Soit $\vec{a}(6, -4)$, $\vec{b}(2, 3)$ et $\vec{c}(3, 5)$. Le vecteur $\vec{a}$ est-il orthogonal à $\vec{b}$? à $\vec{c}$?

INDICE

Calcule chaque produit scalaire par les coordonnées, puis conclus par le critère d'orthogonalité.

CORRIGÉ

D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 12 - 12 = 0,\\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= 18 - 20 = -2.\end{aligned}$$

Le premier produit scalaire est nul, le second ne l'est pas.

Conclusion. D'après le critère d'orthogonalité, $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{b}$, mais $\vec{a}$ n'est pas orthogonal à $\vec{c}$.

2.

Déterminer les réels m tels que les vecteurs $\vec{p}(m, 2)$ et $\vec{q}(m - 3, -5)$ soient orthogonaux.

INDICE

Écris la condition $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$: c'est une équation du second degré en m. Calcule son discriminant.

CORRIGÉ

Mise en équation. D'après le critère d'orthogonalité, $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned}&\vec{p} \cdot \vec{q} = 0\\ &\Leftrightarrow m(m - 3) - 10 = 0\\ &\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0.\end{aligned}$$

Résolution. Le discriminant vaut $9 + 40 = 49 = 7^2$. Les deux solutions sont :

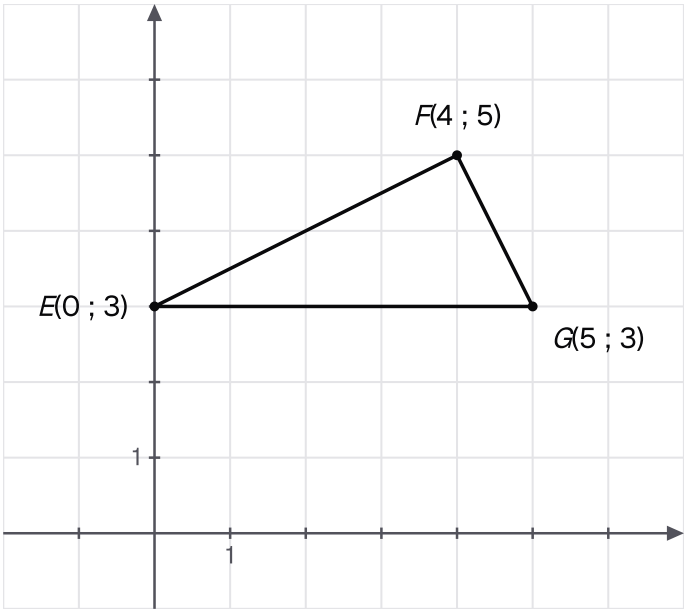
$$\begin{aligned}m &= \frac{3 + 7}{2} = 5,\\ m &= \frac{3 - 7}{2} = -2.\end{aligned}$$

Contrôle. Pour $m = 5$, $\vec{p}(5, 2)$ et $\vec{q}(2, -5)$ donnent $10 - 10 = 0$. Pour $m = -2$, $\vec{p}(-2, 2)$ et $\vec{q}(-5, -5)$ donnent $10 - 10 = 0$.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont orthogonaux si et seulement si $m = 5$ ou $m = -2$.

3.

Soit $E(0,3)$, $F(4,5)$ et $G(5,3)$. Montrer que le triangle EFG est rectangle, en précisant le sommet de l'angle droit.



Les trois points de la question : E(0, 3), F(4, 5) et G(5, 3), sommets du triangle EFG.

INDICE

Teste les trois sommets. En F, calcule $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG}$.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{FE}(-4,-2)$ et $\overrightarrow{FG}(1,-2)$: ces deux vecteurs sont non nuls. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG}\\ &= -4 \times 1 + (-2) \times (-2)\\ &= -4 + 4 = 0.\end{aligned}$$

D'après le critère d'orthogonalité, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux : les droites (FE) et (FG) sont perpendiculaires.

Conclusion. Le triangle EFG est rectangle en F.

Exercice 3

Cosinus et sinus d'un angle orienté

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note θ une mesure de l'angle orienté étudié.

1.

Soit $\vec{u}(\sqrt{3}, 1)$ et $\vec{v}(-\sqrt{3}, 1)$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour une mesure θ de $(\vec{u}, \vec{v})$, puis en déduire une mesure de cet angle.

INDICE

Les deux vecteurs sont non nuls. Calcule le produit scalaire, le déterminant $xy' - x'y$ et les normes, puis applique la formule du cosinus et du sinus. Reconnais l'angle à l'aide des **deux** valeurs.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

Produit scalaire, déterminant et normes.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= -3 + 1 = -2, \\ \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \sqrt{3} \times 1 \\ &\quad - (-\sqrt{3}) \times 1 \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

De plus, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{3+1} = 2$.

Cosinus et sinus. D'après la formule du cosinus et du sinus :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \\ \sin\theta &= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Mesure. Le réel $\dfrac{2\pi}{3}$ a pour cosinus $-\dfrac{1}{2}$ et pour sinus $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion. $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi].$$

2.

Soit $\vec{p}(2,-1)$ et $\vec{q}(1,3)$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour une mesure θ de $(\vec{p},\vec{q})$.

INDICE

Même méthode. Les valeurs obtenues ne sont pas remarquables : donne-les sous forme exacte, sans nommer d'angle.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont non nuls.

Produit scalaire, déterminant et normes.

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q} &= 2-3=-1,\\ \det(\vec{p},\vec{q}) &= 2\times 3-1\times(-1)\\ &= 7.\end{aligned}$$

De plus, $\|\vec{p}\|=\sqrt{5}$ et $\|\vec{q}\|=\sqrt{10}$, donc :

$$\|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Cosinus et sinus. D'après la formule du cosinus et du sinus :

$$\begin{aligned}\cos\theta &= -\frac{1}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10},\\ \sin\theta &= \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ et $\sin\theta=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$. Ces valeurs ne sont pas celles d'un angle remarquable : on s'en tient au cosinus et au sinus.

3.

En déduire le cosinus et le sinus d'une mesure de $(\vec{q},\vec{p})$.

INDICE

Dans la formule du cosinus et du sinus, échange les rôles de $\vec{p}$ et $\vec{q}$: que deviennent le produit scalaire et le déterminant ?

CORRIGÉ

On échange les rôles de $\vec{p}$ et de $\vec{q}$ dans la formule du cosinus et du sinus. Le produit des normes ne change pas.

Produit scalaire. Il est symétrique (propriétés du produit scalaire) : $\vec{q}\cdot\vec{p}=-1$.

Déterminant. Il change de signe :

$$\begin{aligned}\det(\vec{q},\vec{p}) &= 1\times(-1)-2\times 3\\ &= -7.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la formule du cosinus et du sinus, une mesure θ' de $(\vec{q},\vec{p})$ vérifie :

$$\begin{aligned}\cos\theta' &= -\frac{\sqrt{2}}{10},\\ \sin\theta' &= -\frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

Exercice 4

Une droite par un vecteur normal

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Écrire une équation cartésienne de la droite D passant par $A(3, -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, 5)$.

INDICE

Un point $M(x, y)$ est sur D si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Développe, puis vérifie avec A.

CORRIGÉ

Le vecteur $\vec{n}$ est non nul. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal, le point $M(x, y)$ appartient à D si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, avec $\overrightarrow{AM}(x - 3, y + 1)$:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x - 3) + 5(y + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 5y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vérification. $2 \times 3 + 5 \times (-1) - 1 = 0$: le point A vérifie l'équation.

Conclusion. La droite D a pour équation cartésienne $2x + 5y - 1 = 0$.

2.

Soit D' la droite d'équation $-4x + 7y + 2 = 0$. Donner un vecteur normal, un vecteur directeur et un point de D'.

INDICE

Lis a et b dans l'équation, puis applique la réciproque de la caractérisation d'une droite par un vecteur normal. Pour un point, fixe x et calcule y.

CORRIGÉ

Vecteur normal et vecteur directeur. Ici $(a, b) = (-4, 7) \neq (0, 0)$. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal, $\vec{n}'(-4, 7)$ est normal à D' et $\vec{w}'(-7, -4)$ en est un vecteur directeur.

Contrôle : $\vec{n}' \cdot \vec{w}' = 28 - 28 = 0$.

Un point. Pour $x = 4$, l'équation devient $-16 + 7y + 2 = 0$, soit $y = 2$.

Conclusion. $\vec{n}'(-4, 7)$ est un vecteur normal à D', $\vec{w}'(-7, -4)$ un vecteur directeur, et le point $(4, 2)$ appartient à D'.

3.

Soit $P(-3,2)$ et $Q(5,6)$. Écrire une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[PQ]$.

INDICE

La médiatrice passe par le milieu I de $[PQ]$, et $\overrightarrow{PQ}$ lui est normal. Pense à simplifier l'équation obtenue.

CORRIGÉ

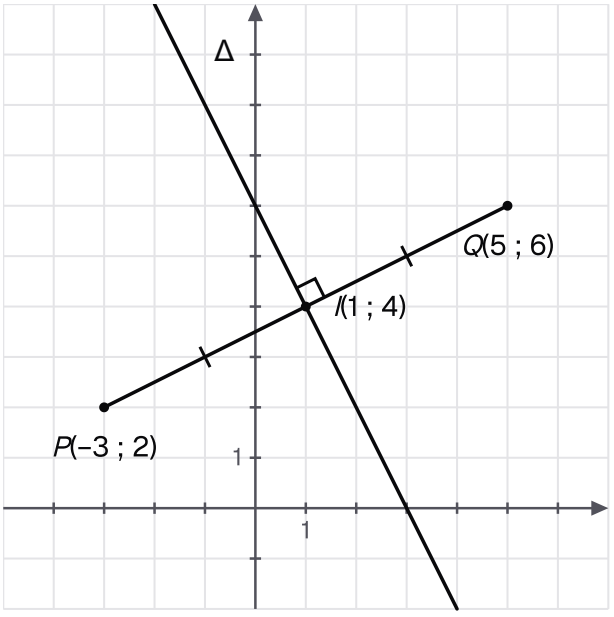
Milieu et vecteur normal. Le milieu de $[PQ]$ est $I(1,4)$, et $\overrightarrow{PQ}(8,4)$ est non nul. La médiatrice Δ passe par I et elle est perpendiculaire à (PQ) : $\overrightarrow{PQ}$ lui est normal.

Équation. Un point $M(x,y)$ est sur Δ si et seulement si $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ (caractérisation d'une droite par un vecteur normal) :

$$\begin{aligned} &8(x-1)+4(y-4)=0\\ \Leftrightarrow\ &8x+4y-24=0\\ \Leftrightarrow\ &2x+y-6=0. \end{aligned}$$

Vérification. $2\times1+4-6=0$, donc I appartient à Δ. Le point $M(3,0)$ de Δ vérifie $MP^2=36+4=40$ et $MQ^2=4+36=40$: il est bien équidistant de P et de Q.

Conclusion. La médiatrice de $[PQ]$ a pour équation $2x+y-6=0$.



La médiatrice Δ de [PQ] passe par I(1, 4) et coupe [PQ] à angle droit ; son équation est 2x + y - 6 = 0.

Exercice 5

Perpendiculaires ou parallèles ?

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les droites :

$$D_1 : 3x - 5y + 2 = 0,$$

$$D_2 : 10x + 6y - 1 = 0,$$

$$D_3 : -6x + 10y + 7 = 0.$$

1.

Montrer que D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

INDICE

Compare les vecteurs normaux : calcule $aa' + bb'$ et applique le critère de perpendicularité.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\vec{n}_1(3, -5)$ et $\vec{n}_2(10, 6)$, normaux à D_1 et à D_2, sont non nuls. On calcule :

$$\begin{aligned} &aa' + bb' \\ &= 3 \times 10 + (-5) \times 6 \\ &= 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le critère de perpendicularité, D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

2.

Montrer que D_1 et D_3 sont parallèles. Sont-elles confondues ?

INDICE

Calcule $ab' - a'b$. Pour savoir si elles sont confondues, cherche un point de D_1 et teste-le dans l'équation de D_3.

CORRIGÉ

Parallélisme. On calcule :

$$\begin{aligned} &ab' - a'b \\ &= 3 \times 10 - (-6) \times (-5) \\ &= 30 - 30 = 0. \end{aligned}$$

D'après le critère de parallélisme, D_1 et D_3 sont parallèles.

Un point de D_1. Le point $(1, 1)$ appartient à D_1, car $3 - 5 + 2 = 0$.

Test dans D_3. $-6 + 10 + 7 = 11 \neq 0$: ce point n'appartient pas à D_3.

Conclusion. D_1 et D_3 sont parallèles et distinctes : elles ne sont pas confondues.

3.

Écrire une équation de la droite Δ perpendiculaire à D_1 et passant par $K(2,-3)$.

INDICE

Un vecteur directeur de D_1 est normal à Δ. Lis-le dans l'équation de D_1, puis applique la méthode de la droite par un point et un vecteur normal.

CORRIGÉ

Un vecteur normal à Δ. D'après la caractérisation d'une droite par un vecteur normal, $\vec{w}_1(5,3)$ est un vecteur directeur de D_1. Comme Δ est perpendiculaire à D_1, le vecteur $\vec{w}_1$, non nul, est normal à Δ.

Équation. D'après la même caractérisation, $M(x,y)$ appartient à Δ si et seulement si $\overrightarrow{KM}\cdot\vec{w}_1=0$:

$$\begin{aligned}&5(x-2)+3(y+3)=0\\ \Leftrightarrow\ &5x+3y-1=0.\end{aligned}$$

Vérification. $10-9-1=0$, donc K appartient à Δ. De plus, $3\times5+(-5)\times3=0$: le critère de perpendicularité confirme que Δ est perpendiculaire à D_1.

Conclusion. $\Delta : 5x+3y-1=0$.

4.

Déterminer le réel m tel que la droite $D_m : mx+2y-1=0$ soit parallèle à D_1.

INDICE

Le vecteur $(m,2)$ n'est jamais nul. Écris le critère de parallélisme et résous l'équation du premier degré obtenue.

CORRIGÉ

Pour tout réel m, $(m,2)\neq(0,0)$: D_m est une droite. D'après le critère de parallélisme, D_m et D_1 sont parallèles si et seulement si :

$$\begin{aligned}&m\times(-5)-3\times2=0\\ \Leftrightarrow\ &-5m=6\\ \Leftrightarrow\ &m=-\frac{6}{5}.\end{aligned}$$

Conclusion. D_m est parallèle à D_1 si et seulement si $m=-\dfrac{6}{5}$.

Exercice 6

Distance d'un point à une droite

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Calculer la distance du point $M_0(2, 7)$ à la droite $D : 3x - 4y + 7 = 0$.

INDICE

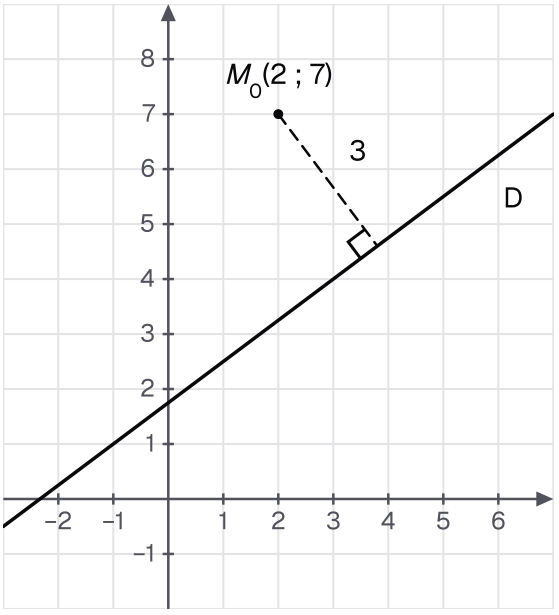
Vérifie que $(a, b) \neq (0, 0)$, puis applique la formule de la distance à une droite : valeur absolue au numérateur, racine carrée au dénominateur.

CORRIGÉ

Ici $(a, b) = (3, -4) \neq (0, 0)$ et $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} & d(M_0, D) \\ &= \frac{|3 \times 2 - 4 \times 7 + 7|}{5} \\ &= \frac{|-15|}{5} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance de M_0 à D vaut 3.



Le segment perpendiculaire mené de M0(2, 7) à la droite D mesure 3 : c'est la distance trouvée par la formule.

2.

Calculer la distance de l'origine O à la droite D' d'équation $y = 2x + 5$.

INDICE

Commence par écrire l'équation de D' sous la forme $ax + by + c = 0$.

CORRIGÉ

Forme de l'équation. L'équation $y = 2x + 5$ équivaut à $2x - y + 5 = 0$, avec $(a, b) = (2, -1) \neq (0, 0)$.

Distance. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(O, D') &= \frac{|2 \times 0 - 0 + 5|}{\sqrt{4 + 1}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance de O à D' vaut $\sqrt{5}$.

3.

Soit Δ : $6x + 8y - 3 = 0$ et Δ' : $3x + 4y + 1 = 0$. Montrer que ces droites sont parallèles, puis calculer la distance d'un point quelconque de Δ' à Δ.

INDICE

Utilise le critère de parallélisme. Choisis ensuite un point simple de Δ', par exemple d'abscisse 1, et calcule sa distance à Δ.

CORRIGÉ

Parallélisme. On a $6 \times 4 - 3 \times 8 = 0$: d'après le critère de parallélisme, Δ et Δ' sont parallèles.

Un point de Δ'. Le point $N(1, -1)$ appartient à Δ', car $3 - 4 + 1 = 0$. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(N, \Delta) &= \frac{|6 - 8 - 3|}{\sqrt{36 + 64}} \\ &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Un point quelconque. Soit $M(x, y)$ un point de Δ'. Alors $3x + 4y = -1$, donc $6x + 8y - 3 = -2 - 3 = -5$, et :

$$d(M, \Delta) = \frac{|-5|}{10} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion. Δ et Δ' sont parallèles, et tout point de Δ' est à la distance $\dfrac{1}{2}$ de Δ.

Exercice 7

Écrire l'équation d'un cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.

Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega_1(-2, 5)$ et de rayon 3, sous forme réduite puis sous forme développée.

INDICE

Applique l'équation d'un cercle avec $a = -2$, $b = 5$ et $r = 3$. Développe ensuite les deux carrés.

CORRIGÉ

Forme réduite. Le rayon 3 est strictement positif. D'après l'équation d'un cercle, $\mathcal{C}_1$ a pour équation :

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9.$$

Forme développée. En développant les deux carrés :

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 4 + y^2 \\ & \quad - 10y + 25 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 + 4x \\ & \quad - 10y + 20 = 0. \end{aligned}$$

On retrouve $c = a^2 + b^2 - r^2 = 4 + 25 - 9 = 20$.

Conclusion. $\mathcal{C}_1 : (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$, soit $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.

2.

Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $\Omega_2(1, -3)$ passant par le point $P(4, 1)$.

INDICE

Le rayon est la distance $\Omega_2 P$. Calcule-la d'abord, puis applique l'équation d'un cercle.

CORRIGÉ

Rayon. Le rayon de $\mathcal{C}_2$ est la distance $\Omega_2 P$:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 + 3)^2} \\ &= \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Équation. Comme $r > 0$, d'après l'équation d'un cercle :

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

En développant, $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 25$, soit $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$.

Vérification. $16 + 1 - 8 + 6 - 15 = 0$: le point P vérifie l'équation développée.

Conclusion. $\mathcal{C}_2$ a pour équation $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$.

3.

Les points $Q(-3, 0)$ et $S(5, 2)$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}_2$?

INDICE

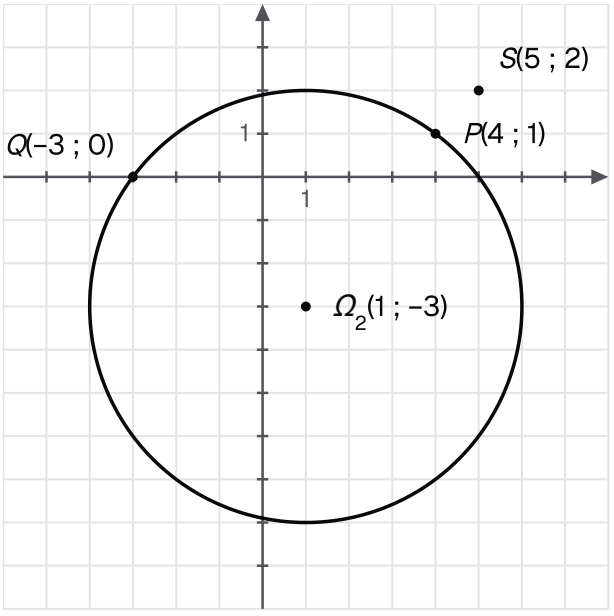
Remplace les coordonnées dans l'équation réduite, et compare le résultat à 25.

CORRIGÉ

On remplace les coordonnées dans l'équation réduite $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

- Pour Q : $(-3-1)^2 + (0+3)^2 = 16 + 9 = 25$.
- Pour S : $(5-1)^2 + (2+3)^2 = 16 + 25 = 41$, et $41 \neq 25$.

Conclusion. Le point Q appartient à $\mathcal{C}_2$; le point S n'appartient pas à $\mathcal{C}_2$.



Le cercle C2 de centre Ω2(1, -3) passe par P et par Q, mais le point S(5, 2) reste à l'extérieur.

Exercice 8

Cercle, point ou ensemble vide ?

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans chaque cas, reconnaître l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation donnée.

1.

$E_1 : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0.$

INDICE

Complète les carrés : $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$. Fais de même en y, puis regarde le signe du second membre.

CORRIGÉ

Carrés complétés. On a $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$ et $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$. L'équation équivaut donc à :

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (y+1)^2 \\ = 16 + 1 - 8 = 9.\end{aligned}$$

Signe de k. Ici $k = 9 > 0$.

Conclusion. D'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, E_1 est le cercle de centre $\Omega(4, -1)$ et de rayon 3.

2.

$E_2 : x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 0.$

INDICE

Identifie a, b et c, puis calcule $k = a^2 + b^2 - c$ avant de conclure.

CORRIGÉ

Coefficients. Ici $-2a = 6$ et $-2b = 10$, donc $a = -3$ et $b = -5$; de plus $c = 34$.

Forme réduite. L'équation équivaut à $(x+3)^2 + (y+5)^2 = k$, avec :

$$\begin{aligned}k &= a^2 + b^2 - c \\ &= 9 + 25 - 34 = 0.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, E_2 est réduit au point $\Omega(-3, -5)$: ce n'est pas un cercle.

3.

$E_3 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = 0.$

INDICE

Même méthode. Une somme de deux carrés peut-elle être strictement négative ?

CORRIGÉ

Coefficients. Ici $a = 1, b = 2$ et $c = 9$.

Forme réduite. L'équation équivaut à $(x-1)^2 + (y-2)^2 = k$, avec :

$$k = 1 + 4 - 9 = -4 < 0.$$

Signe. Une somme de deux carrés est positive ou nulle : elle ne peut pas valoir -4. Aucun point ne vérifie l'équation.

Conclusion. D'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, E_3 est l'ensemble vide.

4.

$E_4 : 2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y - 6 = 0.$

INDICE

Les coefficients de x^2 et de y^2 ne valent pas 1, mais ils sont égaux : que faire avant de compléter les carrés ?

CORRIGÉ

Division par 2. Les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux à 2. En divisant par 2, l'équation équivaut à :

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 3 = 0.$$

Forme réduite. Ici $a = -1, b = 3$ et $c = -3$. L'équation équivaut à :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-3)^2 \\ = 1 + 9 + 3 = 13.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $k = 13 > 0$, d'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, E_4 est le cercle de centre $\Omega(-1, 3)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Exercice 9

Représentation paramétrique d'un cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le paramètre θ décrit $\mathbb{R}$.

1.

Donner une représentation paramétrique du cercle $\Gamma : (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$.

INDICE

Lis le centre et le rayon sur l'équation, puis écris la représentation paramétrique d'un cercle.

CORRIGÉ

D'après l'équation d'un cercle, Γ est le cercle de centre $\Omega(3, -2)$ et de rayon 4, avec $4 > 0$.

Conclusion. D'après la représentation paramétrique d'un cercle, Γ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} x = 3 + 4\cos\theta \\ y = -2 + 4\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

2.

Calculer les coordonnées du point M_1 de Γ de paramètre $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Pour quels réels θ obtient-on le point $N(3, 2)$?

INDICE

Remplace θ par $\dfrac{\pi}{3}$. Pour N, écris les deux équations en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis reconnais l'angle par ses deux valeurs.

CORRIGÉ

Point M_1. Pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$:

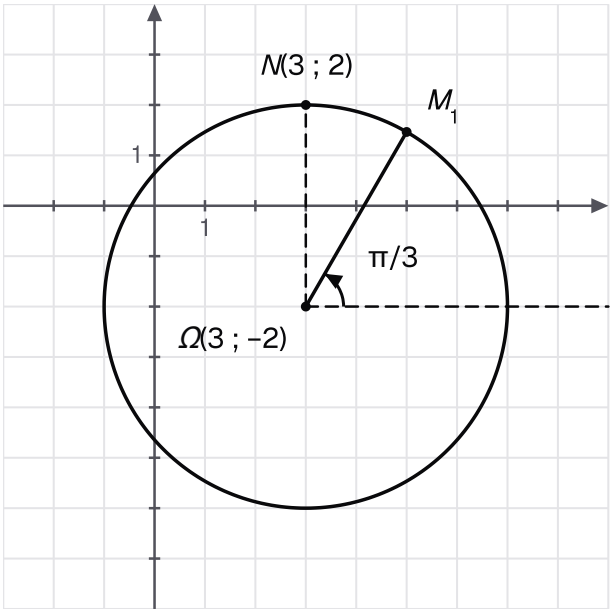
$$\begin{aligned} x &= 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5, \\ y &= -2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -2 + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc $M_1(5, -2 + 2\sqrt{3})$. Contrôle : $(5-3)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$.

Point N. Le point de paramètre θ est $N(3, 2)$ si et seulement si $3 = 3 + 4\cos\theta$ et $2 = -2 + 4\sin\theta$, c'est-à-dire $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = 1$.

Conclusion. $M_1(5, -2 + 2\sqrt{3})$, et l'on obtient N pour les réels θ tels que :

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$



Sur le cercle Γ centré en Ω(3, -2), de rayon 4, le paramètre π/3 donne M1 et le paramètre π/2 donne N(3, 2).

3.

Reconnaître l'ensemble F des points $M(x, y)$ tels que $x = -4 + \sqrt{7}\cos\theta$ et $y = 2 + \sqrt{7}\sin\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. En donner une équation cartésienne développée.

INDICE

Le coefficient commun de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$ est-il strictement positif ? Isole ensuite $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

CORRIGÉ

Reconnaissance. On reconnaît la représentation paramétrique d'un cercle avec $a = -4$, $b = 2$ et $r = \sqrt{7}$, où $\sqrt{7} > 0$. Donc F est le cercle de centre $(-4, 2)$ et de rayon $\sqrt{7}$.

Équation réduite. Pour tout réel θ, $x + 4 = \sqrt{7}\cos\theta$ et $y - 2 = \sqrt{7}\sin\theta$, donc :

$$\begin{aligned}&(x+4)^2 + (y-2)^2 \\ &= 7\cos^2\theta + 7\sin^2\theta = 7.\end{aligned}$$

Forme développée. $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 7$, soit $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 13 = 0$.

Conclusion. F est le cercle de centre $(-4, 2)$ et de rayon $\sqrt{7}$, d'équation $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 13 = 0$.

Exercice 10

Tangente en un point d'un cercle

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

1.

Déterminer le centre Ω et le rayon r de $\mathcal{C}$.

INDICE

Complète les carrés en x et en y, puis calcule k.

CORRIGÉ

Carrés complétés. On a $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ et $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$. L'équation équivaut à :

$$\begin{aligned}&(x-2)^2 + (y+3)^2 \\ &= 4 + 9 + 12 = 25.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $k = 25 > 0$, d'après l'étude de l'ensemble $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2, -3)$ et de rayon $r = 5$.

2.

Vérifier que $A(5, 1)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

INDICE

Après l'appartenance, calcule $\overrightarrow{\Omega A}$: il est normal à T (définition de la tangente), pas directeur.

CORRIGÉ

Appartenance. $(5-2)^2 + (1+3)^2 = 9 + 16 = 25$: le point A appartient à $\mathcal{C}$.

Tangente. On a $\overrightarrow{\Omega A}(3, 4)$, vecteur normal à T. D'après l'équation de la tangente, $M(x, y)$ appartient à T si et seulement si :

$$\begin{aligned}&3(x-5) + 4(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 4y - 19 = 0.\end{aligned}$$

Contrôle. $d(\Omega, T) = \dfrac{|6 - 12 - 19|}{5} = 5 = r$: d'après le théorème de position relative, T n'a qu'un point commun avec $\mathcal{C}$.

Conclusion. La tangente à $\mathcal{C}$ en A est $T : 3x + 4y - 19 = 0$.

3.

Vérifier que $B(-3,-3)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis écrire une équation de la tangente T' en B.

INDICE

Même méthode. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega B}$ a une coordonnée nulle : la tangente est parallèle à un axe.

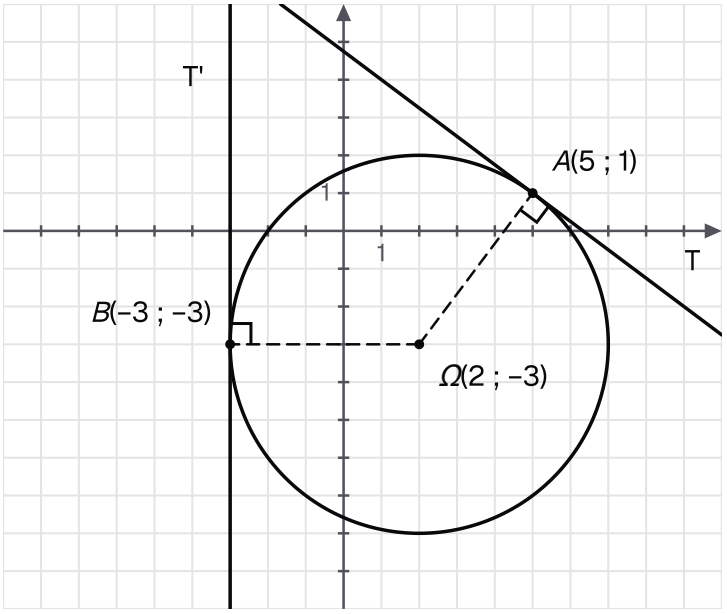
CORRIGÉ

Appartenance. $(-3-2)^2+(-3+3)^2=25+0=25$: le point B appartient à $\mathcal{C}$.

Tangente. On a $\overrightarrow{\Omega B}(-5,0)$. D'après l'équation de la tangente :

$$\begin{aligned}&-5(x+3)+0\times(y+3)=0\\&\Leftrightarrow x+3=0.\end{aligned}$$

Conclusion. La tangente à $\mathcal{C}$ en B est T' : $x+3=0$: c'est la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par B.



Les tangentes T en A et T' en B : chacune est perpendiculaire au rayon qui aboutit à son point de contact, et T' est verticale.