BURHAN

Analytique du produit scalaire et applications

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/analytique-du-produit-scalaire/cours

Chapitre	Semestre
Analytique du produit scalaire et applications	Semestre 1

Calculer un angle sans rapporteur

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}(3, -2)$ et $\vec{v}(4, 6)$. Ces deux vecteurs forment-ils un angle droit ?

Pas de figure, pas de rapporteur : seulement quatre nombres.

Ce chapitre t'apprend à répondre en une ligne de calcul, puis à le **démontrer**.

Devine : Un angle droit sans figure

D'après toi, les vecteurs $\vec{u}(3, -2)$ et $\vec{v}(4, 6)$ sont-ils orthogonaux ?

A. Oui, ils forment un angle droit.

Juste.

Juste : le théorème de Pythagore le confirme, comme le montre la correction.

B. Non : leurs coordonnées n'ont pas les mêmes signes.

Faux.

Les signes des coordonnées ne disent rien de l'angle : calcule plutôt des longueurs.

C. Non : leurs normes sont différentes.

Faux.

Deux vecteurs de normes différentes peuvent former un angle droit : pense à $\vec{i}$ et $2\vec{j}$.

D. On ne peut pas le savoir sans figure.

Faux.

Les coordonnées suffisent : elles donnent les longueurs d'un triangle.

Correction

Soit $A(3, -2)$ et $B(4, 6)$, de sorte que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Alors :

$$\begin{aligned} OA^2 &= 9 + 4 = 13, \\ OB^2 &= 16 + 36 = 52, \\ AB^2 &= 1^2 + 8^2 = 65. \end{aligned}$$

Comme $13 + 52 = 65$, la réciproque du théorème de Pythagore donne un triangle OAB rectangle en O.

Bientôt, le calcul $3 \times 4 + (-2) \times 6 = 0$ suffira.

Tu vas calculer un produit scalaire, une norme, un angle orienté et une distance à partir des coordonnées. Puis tu écriras des équations de droites et de cercles, et tu étudieras leurs points communs.

Chaque formule sera **démontrée** : tu apprendras à rédiger chaque « montrer que » comme une preuve.

Garde une feuille à côté de toi : un croquis à main levée t'aidera à chaque exemple.

Le produit scalaire du tronc commun

Norme et angle géométrique

Petit rappel. La **norme** $\|\vec{u}\|$ d'un vecteur est sa longueur : si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{u}\| = AB$.

Dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{u}(x, y)$ a pour norme $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Deux vecteurs non nuls, tracés depuis un même point, forment un **angle géométrique**. Sa mesure est comprise entre 0 et π.

Vérifie : Le produit scalaire du tronc commun

Au tronc commun, tu as calculé des produits scalaires avec les normes et l'angle. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour normes 2 et 3 ; leur angle géométrique mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$?

A. Un vecteur de norme 6.

Faux.

Le produit scalaire est un nombre réel, pas un vecteur.

B. 3

Juste.

Juste : $2 \times 3 \times \dfrac{1}{2} = 3$.

C. 6

Faux.

Tu as oublié le cosinus de l'angle.

D. $3\sqrt{3}$

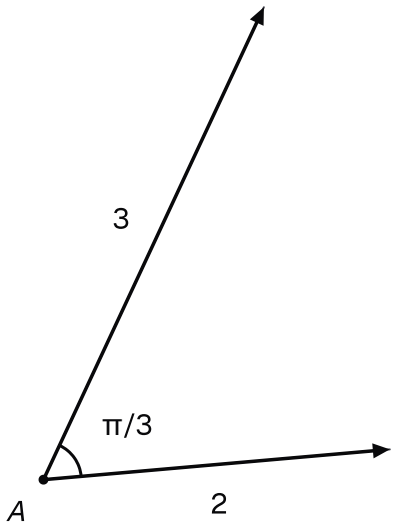
Faux.

Tu as pris le sinus de l'angle, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; la définition emploie le cosinus.

Correction

Soit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ la mesure de leur angle géométrique. D'après la définition du tronc commun :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta \\ &= 2 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 6 \times \frac{1}{2} = 3. \end{aligned}$$



Les données de l'activité : deux vecteurs issus d'un même point, longs de 2 et de 3, qui s'écartent d'un angle de π/3.

La définition rappelée

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs (rappel)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Sinon, en notant θ la mesure, dans $[0, \pi]$, de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'un d'eux est nul ou si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Remarque : une définition déjà connue

Cette définition est un **acquis du tronc commun** : elle est rappelée ici, sans preuve, car c'est une définition. C'est le seul résultat sur le produit scalaire que l'on suppose connu.

Les propriétés du produit scalaire sont **démontrées** dans ce chapitre à partir d'elle : symétrie, développement, carré scalaire, critère d'orthogonalité.

Exemple : un angle obtus

Énoncé. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour normes 2 et 5 ; leur angle géométrique mesure $\dfrac{3\pi}{4}$. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Calcul. D'après la définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 2\times 5\times\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= 10\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Lecture. L'angle est obtus, donc son cosinus est négatif : le produit scalaire l'est aussi.

À toi : Rédige un produit scalaire dans un triangle

Soit ABC un triangle tel que $AB=6$, $AC=4$, et dont l'angle géométrique en A mesure $\frac{\pi}{6}$. Rédige le calcul de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cite la définition du produit scalaire par les normes et l'angle.
Indice 2
L'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est l'angle du triangle en A.
Indice 3
Point délicat : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, pas $\frac{1}{2}$.

Réponse
« Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls, et leur angle géométrique mesure $\frac{\pi}{6}$. D'après la définition du produit scalaire :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= AB\times AC\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 6\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 12\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12\sqrt{3}$. »

Expression analytique et propriétés

Un calcul qui tombe juste

Devine : Deux façons de calculer

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, soit $\vec{u}(2,0)$ et $\vec{v}(3,3)$. Le vecteur $\vec{u}$ suit $\vec{i}$, et $\vec{v}$ suit la diagonale du premier quart de plan. D'après toi, que vaut $\vec{u}\cdot\vec{v}$?

A. $6\sqrt{2}$
Faux.

C'est le produit des normes $2 \times 3\sqrt{2}$: il manque le cosinus de l'angle.

B. $3\sqrt{2}$

Faux.

Tu as pris $\|\vec{v}\| = 3$; or $\|\vec{v}\| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.

C. 6

Juste.

Juste : l'angle mesure $\dfrac{\pi}{4}$ et $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$.

D. 0

Faux.

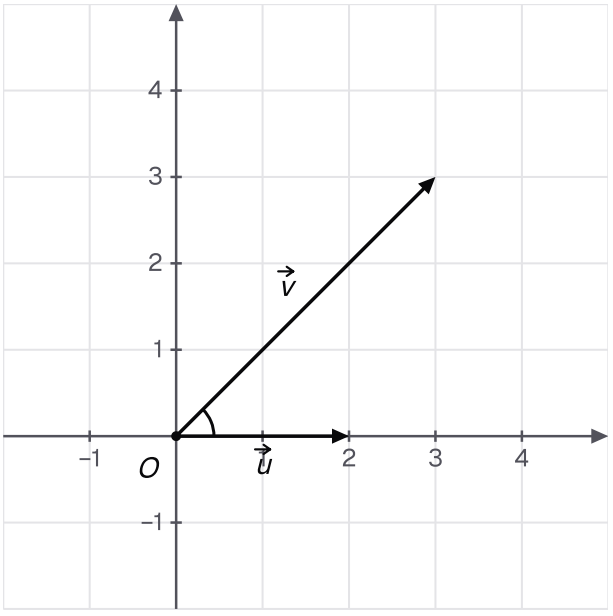
Le produit scalaire est nul pour un angle droit ; ici, l'angle mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

Correction

L'angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure $\dfrac{\pi}{4}$, et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Par la définition :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6.$$

Or $2 \times 3 + 0 \times 3 = 6$ aussi. Coïncidence ? Le théorème qui suit dit que non.



Les deux vecteurs de l'activité tracés depuis l'origine : u le long de l'axe des abscisses, v sur la diagonale du premier quart de plan.

Pourquoi est-ce vrai ? Un vecteur non nul s'écrit avec sa norme et le cosinus et le sinus d'un angle repéré depuis $\vec{i}$. Le produit scalaire fait alors apparaître $\cos(\beta - \alpha)$.

La formule du cosinus d'une différence, démontrée en trigonométrie, conclut.

Les propriétés du produit scalaire se déduisent ensuite de cette formule, par des calculs sur les coordonnées.

La formule et ses conséquences

Théorème : Expression analytique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration

Étape 1. Supposons d'abord le repère direct. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, les deux membres sont nuls (F01). Sinon, posons $r = \|\vec{u}\|$, $r' = \|\vec{v}\|$, et soit α, β des mesures de $(\vec{i}, \vec{u})$ et $(\vec{i}, \vec{v})$.

Étape 2. Le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{r}\vec{u}$ est sur le cercle trigonométrique, d'abscisse curviligne α ; par définition de $\cos$ et $\sin$, $x = r\cos\alpha$ et $y = r\sin\alpha$. De même, $x' = r'\cos\beta$ et $y' = r'\sin\beta$.

Étape 3. L'angle géométrique θ de F01 est la valeur absolue de la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$, dont $\beta - \alpha$ est une mesure (relation de Chasles). Le cosinus étant pair et 2π-périodique, $\cos\theta = \cos(\beta - \alpha)$.

Étape 4. Par F01 et la formule du cosinus d'une différence :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = rr'\cos(\beta - \alpha) = rr'(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = xx' + yy'.$$

Étape 5. En repère indirect, $(O, \vec{i}, -\vec{j})$ est direct et les coordonnées deviennent $(x, -y)$ et $(x', -y')$: les étapes 1 à 4 donnent $xx' + (-y)(-y') = xx' + yy'$.

Vérifie : La formule clé de la preuve

Dans la preuve de l'expression analytique, quelle formule de trigonométrie sert à l'étape 4 ?

A. La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Faux.

Elle ne sert pas ici : l'étape 4 développe le cosinus d'une différence.

B. Le cosinus d'une somme.

Faux.

L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ a pour mesure $\beta - \alpha$, une différence, par la relation de Chasles.

C. La formule de duplication.

Faux.

Aucun angle double n'apparaît dans la preuve.

D. Le cosinus d'une différence.

Juste.

Juste : elle développe $\cos(\beta - \alpha)$.

Correction

À l'étape 3, la relation de Chasles donne la mesure $\beta - \alpha$ de $(\vec{u}, \vec{v})$, et $\cos\theta = \cos(\beta - \alpha)$.

À l'étape 4, la formule du cosinus d'une différence développe $\cos(\beta - \alpha)$. Avec $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $x' = r'\cos\beta$ et $y' = r'\sin\beta$, on obtient $xx' + yy'$.

Propriété : Propriétés du produit scalaire ; orthogonalité

Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$, $\vec{w}$ et tout réel λ :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, c'est-à-dire $xx' + yy' = 0$.

Démonstration

Étape 1. Soit $\vec{w}(x'', y'')$. Les coordonnées de $\vec{v}+\vec{w}$ sont $(x'+x'', y'+y'')$ et celles de $\lambda\vec{v}$ sont $(\lambda x', \lambda y')$. Par F02, $x(x'+x'') + y(y'+y'') = (xx'+yy') + (xx''+yy'')$ et $x(\lambda x') + y(\lambda y') = \lambda(xx'+yy')$; de même, $xx'+yy' = x'x + y'y$.

Étape 2. Par F02, $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$. En développant par symétrie et linéarité (étape 1), $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$.

Étape 3. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, ils sont orthogonaux et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Sinon, par F01, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ avec $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| > 0$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ si et seulement si $\cos\theta = 0$. Le cosinus ne s'annule qu'aux réels $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; le seul d'entre eux dans $[0, \pi]$ est $\frac{\pi}{2}$. On conclut par la définition de l'orthogonalité (F01), puis par F02.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout part de l'écriture $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ et du cosinus d'une différence.

Une fois $xx' + yy'$ obtenu, chaque propriété devient un calcul sur les coordonnées : on développe, on regroupe.

Le critère d'orthogonalité dit que le cosinus s'annule, sur $[0, \pi]$, seulement en $\frac{\pi}{2}$.

Exemple : un triangle rectangle

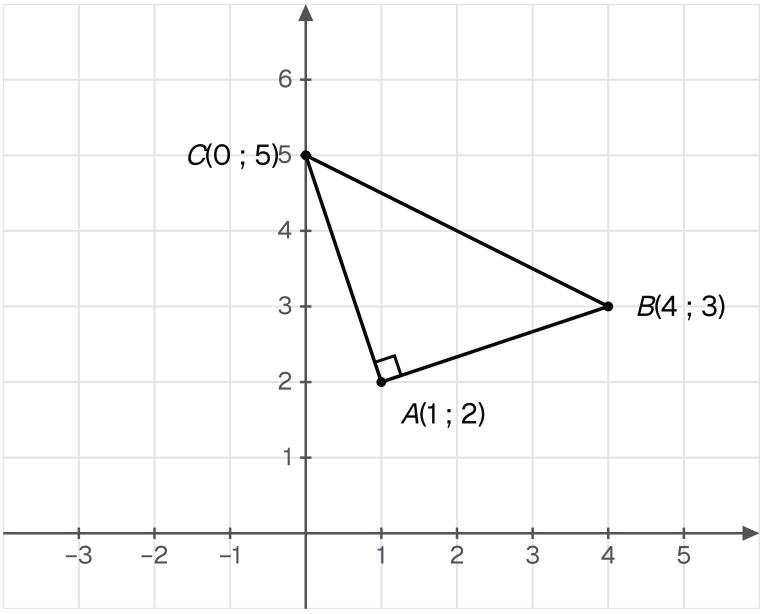
Énoncé. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ et $C(0, 5)$. Montre que le triangle ABC est rectangle en A.

Vecteurs. $\overrightarrow{AB}(3, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 3)$.

Produit scalaire. D'après l'expression analytique du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0.$$

Conclusion. D'après le critère d'orthogonalité, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : le triangle ABC est rectangle en A.



Le triangle ABC de l'exemple : le produit scalaire nul des vecteurs AB et AC se traduit par l'angle droit codé en A.

Calculer sur les coordonnées

Vérifie : Un paramètre à trouver

Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}(m, 3)$ et $\vec{v}(2, -4)$, où m est un réel. Pour quelle valeur de m ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?

A. $m = 6$

Juste.

Juste : $2m - 12 = 0$.

B. $m = -6$

Faux.

Erreur de signe : $3 \times (-4) = -12$, donc $2m - 12 = 0$.

C. $m = \dfrac{3}{2}$

Faux.

Tu as croisé les coordonnées : on multiplie les abscisses entre elles, puis les ordonnées.

D. Pour aucune valeur.

Faux.

L'équation $2m - 12 = 0$ a une solution.

Correction

Le repère est orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2m + 3 \times (-4) = 2m - 12$.

D'après le critère d'orthogonalité, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $2m - 12 = 0$, c'est-à-dire $m = 6$.

Exemple : une norme de deux façons

Énoncé. Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}(1, 2)$ et $\vec{v}(3, -1)$. Calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ de deux façons.

Par les propriétés. $\|\vec{u}\|^2 = 5$, $\|\vec{v}\|^2 = 10$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 = 1$. En développant le carré de la norme d'une somme :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= 5 + 2 \times 1 + 10 \\ &= 17. \end{aligned}$$

Par les coordonnées. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(4, 1)$, et $4^2 + 1^2 = 17$.

Distance. Si $\overrightarrow{EF} = \vec{u} + \vec{v}$, alors $EF = \sqrt{17}$.

Attention : un nombre, et un repère orthonormé

✗ « Avec $\vec{u}(1, 2)$, $\vec{v}(3, -1)$ et $\vec{w}(2, 2)$, on calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$. »

✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ est un **réel**. L'écriture $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w} = \vec{w}$ désigne un vecteur ; un produit scalaire de trois vecteurs n'existe pas.

De plus, $xx' + yy'$ n'est valable que dans un repère **orthonormé** : annonce-le avant de calculer.

Rédiger une orthogonalité

Méthode : montrer que deux vecteurs ou deux droites sont orthogonaux

1. **Annoncer** le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. **Choisir** un vecteur par objet : vecteur donné, vecteur directeur ou vecteur normal d'une droite.
3. **Calculer** $xx' + yy'$, puis **conclure** par le critère d'orthogonalité.

Rédaction attendue. « Le repère est orthonormé. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \cdots = 0$. D'après le critère d'orthogonalité, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. »

À toi : Rédige un angle droit

Dans un repère orthonormé, soit $E(2, -1)$, $F(5, 1)$ et $G(0, 2)$. Rédige la preuve que le triangle EFG est rectangle en E. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et de $\overrightarrow{EG}$.
Indice 2
Calcule leur produit scalaire par l'expression analytique.
Indice 3
Point délicat : annonce le repère orthonormé et nomme le critère qui conclut.

Réponse
« Le repère est orthonormé. On a $\overrightarrow{EF}(3,2)$ et $\overrightarrow{EG}(-2,3)$, donc

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}\\&=3\times(-2)+2\times3\\&=0.\end{aligned}$$

D'après le critère d'orthogonalité, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux. Donc le triangle EFG est rectangle en E. »

Cosinus et sinus d'un angle orienté

Un cosinus ne suffit pas

Devine : Même cosinus, même angle ?

Dans un repère orthonormé direct, soit $\vec{u}(1,1)$, $\vec{v}(0,2)$ et $\vec{w}(2,0)$. Le cosinus de l'angle géométrique vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$, comme pour $\vec{u}$ et $\vec{w}$. D'après toi, les angles orientés $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u},\vec{w})$ ont-ils la même mesure principale ?

A. Non : l'un des deux est un angle droit.

Faux.

Aucun des deux : leur cosinus $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ n'est pas nul.

B. Non : leurs mesures principales sont opposées.

Juste.

Juste : $\dfrac{\pi}{4}$ pour l'un, $-\dfrac{\pi}{4}$ pour l'autre.

C. Oui, puisque les cosinus sont égaux.

Faux.

Deux angles opposés ont le même cosinus : le cosinus ne voit pas le sens de rotation.

D. Oui, puisque $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont la même norme.

Faux.

La norme ne dit rien de la direction ni du sens.

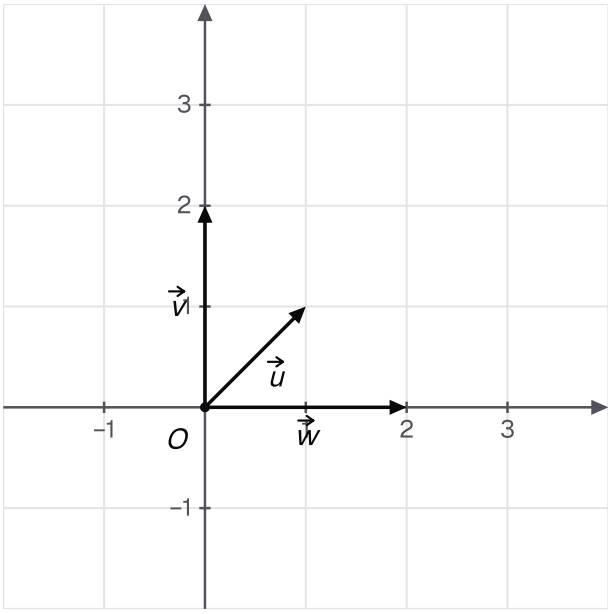
Correction
Les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivent $\vec{i}$, la diagonale du premier quart de plan, puis $\vec{j}$. Donc :

$$(\vec{i},\vec{w}) \equiv 0\ [2\pi],$$
$$(\vec{i},\vec{u}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi],$$
$$(\vec{i},\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\vec{u},\vec{v}) &\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi], \\ (\vec{u},\vec{w}) &\equiv 0 - \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Pour distinguer ces deux angles, il faut un second nombre : le sinus.



Les trois vecteurs de l'activité, issus de l'origine : w sur l'axe des abscisses, u sur la diagonale, v sur l'axe des ordonnées.

Pourquoi est-ce vrai ? On écrit encore chaque vecteur avec sa norme, le cosinus et le sinus d'un angle repéré depuis $\vec{i}$.

La relation de Chasles donne une mesure $\beta - \alpha$ de $(\vec{u},\vec{v})$. Les formules d'addition donnent alors son cosinus **et** son sinus ; le sinus porte le sens de rotation.

Cosinus et sinus par les coordonnées

Théorème : Cosinus et sinus d'un angle orienté

Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs non nuls, et $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y$ leur **déterminant**. Pour toute mesure θ de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$:

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy'}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

En particulier, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ et $\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$.

Démonstration

Étape 1. Soit $r = \|\vec{u}\|$, $r' = \|\vec{v}\|$, et α, β des mesures de $(\vec{i},\vec{u})$ et $(\vec{i},\vec{v})$. Par définition du cosinus et du sinus (abscisse curviligne, comme à l'étape 2 de F02), $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $x' = r'\cos\beta$, $y' = r'\sin\beta$; par la relation de Chasles, $\beta - \alpha$ est une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$.

Étape 2. Toute mesure θ s'écrit $\beta - \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$; le cosinus et le sinus étant de période 2π, $\cos\theta = \cos(\beta-\alpha)$ et $\sin\theta = \sin(\beta-\alpha)$.

Étape 3. Par les formules d'addition :

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{xx'+yy'}{rr'}, \qquad \sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = \frac{xy'-x'y}{rr'}.$$

Étape 4. En multipliant par rr' et en utilisant F02, on obtient les deux dernières égalités.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux vecteurs s'écrivent avec leurs normes et des mesures α et β de $(\vec{i},\vec{u})$ et $(\vec{i},\vec{v})$.

Les formules d'addition transforment $\cos(\beta-\alpha)$ et $\sin(\beta-\alpha)$ en coordonnées.

Le numérateur du sinus est le **déterminant** $xy' - x'y$: il change de signe quand on échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Vérifie : Toutes les mesures à la fois

Dans la preuve, l'étape 2 passe de la mesure $\beta - \alpha$ à une mesure θ quelconque de $(\vec{u},\vec{v})$. Quel argument le permet ?

A. Les deux vecteurs ont la même norme.

Faux.

Rien ne l'impose : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls quelconques.

B. La mesure θ est la mesure principale.

Faux.

L'énoncé vaut pour **toute** mesure θ, pas seulement pour la principale.

C. Le cosinus et le sinus sont de période 2π.

Juste.

Juste : θ et $\beta - \alpha$ diffèrent d'un multiple de 2π.

D. Le cosinus est une fonction paire.

Faux.

La parité ne concerne pas le sinus, qui est impair : elle ne suffit pas ici.

Correction
Toute mesure θ de $(\vec{u},\vec{v})$ s'écrit $\beta-\alpha+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Le cosinus et le sinus étant de période 2π, $\cos\theta=\cos(\beta-\alpha)$ et $\sin\theta=\sin(\beta-\alpha)$.

La parité du cosinus ne suffirait pas : elle ne dit rien du sinus.

Mesurer un angle orienté

Méthode : une mesure d'angle orienté par les coordonnées

1. **Annoncer** le repère orthonormé direct et vérifier que les vecteurs sont non nuls.
2. **Calculer** $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\det(\vec{u},\vec{v})$ et $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.
3. **Diviser** pour obtenir $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
4. **Reconnaître** un angle dont le cosinus **et** le sinus ont ces valeurs, puis conclure modulo 2π. Si les valeurs ne sont pas remarquables, on donne $\cos\theta$ et $\sin\theta$ exacts, sans nommer d'angle.

Rédaction attendue. « On a $\cos\theta=\dots$ et $\sin\theta=\dots$. Donc $(\vec{u},\vec{v})\equiv\dots\ [2\pi]$. »

Exemple : une mesure par les coordonnées

Énoncé. Dans un repère orthonormé direct, soit $\vec{u}(1,2)$ et $\vec{v}(3,1)$. Détermine une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$.

Calculs. On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=3+2=5$ et

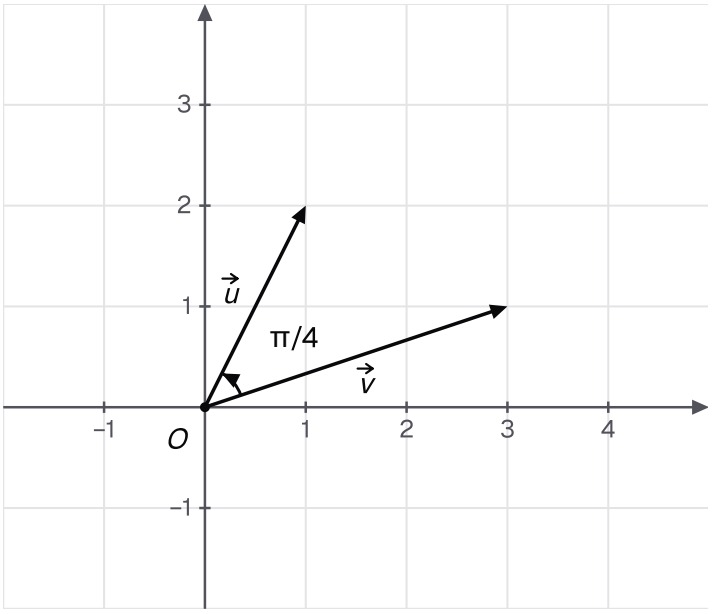
$$\det(\vec{u},\vec{v})=1\times1-3\times2=-5.$$

Les normes valent $\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$, de produit $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Cosinus et sinus. Soit θ une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$. On divise le produit scalaire et le déterminant par le produit des normes :

$$\cos\theta=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\theta=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Conclusion. Ce sont le cosinus et le sinus de $-\dfrac{\pi}{4}$, donc $(\vec{u},\vec{v})\equiv-\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.



Les vecteurs u et v de l'exemple : on tourne de π/4 dans le sens direct pour aller de v à u, donc l'angle orienté (u, v) mesure -π/4.

Exemple **: le signe du sinus oriente l'angle**

Énoncé. Dans un repère orthonormé direct, soit $A(2,-1)$, $B(5,-1)$ et $C(0,1)$. Détermine une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

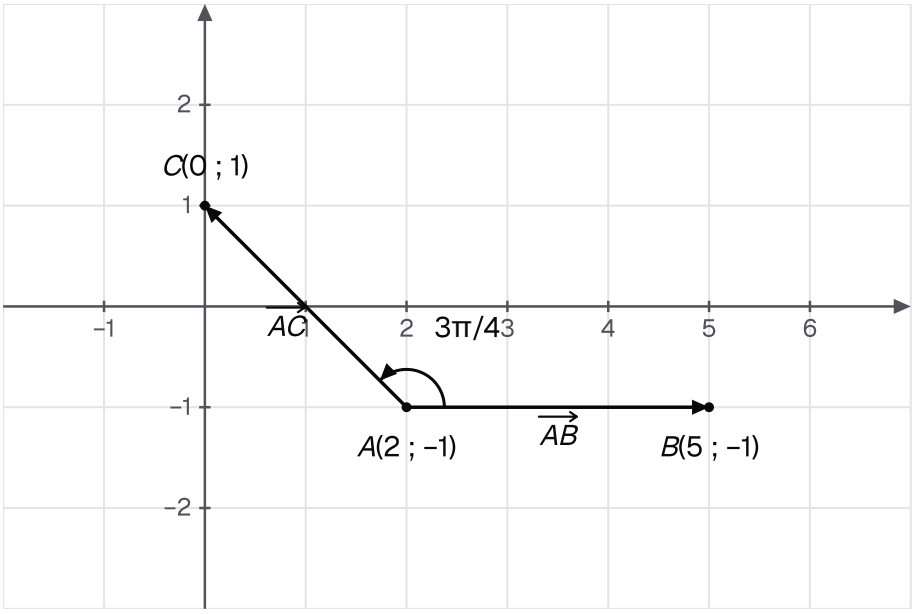
Calculs. $\overrightarrow{AB}(3,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,2)$. Alors :

- produit scalaire : $3\times(-2)+0\times 2=-6$;
- déterminant : $3\times 2-(-2)\times 0=6$;
- produit des normes : $3\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

Conclusion. Pour une mesure θ de cet angle, $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{3\pi}{4}\ [2\pi].$$

Le cosinus seul laissait le choix entre $\dfrac{3\pi}{4}$ et $-\dfrac{3\pi}{4}$: le signe du sinus tranche.



De la flèche AB à la flèche AC, l'arc tourne dans le sens direct et couvre 3π/4 : c'est le sinus positif qui fixe ce sens.

Rédiger une mesure

Vérifie : Un angle droit orienté

Dans un repère orthonormé direct, soit $\vec{u}(1,-1)$ et $\vec{v}(-1,-1)$. Quelle est la mesure principale de $(\vec{u},\vec{v})$?

A. $\dfrac{\pi}{2}$

Faux.

Le déterminant vaut $1\times(-1)-(-1)\times(-1)=-2$: le sinus est négatif.

B. 0

Faux.

Le produit scalaire est nul : l'angle est droit, pas nul.

C. π

Faux.

Des vecteurs d'angle π sont colinéaires ; ici, le déterminant n'est pas nul.

D. $-\dfrac{\pi}{2}$

Juste.

Juste : $\cos\theta=0$ et $\sin\theta=-1$.

Correction

On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1+1=0$ et

$$\begin{aligned}&\det(\vec{u},\vec{v})\\&=1\times(-1)-(-1)\times(-1)\\&=-2.\end{aligned}$$

Les normes valent $\sqrt{2}$, de produit 2. Pour une mesure θ de $(\vec{u},\vec{v})$, on obtient donc $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = -1$:

$$(\vec{u},\vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi],$$

de mesure principale $-\dfrac{\pi}{2}$.

À toi : Rédige une mesure d'angle orienté

Dans un repère orthonormé direct, soit $\vec{u}(\sqrt{3},1)$ et $\vec{v}(-\sqrt{3},1)$. Rédige la recherche d'une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule le produit scalaire, le déterminant et le produit des normes.
Indice 2
Tu dois trouver $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$.
Indice 3
Point délicat : le signe du sinus choisit entre deux angles opposés.

Réponse
« Le repère est orthonormé direct et les vecteurs sont non nuls. On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3+1 = -2$ et

$$\begin{aligned}&\det(\vec{u},\vec{v})\\ &= \sqrt{3}\times 1 - (-\sqrt{3})\times 1\\ &= 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Les deux normes valent 2. Pour une mesure θ de $(\vec{u},\vec{v})$, la division par le produit des normes donne $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. »

Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Un produit scalaire borné

Devine : Plus grand que le produit des normes ?

Dans un repère orthonormé, pour $\vec{u}(2,1)$ et $\vec{v}(1,3)$, on trouve $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$ et $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = \sqrt{5}\times\sqrt{10} = 5\sqrt{2}$. D'après toi, existe-t-il deux vecteurs tels que $|\vec{u}\cdot\vec{v}| > \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$?

A. Non, jamais.

Juste.
Juste : un cosinus est compris entre -1 et 1.

B. Oui, avec de grandes coordonnées.

Faux.
Multiplier $\vec{u}$ par $k > 0$ multiplie les deux membres par k : l'ordre ne change pas.

C. Oui, quand l'angle est obtus.

Faux.
Un angle obtus rend le produit scalaire négatif ; sa valeur absolue reste majorée.

D. Oui, quand les vecteurs sont orthogonaux.

Faux.
Le produit scalaire est alors nul : c'est le plus petit cas possible.

Correction
Pour des vecteurs non nuls, en notant θ la mesure de leur angle géométrique, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$, et $|\cos\theta| \leq 1$. Donc :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

Si l'un des vecteurs est nul, les deux membres sont nuls.

L'inégalité qui suit l'énonce, avec une preuve par le calcul seul.

Pourquoi est-ce vrai ? Le cosinus donne l'idée, mais la preuve évite les angles.

Elle repose sur une identité de calcul : le carré du produit scalaire plus le carré du déterminant égale le produit des carrés des normes.

Un carré étant positif, l'inégalité suit, et le cas d'égalité aussi.

Deux inégalités démontrées

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \, \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration

Étape 1. En développant chaque membre, on vérifie l'identité

$$(xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2).$$

Les deux membres valent $x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2$, car les doubles produits $2xx'yy'$ et $-2xx'yy'$ s'annulent.

Étape 2. Comme $(xy' - x'y)^2 \geq 0$, on obtient $(xx' + yy')^2 \leq (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$, soit, par F02 et F03, $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2$. Les deux membres de l'inégalité cherchée étant positifs, elle s'en déduit par la racine carrée.

Étape 3. Les deux membres étant positifs, l'égalité équivaut à $(xx' + yy')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$, donc, par l'étape 1, à $(xy' - x'y)^2 = 0$, c'est-à-dire $xy' - x'y = 0$. Par le critère de colinéarité du tronc commun, cela équivaut à : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Vérifie : D'où vient le cas d'égalité ?

Dans la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, quel raisonnement donne le cas d'égalité, à l'étape 3 ?

A. L'inégalité triangulaire devient une égalité.

Faux.

L'inégalité triangulaire se démontre à partir de celle-ci : on ne peut pas l'utiliser ici.

B. Le carré $(xy' - x'y)^2$ est nul exactement pour des vecteurs colinéaires.

Juste.

Juste : c'est le terme retiré à l'étape 2.

C. Le cosinus de l'angle vaut 1 exactement pour des vecteurs colinéaires.

Faux.

La preuve n'emploie aucun angle ; et des vecteurs colinéaires de sens contraires ont un cosinus égal à -1.

D. La racine carrée conserve les égalités.

Faux.

Elle sert à passer des carrés aux nombres positifs, à l'étape 2 comme à l'étape 3 ; mais elle ne dit pas quand les carrés sont égaux : c'est l'identité de l'étape 1 qui le dit.

Correction

L'étape 1 donne l'identité

$$\begin{aligned}&(xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2 \\ &= (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2).\end{aligned}$$

L'égalité $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2$ a donc lieu si et seulement si $(xy' - x'y)^2 = 0$, soit $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Le critère de colinéarité du tronc commun conclut.

Propriété : Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

En particulier, pour tous points A, B et C : $AC \leq AB + BC$.

Démonstration

Étape 1. Par F03, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Étape 2. Par F05, $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$. Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2$.

Étape 3. Les deux nombres $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ sont positifs : l'inégalité des carrés donne l'inégalité cherchée. Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, la relation de Chasles vectorielle donne $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, d'où $AC \leq AB + BC$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une identité de calcul, l'**identité de Lagrange**, porte toute l'inégalité de Cauchy-Schwarz : on retire un carré positif.

L'inégalité triangulaire en découle. On développe $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$, on majore $\vec{u}\cdot\vec{v}$ par $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, puis on reconnaît le carré d'une somme.

Exemple : le cas d'égalité

Énoncé. Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}(2,-3)$ et $\vec{v}(-4,6)$. Compare $|\vec{u}\cdot\vec{v}|$ et $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.

Calcul. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -8-18 = -26$. Et $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, de produit 26.

Conclusion. Il y a égalité : $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = 26$. C'est attendu, car $\vec{v} = -2\vec{u}$.

Pour des vecteurs non colinéaires, comme $\vec{u}(2,1)$ et $\vec{v}(1,3)$, l'inégalité est stricte : $5 < 5\sqrt{2}$.

Majorer avec Cauchy-Schwarz

Exemple : une inégalité entre réels

Énoncé. Montre que, pour tous réels a et b :

$$|3a+4b| \leq 5\sqrt{a^2+b^2}.$$

Choix des vecteurs. Soit a et b deux réels. Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}(3,4)$ et $\vec{v}(a,b)$. Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3a+4b$, $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Conclusion. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|3a+4b| \leq 5\sqrt{a^2+b^2}$.

L'égalité a lieu si et seulement si $\vec{v}(a,b)$ est colinéaire à $\vec{u}(3,4)$, par exemple pour $a=6$ et $b=8$.

Vérifie : Trois points et deux distances

Dans un repère orthonormé, soit $A(1,1)$, $B(3,2)$ et $C(7,4)$. Compare AC et $AB+BC$.

A. $AC > AB + BC$
Faux.

C'est impossible : l'inégalité triangulaire l'interdit pour tous points.

B. On ne peut pas comparer sans figure.

Faux.

Les coordonnées donnent les trois distances exactes.

C. $AC = AB + BC$

Juste.

Juste : $3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$.

D. $AC < AB + BC$

Faux.

Calcule les trois distances : $AB = \sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$ et $AC = 3\sqrt{5}$.

Correction

On a $\overrightarrow{AB}(2, 1)$, $\overrightarrow{BC}(4, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(6, 3)$. Donc :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{5}, \\ BC &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \\ AC &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ainsi $AC = AB + BC$. L'égalité vient de $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$: le point B est sur le segment $[AC]$.

À toi : Rédige une inégalité

Rédige la preuve que, pour tout réel t, $|t + 1| \leq \sqrt{2}\,\sqrt{t^2 + 1}$, puis le cas d'égalité. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $t + 1$ comme le produit scalaire de deux vecteurs bien choisis.

Indice 2

Prends $\vec{u}(t, 1)$ et $\vec{v}(1, 1)$ dans un repère orthonormé.

Indice 3

Point délicat : l'égalité exige la colinéarité, soit $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Réponse

« Soit t un réel. Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}(t, 1)$ et $\vec{v}(1, 1)$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = t + 1$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{t^2 + 1}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|t + 1| \leq \sqrt{2}\,\sqrt{t^2 + 1}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{v}) = t - 1 = 0$, soit $t = 1$. »

Vecteur normal et équation cartésienne

Droite et vecteur directeur

Petit rappel. Au tronc commun, une droite est déterminée par un point et un **vecteur directeur** non nul.

Toute droite a une équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Le vecteur $\vec{w}(-b, a)$ la dirige.

Avec le produit scalaire, un autre vecteur va porter la même information.

Vérifie : Perpendiculaire à la direction

Dans un repère orthonormé, la droite $D : 3x + y - 4 = 0$ est dirigée par $\vec{w}(-1, 3)$. Lequel de ces vecteurs est orthogonal à $\vec{w}$?

A. $\vec{p}(-1, 3)$
Faux.
C'est $\vec{w}$ lui-même : $\vec{w} \cdot \vec{w} = 10$.

B. $\vec{q}(1, 3)$
Faux.
Le produit scalaire vaut $-1 + 9 = 8$.

C. $\vec{s}(3, -1)$
Faux.
Le produit scalaire vaut $-3 - 3 = -6$.

D. $\vec{n}(3, 1)$
Juste.
Juste : $3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$.

Correction
On calcule le produit scalaire de chaque vecteur avec $\vec{w}(-1, 3)$. Seul $\vec{n}(3, 1)$ donne $3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$.

Remarque : ses coordonnées sont les coefficients de x et de y dans l'équation de D.

Vecteur normal et équation

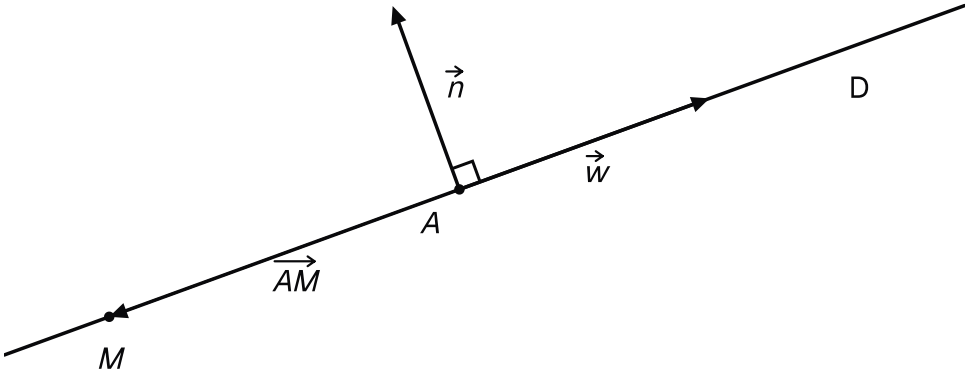
Définition : Vecteur normal à une droite

Soit D une droite. Un **vecteur normal** à D est un vecteur **non nul** orthogonal à un vecteur directeur de D.

Un vecteur normal fixe la direction perpendiculaire à la droite ; avec un point, il fixe la droite.

Pourquoi est-ce vrai ? Les vecteurs orthogonaux à $\vec{n}(a, b)$ sont exactement ceux qui sont colinéaires à $\vec{w}(-b, a)$.

Dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est donc dire que $\overrightarrow{AM}$ suit la direction de $\vec{w}$: on retrouve une droite du tronc commun.



Sur la droite D passant par A, le vecteur w donne la direction et le vecteur n lui est perpendiculaire ; le vecteur AM reste porté par D.

Théorème : Droite définie par un point et un vecteur normal ; équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, soit $A(x_A, y_A)$ un point et $\vec{n}(a, b)$ un vecteur non nul.

- La droite D passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Elle a pour équation $ax + by + c = 0$, avec $c = -ax_A - by_A$.
- Réciproquement, pour tous réels a, b et c tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(-b, a)$.

Démonstration

Étape 1. Le vecteur $\vec{w}(-b, a)$ est non nul et $\vec{n} \cdot \vec{w} = -ab + ba = 0$ (F02) : il est orthogonal à $\vec{n}$ (F03). Si $\vec{e}(p, q)$ est orthogonal à $\vec{n}$, alors $ap + bq = 0$ (F03, F02), donc $\det(\vec{e}, \vec{w}) = pa + qb = 0$: $\vec{e}$ est colinéaire à $\vec{w}$. Ainsi D est la droite passant par A et dirigée par $\vec{w}$.

Étape 2. Pour $M(x, y)$: $M \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, soit $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{w}) = a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$. Par F02, c'est $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$; en développant, $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$.

Étape 3. Réciproquement, si $a \neq 0$, le point $A_0\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$ vérifie l'équation ; si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et $A_0\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$ la vérifie. Alors $ax + by + c = 0$ équivaut à $\overrightarrow{A_0M} \cdot \vec{n} = 0$: par l'étape 2, l'ensemble est la droite passant par A_0, de vecteur normal $\vec{n}$ et dirigée par $\vec{w}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Être orthogonal à $\vec{n}(a,b)$ ou être colinéaire à $\vec{w}(-b,a)$, c'est la même condition : le produit scalaire et le déterminant s'échangent.

Dans $ax+by+c=0$, les coefficients de x et de y donnent donc un vecteur normal, et un point de la droite donne c.

Vérifie : Point et vecteur normal

Dans un repère orthonormé, quelle est une équation de la droite passant par $A(2,-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(4,3)$?

A. $4x+3y-5=0$

Juste.
Juste : $4\times 2+3\times(-1)-5=0$.

B. $4x+3y+5=0$

Faux.
Le point A ne la vérifie pas : $8-3+5=10$.

C. $3x-4y-10=0$

Faux.
Tu as pris $\vec{n}$ comme vecteur directeur : cette droite lui est parallèle.

D. $2x-y-5=0$

Faux.
Tu as échangé les rôles : les coefficients viennent de $\vec{n}$, pas de A.

Correction
Pour $M(x,y)$, on a $\overrightarrow{AM}(x-2,y+1)$. La condition $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ s'écrit $4(x-2)+3(y+1)=0$, soit :

$$4x+3y-5=0.$$

Vérification : $4\times 2+3\times(-1)-5=0$.

Écrire une équation

Méthode : une droite par un point et un vecteur normal

1. **Trouver** un point A de la droite et un vecteur non nul $\vec{n}(a,b)$ qui lui est orthogonal : direction d'une hauteur, d'une médiatrice, d'une tangente.
2. **Traduire** $M\in D$ par $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, avec $M(x,y)$.
3. **Développer**, puis **vérifier** l'équation sur le point A.

Rédaction attendue. « $M(x,y)\in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, soit $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$. Donc D : $ax+by+c=0$. »

Exemple : une hauteur de triangle

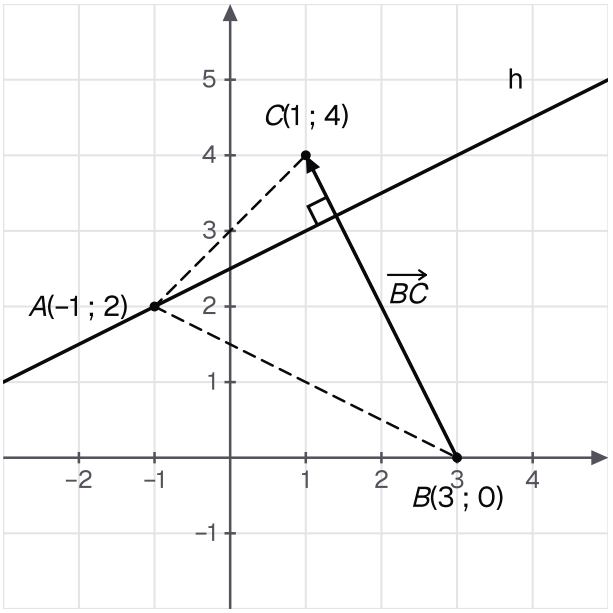
Énoncé. Dans un repère orthonormé, soit $A(-1,2)$, $B(3,0)$ et $C(1,4)$. Détermine une équation de la hauteur h issue de A dans le triangle ABC.

Vecteur normal. La hauteur est perpendiculaire à (BC) : $\overrightarrow{BC}(-2,4)$ est normal à h.

Équation. Avec le point A et ce vecteur normal, $M(x,y) \in h$ si et seulement si $-2(x+1)+4(y-2)=0$, soit $-2x+4y-10=0$. En divisant par -2 :

$$h : x - 2y + 5 = 0.$$

Vérification. $-1-2\times 2+5=0$: le point A est bien sur h.



La hauteur h issue de A coupe le côté [BC] à angle droit : le vecteur BC, porté par ce côté, est normal à h.

Rédiger une équation

Attention : normal ou directeur ?

✗ « La droite $5x+2y-1=0$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(5,2)$. »

✓ Dans un repère orthonormé, le vecteur $(5,2)$, formé des coefficients de x et de y, est **normal** à la droite. Un vecteur **directeur** est $\vec{w}(-2,5)$: on vérifie $5\times(-2)+2\times 5=0$.

Avant d'écrire une équation, demande-toi si ton vecteur est normal ou directeur.

À toi : Rédige une équation de droite

Dans un repère orthonormé, soit $E(-3,1)$, $F(1,2)$ et $G(4,0)$. Rédige une équation cartésienne de la droite Δ passant par E et perpendiculaire à (FG). Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Un vecteur normal à Δ est un vecteur directeur de (FG).
Indice 2
Calcule $\overrightarrow{FG}$, puis écris $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{FG}=0$.
Indice 3
Point délicat : vérifie ton équation sur le point E.

Réponse
« La droite Δ est perpendiculaire à (FG), donc $\overrightarrow{FG}(3,-2)$ est un vecteur normal à Δ.

Pour $M(x,y)$: $M\in\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{FG}=0$, soit $3(x+3)-2(y-1)=0$. Donc :

$$\Delta : 3x-2y+11=0.$$

Vérification : $3\times(-3)-2\times1+11=0$. »

Droites perpendiculaires, droites parallèles

Lire deux équations

Devine : Deux droites, une position

Dans un repère orthonormé, soit $D : 2x+5y-1=0$ et $D' : 5x-2y+3=0$. D'après toi, comment sont ces deux droites ?

A. Confondues.
Faux.
Des droites confondues sont parallèles ; or ces droites ne le sont pas.

B. Perpendiculaires.
Juste.
Juste : $2\times5+5\times(-2)=0$.

C. Parallèles.
Faux.
Leurs vecteurs directeurs $(-5,2)$ et $(2,5)$ ne sont pas colinéaires.

D. Sécantes, sans être perpendiculaires.
Faux.
Calcule le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs : il est nul.

Correction
Des vecteurs directeurs sont $\vec{w}(-5,2)$ pour D et $\vec{w'}(2,5)$ pour D'. Or $\vec{w}\cdot\vec{w'}=-10+10=0$: les vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc les droites sont perpendiculaires.

> Le même calcul se fait directement sur les coefficients : $2 \times 5 + 5 \times (-2) = 0$.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux droites sont perpendiculaires quand leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, parallèles quand ils sont colinéaires.

Avec $\vec{w}(-b, a)$ et $\vec{w'}(-b', a')$, le produit scalaire et le déterminant se calculent sur les coefficients des deux équations.

Le critère et sa preuve

Propriété : Droites perpendiculaires, droites parallèles

Soit $D : ax + by + c = 0$ et $D' : a'x + b'y + c' = 0$ deux droites, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$.

- D et D' sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.
- D et D' sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

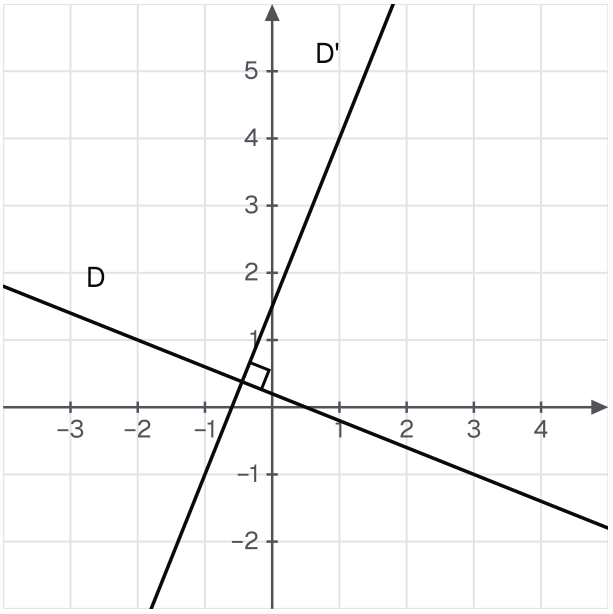
Démonstration

Étape 1. Par F08, $\vec{w}(-b, a)$ dirige D et $\vec{w'}(-b', a')$ dirige D'.

Étape 2. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Par F03, c'est $\vec{w} \cdot \vec{w'} = 0$, et par F02, $\vec{w} \cdot \vec{w'} = bb' + aa'$.

Étape 3. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, soit $\det(\vec{w}, \vec{w'}) = 0$. Or $\det(\vec{w}, \vec{w'}) = (-b)a' - (-b')a = ab' - a'b$.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**
>
> Tout se lit sur les coefficients (a, b) et (a', b') : un produit scalaire nul pour des droites perpendiculaires, un déterminant nul pour des droites parallèles.
>
> Les vecteurs normaux donnent les mêmes critères, car $aa' + bb'$ est aussi le produit scalaire de $\vec{n}(a, b)$ et de $\vec{n'}(a', b')$.



Les droites D et D' de l'activité d'ouverture se croisent à angle droit, comme le donne le critère : 2 × 5 + 5 × (-2) = 0.

Vérifie : Parallèles ou confondues ?

Dans un repère orthonormé, soit $D : 4x - 6y + 1 = 0$ et $D' : 6x - 9y + 2 = 0$. Comment sont ces deux droites ?

A. Perpendiculaires.

Faux.

Ici $aa' + bb' = 24 + 54 = 78$ n'est pas nul.

B. Sécantes en un seul point.

Faux.

Le déterminant $ab' - a'b$ est nul : elles sont parallèles.

C. Parallèles et distinctes.

Juste.

Juste : $ab' - a'b = 0$, et aucun point commun.

D. Confondues.

Faux.

Multiplie les équations par 3 et par 2 : $12x - 18y + 3 = 0$ et $12x - 18y + 4 = 0$ diffèrent.

Correction

On a :

$$\begin{aligned} ab' - a'b &= 4 \times (-9) - 6 \times (-6) \\ &= -36 + 36 = 0. \end{aligned}$$

D'après le critère de parallélisme, les droites sont parallèles.

> En multipliant l'équation de D par 3 et celle de D' par 2, on obtient D : $12x - 18y + 3 = 0$ et D' : $12x - 18y + 4 = 0$. Un point commun vérifierait $3 = 4$: les droites sont distinctes.

Perpendiculaire, médiatrice, parallèle

Exemple : la perpendiculaire par un point

Énoncé. Dans un repère orthonormé, détermine une équation de la droite Δ passant par $P(2, 3)$ et perpendiculaire à $D : x + 4y - 7 = 0$.

Vecteur normal. Un vecteur directeur de D est $\vec{w}(-4, 1)$; comme Δ est perpendiculaire à D, il est normal à Δ.

Équation. $-4(x - 2) + (y - 3) = 0$, soit $\Delta : 4x - y - 5 = 0$.

Vérifications. $4 \times 2 - 3 - 5 = 0$, et $1 \times 4 + 4 \times (-1) = 0$: Δ passe par P, et le critère confirme la perpendicularité.

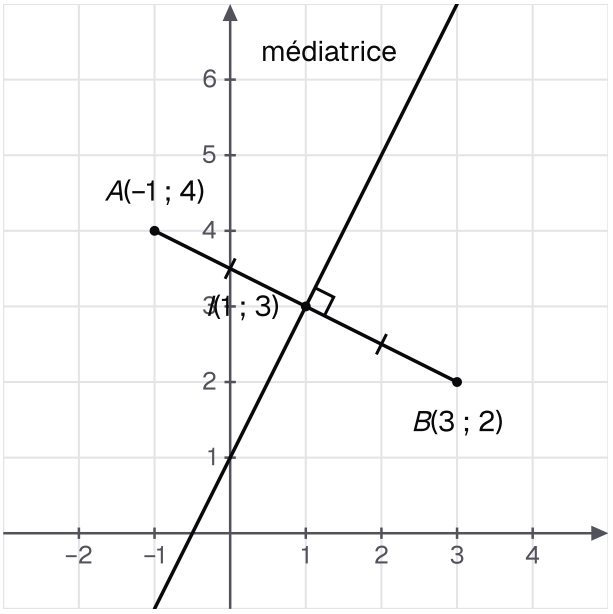
Exemple : une médiatrice

Énoncé. Dans un repère orthonormé, soit $A(-1, 4)$ et $B(3, 2)$. Détermine une équation de la médiatrice de $[AB]$.

Point et vecteur normal. La médiatrice passe par le milieu $I(1, 3)$ de $[AB]$, et elle est perpendiculaire à (AB) : $\overrightarrow{AB}(4, -2)$ lui est normal.

Équation. $4(x - 1) - 2(y - 3) = 0$, soit $4x - 2y + 2 = 0$, ou encore $2x - y + 1 = 0$.

Vérification. $2 \times 1 - 3 + 1 = 0$: le milieu I est sur la droite.



La médiatrice de [AB] passe par le milieu I(1, 3) et coupe le segment à angle droit ; c'est la droite 2x - y + 1 = 0.

À toi : Rédige une parallèle

Dans un repère orthonormé, soit $D : 3x - 7y + 2 = 0$ et $Q(1, -1)$. Rédige une équation de la droite D' parallèle à D et passant par Q. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Deux droites parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires.
Indice 2
Cherche D' sous la forme $3x - 7y + c = 0$.
Indice 3
Point délicat : c se calcule avec Q ; vérifie ensuite que D' et D sont distinctes.

Réponse
« Le vecteur $\vec{n}(3, -7)$ est normal à D. Une droite d'équation $3x - 7y + c = 0$ est parallèle à D, d'après le critère de parallélisme, car $3 \times (-7) - 3 \times (-7) = 0$.

Elle passe par Q si et seulement si $3 + 7 + c = 0$, soit $c = -10$. Donc :

$$D' : 3x - 7y - 10 = 0.$$

Elle est distincte de D, car $Q \notin D$: $3 + 7 + 2 \neq 0$. »

Distance d'un point à une droite

Le plus court chemin

Devine : Le point le plus proche

Dans un repère orthonormé, soit D : $y - 2 = 0$ et $M_0(5, -1)$. D'après toi, quelle est la plus petite distance entre M_0 et un point de D ?

A. 1

Faux.

C'est la distance de M_0 à l'axe des abscisses, pas à D.

B. $\sqrt{26}$

Faux.

C'est la distance OM_0 ; or O n'est pas sur D.

C. 5

Faux.

C'est la distance de M_0 à l'axe des ordonnées.

D. 3

Juste.

Juste : le point le plus proche est $H(5, 2)$.

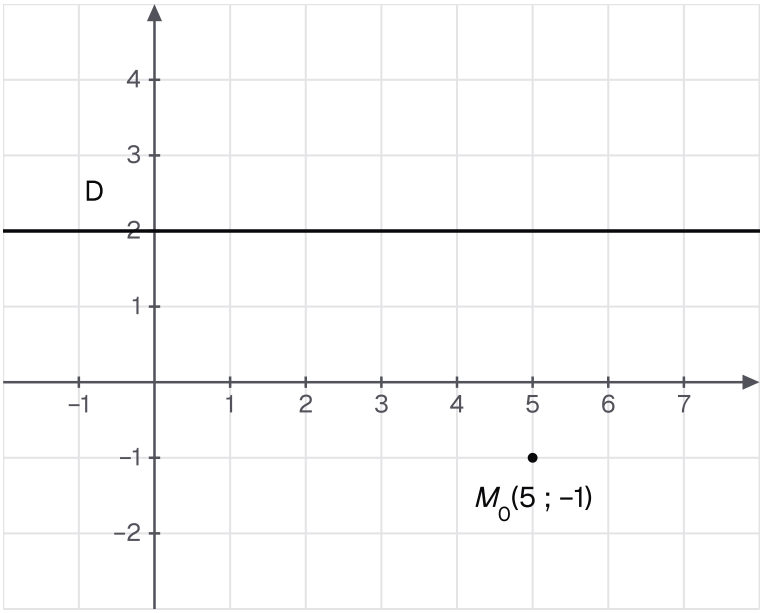
Correction

Les points de D s'écrivent $M(t, 2)$, avec $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$M_0M^2 = (t - 5)^2 + 3^2 \geq 9,$$

avec égalité seulement pour $t = 5$.

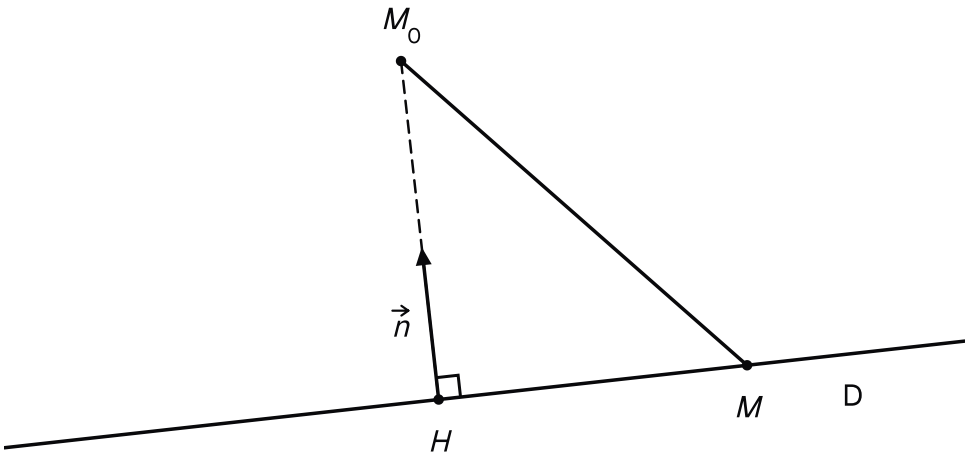
La plus petite distance est 3, atteinte au point $H(5, 2)$: c'est le pied de la perpendiculaire à D issue de M_0.



Les données de l'activité : la droite D horizontale, d'équation y - 2 = 0, et le point M0(5, -1) placé en dessous.

Pourquoi est-ce vrai ? Le vecteur $\overrightarrow{HM_0}$ est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}(a,b)$. Le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz donne alors $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM_0}| = \|\vec{n}\|\,M_0H$.

Or ce produit scalaire se calcule sans connaître H : il vaut ax_0+by_0+c.



H, pied de la perpendiculaire à D menée de M0, est le point de D le plus proche : tout autre point M de D forme avec H et M0 un triangle rectangle en H.

La formule et sa preuve

Théorème : Distance d'un point à une droite

Soit $D : ax+by+c=0$ une droite, avec $(a,b)\neq(0,0)$, et $M_0(x_0,y_0)$ un point. Soit H le projeté orthogonal de M_0 sur D ; la **distance** de M_0 à D est $d(M_0,D)=M_0H$. Alors :

$$d(M_0,D)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Démonstration

Étape 1. Par F08, $\vec{n}(a,b)$ est normal à D et $\vec{w}(-b,a)$ la dirige. Par définition du projeté orthogonal, $\overrightarrow{HM_0}(p,q)$ est nul ou orthogonal à $\vec{w}$; par F03 et F02, $-bp+aq=0$, soit $\det(\vec{n},\overrightarrow{HM_0})=0$. Il est donc colinéaire à $\vec{n}$.

Étape 2. Par le cas d'égalité de F05, $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM_0}| = \|\vec{n}\|\,M_0H$, avec $\|\vec{n}\|=\sqrt{a^2+b^2}>0$.

Étape 3. Par F02, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM_0} = a(x_0-x_H)+b(y_0-y_H) = ax_0+by_0-(ax_H+by_H)$. Comme $H\in D$, $ax_H+by_H=-c$, donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM_0}=ax_0+by_0+c$. On divise par $\sqrt{a^2+b^2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On ne calcule jamais le projeté H. Le produit scalaire $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM_0}$ se calcule avec M_0 seul, car $ax_H + by_H = -c$.

Le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, pour deux vecteurs colinéaires, transforme ensuite ce produit scalaire en une longueur.

Vérifie : Le rôle du point H

Dans la preuve de la formule de la distance, à quoi sert le fait que H appartient à D, à l'étape 3 ?

A. À remplacer $ax_H + by_H$ par $-c$.

Juste.

Juste : c'est ce qui fait disparaître H du calcul.

B. À montrer que $\overrightarrow{HM_0}$ est colinéaire à $\vec{n}$.

Faux.

Cette colinéarité vient de l'orthogonalité à la droite, à l'étape 1.

C. À garantir que $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$.

Faux.

Cela vient de l'hypothèse $(a, b) \neq (0, 0)$.

D. À calculer les coordonnées de H.

Faux.

La preuve ne calcule jamais les coordonnées de H.

Correction

À l'étape 3, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM_0} = ax_0 + by_0 - (ax_H + by_H)$.

Comme $H \in D$, ses coordonnées vérifient $ax_H + by_H + c = 0$. Donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM_0} = ax_0 + by_0 + c$, calculable sans connaître H.

Calculer une distance

Méthode : la distance d'un point à une droite

1. **Mettre** l'équation de la droite sous la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
2. **Calculer** $ax_0 + by_0 + c$ avec les coordonnées du point, puis sa **valeur absolue**.
3. **Diviser** par $\sqrt{a^2 + b^2}$ et donner une valeur exacte simplifiée.

Rédaction attendue. « Par la formule donnant la distance d'un point à une droite, $d(M_0, D) = \dfrac{|\dots|}{\sqrt{\dots}} = \dots$ »

Exemple : une distance exacte

Énoncé. Dans un repère orthonormé, calcule la distance du point $M_0(2,3)$ à la droite $D : x + 3y - 2 = 0$.

Calcul. Par la formule donnant la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(M_0, D) &= \frac{|2 + 3 \times 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}. \end{aligned}$$

Contrôle. Le projeté de M_0 sur D est $H\left(\frac{11}{10}, \frac{3}{10}\right)$, et

$$M_0H^2 = \frac{81}{100} + \frac{729}{100} = \frac{81}{10}.$$

On retrouve bien $M_0H = \frac{9}{\sqrt{10}}$.

Attention : la forme de l'équation

✗ « La distance de $P(1,2)$ à la droite $D : y = -x + 4$ vaut $\frac{|1 + 2 + 4|}{\sqrt{2}}$. »

✓ Dans un repère orthonormé, l'équation doit d'abord s'écrire $x + y - 4 = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} d(P, D) &= \frac{|1 + 2 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Garde aussi la **valeur absolue** et la racine au dénominateur : $\sqrt{a^2 + b^2}$, jamais $a^2 + b^2$.

Distance entre deux parallèles

Exemple : deux droites parallèles

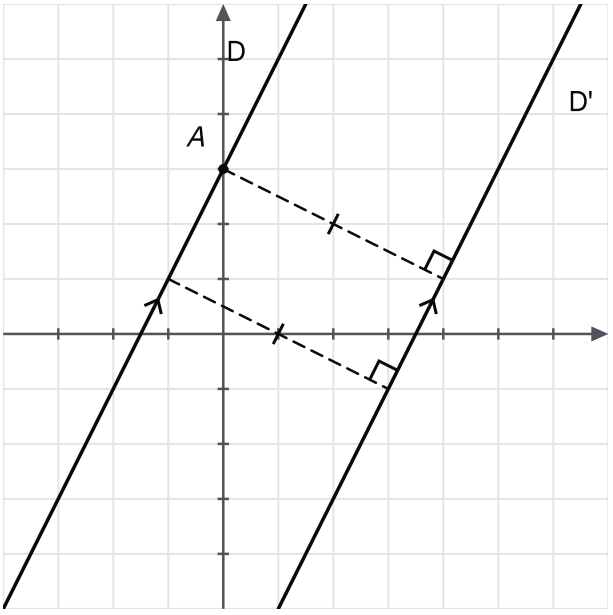
Énoncé. Dans un repère orthonormé, soit $D : 2x - y + 3 = 0$ et $D' : 2x - y - 7 = 0$. Montre que tous les points de D sont à la même distance de D'.

Parallélisme. D'après le critère de parallélisme, les droites sont parallèles, car $2 \times (-1) - 2 \times (-1) = 0$.

Calcul. Soit $A(x, y)$ un point de $D : 2x - y = -3$. Donc $2x - y - 7 = -10$, et par la formule donnant la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(A, D') &= \frac{|-10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. Cette distance ne dépend pas du point A choisi sur D : tous les points de D sont à la distance $2\sqrt{5}$ de D'.



Deux points de D, pris au hasard, sont à la même distance de D' : les deux segments perpendiculaires portent le même codage.

À toi : Rédige un calcul de distance

Dans un repère orthonormé, soit $K(-1, 2)$ et $D : y = 3x + 1$. Rédige le calcul de $d(K, D)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris d'abord l'équation sous la forme $ax + by + c = 0$.
Indice 2
Tu dois obtenir $3x - y + 1 = 0$, puis remplacer x et y par les coordonnées de K.
Indice 3
Point délicat : la valeur absolue, puis une valeur exacte sans racine au dénominateur.

Réponse
« La droite D a pour équation $3x - y + 1 = 0$, avec $(3, -1) \neq (0, 0)$. Par la formule donnant la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} & d(K, D) \\ &= \frac{|3 \times (-1) - 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}. \end{aligned}$$

Donc $d(K, D) = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$. »

Équation cartésienne d'un cercle

Une distance fixée

Devine : À distance 5 d'un point

Dans un repère orthonormé, un point $M(x, y)$ est à la distance 5 du point $\Omega(1, -2)$. D'après toi, quelle relation vérifient x et y ?

A. $(x-1) + (y+2) = 5$

Faux.
Une distance n'est pas la somme des écarts de coordonnées.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

Juste.
Juste : $\Omega M^2 = 25$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

Faux.
Le membre de gauche est ΩM^2 : il vaut 5^2, pas 5.

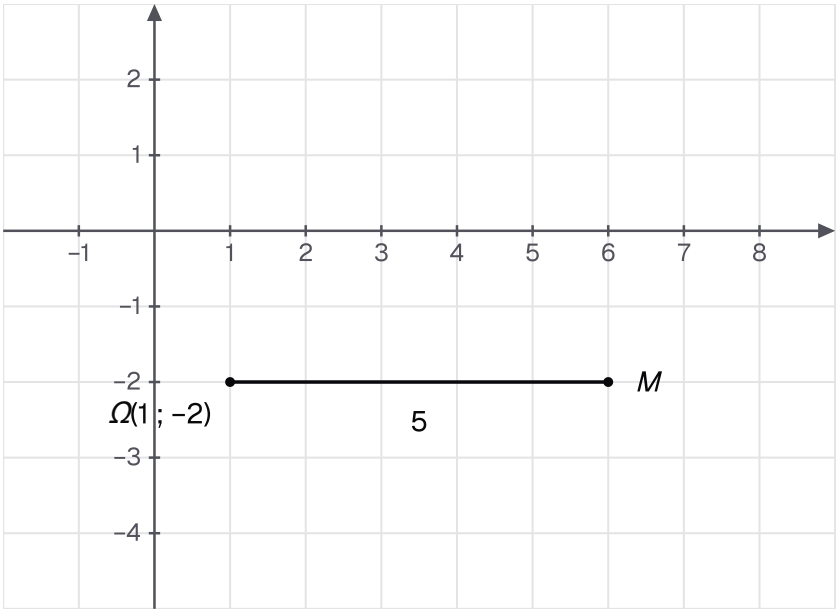
D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

Faux.
Les signes sont inversés : on retranche les coordonnées du centre.

Correction
On a $\overrightarrow{\Omega M}(x-1, y+2)$, donc $\Omega M^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2$.

Comme ΩM et 5 sont positifs, $\Omega M = 5$ équivaut à $\Omega M^2 = 25$. La relation est donc :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$



Les données de l'activité : le point Ω(1, -2) et un point M situé à la distance 5 de Ω.

Pourquoi est-ce vrai ? Un point est sur le cercle quand sa distance au centre vaut r. Élever au carré supprime la racine, et le carré scalaire $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$ se calcule par les coordonnées.

Dans l'autre sens, compléter les carrés ramène toute équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ à une somme de deux carrés égale à un nombre.

Équation d'un cercle, et réciproque

Théorème : Équation cartésienne d'un cercle

Soit $\Omega(a, b)$ un point et r un réel strictement positif. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

c'est-à-dire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Démonstration

Étape 1. Par définition du cercle, $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\Omega M = r$. Les deux nombres étant positifs, cela équivaut à $\Omega M^2 = r^2$.

Étape 2. Par F03 et F02, $\Omega M^2 = \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = (x - a)^2 + (y - b)^2$.

Étape 3. En développant, $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2$.

Exemple : du cercle à l'équation

Énoncé. Dans un repère orthonormé, écris une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-3, 2)$ et de rayon 4.

Équation. D'après l'équation cartésienne d'un cercle, $M(x, y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$. En développant :

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0.$$

Vérification. Le point $(1, 2)$ est à la distance 4 de Ω, et $1 + 4 + 6 - 8 - 3 = 0$.

Théorème : Ensemble des points d'équation x² + y² − 2ax − 2by + c = 0

Soit a, b et c trois réels, E l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, et $k = a^2 + b^2 - c$.

- Si $k > 0$, E est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$, E est réduit au point $\Omega(a, b)$.
- Si $k < 0$, E est vide.

Démonstration

Étape 1. On complète les carrés : $x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$ et $y^2 - 2by = (y-b)^2 - b^2$. Donc $M \in E$ si et seulement si $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$.

Étape 2. Si $k > 0$, on pose $r = \sqrt{k}$: l'équation s'écrit $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, et F11 conclut.

Étape 3. Si $k = 0$, une somme de deux carrés est nulle si et seulement si chacun l'est : $x = a$ et $y = b$. Si $k < 0$, aucun point ne convient, car $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq 0 > k$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur $\Omega M^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$: une distance se traite par son carré.

Pour lire une équation développée, on **complète les carrés**. Le nombre $k = a^2 + b^2 - c$ décide alors : un rayon $\sqrt{k}$ n'existe que si $k > 0$.

Vérifie : Un ensemble vide

Dans la preuve, quel raisonnement montre que l'ensemble E est vide quand $k < 0$?

A. On ne peut rien conclure sans connaître a et b.
Faux.
Le signe de k suffit : la preuve vaut pour tous réels a et b.

B. Le point $\Omega(a, b)$ n'existe pas.
Faux.

Le point $\Omega(a, b)$ existe toujours ; il n'appartient simplement pas à E.

C. Une somme de deux carrés est positive ou nulle.

Juste.

Juste : elle ne peut pas valoir $k < 0$.

D. Le rayon $\sqrt{k}$ n'existe pas, donc il n'y a pas de cercle.

Faux.

Cela montre seulement que E n'est pas un cercle de rayon $\sqrt{k}$, pas qu'il est vide.

Correction

À l'étape 1, l'équation équivaut à $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$.

À l'étape 3, pour tout point $M(x, y)$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq 0 > k$: aucun point ne vérifie l'équation. Donc E est vide.

Reconnaître un cercle

Méthode : reconnaître un cercle dans une équation développée

1. **Lire** a et b : le coefficient de x vaut $-2a$, celui de y vaut $-2b$.
2. **Compléter les carrés** : $x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$, et de même pour y.
3. **Calculer** $k = a^2 + b^2 - c$, puis conclure selon son signe : cercle, point ou ensemble vide.

Rédaction attendue. « L'équation équivaut à $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$, avec $k = \ldots$. Comme $k > 0$, E est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $\sqrt{k}$. »

Exemple : un cercle caché

Énoncé. Dans un repère orthonormé, détermine l'ensemble E des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$.

Carrés. $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ et $y^2 + 10y = (y+5)^2 - 25$. L'équation équivaut donc à

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16.$$

Conclusion. Ici $k = 4 + 25 - 13 = 16 > 0$: E est le cercle de centre $\Omega(2, -5)$ et de rayon 4.

Attention : un cercle qui n'en est pas un

✗ « L'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = 0$ est le cercle de centre $(-3, 1)$ et de rayon $\sqrt{10}$. »

✓ L'équation s'écrit $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 0$, car $k = 9 + 1 - 10 = 0$. Une somme de deux carrés nulle impose $x = -3$ et $y = 1$: l'ensemble est réduit au point $(-3, 1)$.

Calcule toujours k avant de parler de rayon.

Rédiger une reconnaissance

Vérifie : Lequel est vide ?

Dans un repère orthonormé, lequel de ces ensembles est vide ?

A. L'ensemble d'équation $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

Faux.

Ici $k=0$: l'ensemble est réduit au point $(1,-3)$.

B. L'ensemble d'équation $x^2+y^2-2x+6y=0$.

Faux.

Ici $k=10>0$: c'est un cercle de rayon $\sqrt{10}$.

C. L'ensemble d'équation $x^2+y^2+2x-6y-11=0$.

Faux.

Ici $k=1+9+11=21>0$: c'est un cercle.

D. L'ensemble d'équation $x^2+y^2-2x+6y+11=0$.

Juste.

Juste : $k=1+9-11=-1<0$.

Correction

Pour la première, la deuxième et la quatrième équation, $a=1$, $b=-3$ et $k=10-c$. La troisième a $a=-1$, $b=3$ et donne $k=21$.

Le seul ensemble vide est celui où $k<0$: $c=11$ et $k=-1$. Son équation s'écrit $(x-1)^2+(y+3)^2=-1$, ce qui est impossible.

À toi : Rédige la nature d'un ensemble

Dans un repère orthonormé, soit E l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2+y^2+8x-2y+8=0$. Rédige la détermination de E. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Identifie a et b : $-2a=8$ et $-2b=-2$.

Indice 2

Complète les carrés : $x^2+8x=(x+4)^2-16$.

Indice 3

Point délicat : calcule k et conclus selon son signe.

Réponse

« On a $x^2+8x=(x+4)^2-16$ et $y^2-2y=(y-1)^2-1$. L'équation équivaut donc à

$$(x+4)^2+(y-1)^2=9,$$

avec $k = 16 + 1 - 8 = 9 > 0$. Donc E est le cercle de centre $\Omega(-4, 1)$ et de rayon 3. »

Cercle de diamètre [AB]

Un angle droit et un cercle

Devine : Un produit scalaire à prévoir

Dans un repère orthonormé, soit $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ et $M(3, 4)$. D'après toi, que vaut $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$?

A. 0

Juste.

Juste : $(-2) \times 2 + (-2) \times (-2) = 0$.

B. 8

Faux.

Vérifie le signe de $(-2) \times 2$: il est négatif.

C. -8

Faux.

Vérifie le signe de $(-2) \times (-2)$: il est positif.

D. 4

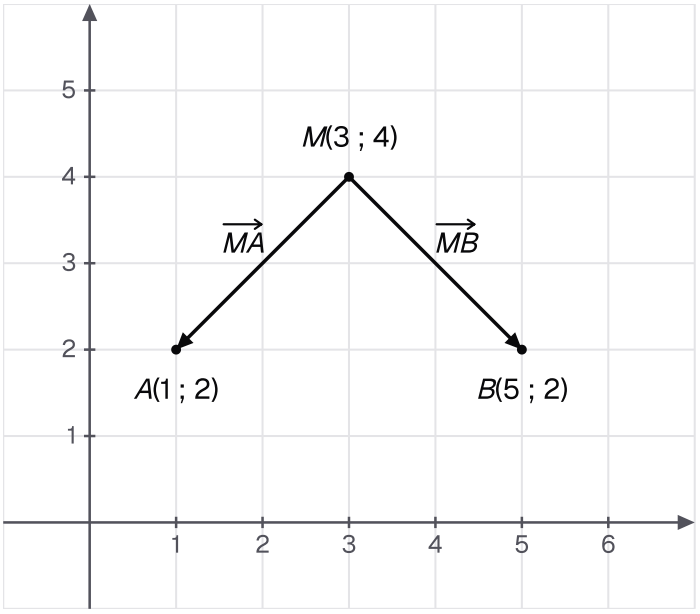
Faux.

Recalcule les coordonnées : $\overrightarrow{MA}(-2, -2)$ et $\overrightarrow{MB}(2, -2)$.

Correction

On a $\overrightarrow{MA}(-2, -2)$ et $\overrightarrow{MB}(2, -2)$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -4 + 4 = 0$: l'angle en M est droit.

Or le milieu de $[AB]$ est $\Omega(3, 2)$, et $\Omega M = 2 = \dfrac{AB}{2}$. Le point M est sur le cercle de diamètre $[AB]$: ce n'est pas un hasard.



Les trois points de l'activité et les deux vecteurs dont on demande le produit scalaire, MA et MB, issus de M.

Pourquoi est-ce vrai ? On fait passer les deux vecteurs par le milieu Ω de $[AB]$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ devient une différence de deux carrés : $M\Omega^2 - \Omega A^2$. Il est nul exactement quand M est à la distance ΩA du milieu.

Le cercle de diamètre [AB]

Propriété : Cercle de diamètre [AB]

Soit A et B deux points distincts. Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

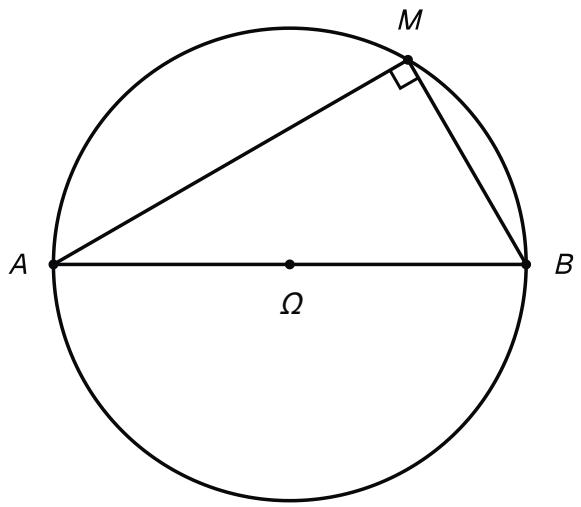
Démonstration

Étape 1. Soit Ω le milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A}$. Par la relation de Chasles vectorielle, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}$.

Étape 2. En développant par F03 :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = M\Omega^2 - \Omega A^2.$$

Étape 3. Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si $M\Omega^2 = \Omega A^2$, soit, les distances étant positives, $M\Omega = \Omega A = \dfrac{AB}{2}$, c'est-à-dire si et seulement si M appartient au cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{AB}{2}$: c'est le cercle de diamètre $[AB]$.



Le cercle de diamètre [AB] a pour centre le milieu Ω ; depuis un point M de ce cercle, distinct de A et de B, le segment [AB] est vu sous un angle droit.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Introduire le milieu Ω par la relation de Chasles fait apparaître $\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega A}$. Leur produit scalaire est une différence de carrés.

Les points A et B vérifient aussi la condition, car un vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemple : équation d'un cercle de diamètre donné

Énoncé. Dans un repère orthonormé, soit $A(-2,1)$ et $B(4,-3)$. Détermine une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

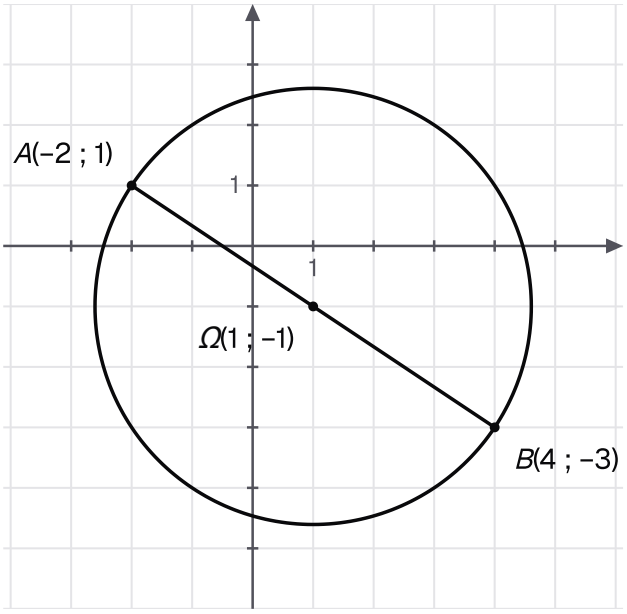
Condition. D'après la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$, $M(x,y)\in\mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, soit

$$\begin{aligned}&(x+2)(x-4)\\&\quad+(y-1)(y+3)=0.\end{aligned}$$

Équation. En développant :

$$x^2+y^2-2x+2y-11=0.$$

Contrôle. Ici $k=1+1+11=13$: centre $(1,-1)$, milieu de $[AB]$, et rayon $\sqrt{13}$. Or $AB=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$: le rayon vaut bien $\dfrac{AB}{2}$.



Le cercle trouvé dans l'exemple : son centre (1, -1) est au milieu de [AB], et il passe par A et par B.

Rédiger, comme en devoir

À toi : Rédige une appartenance à un cercle

Dans un repère orthonormé, soit $E(-1,2)$, $F(3,0)$ et $P(2,3)$. Rédige la preuve que P appartient au cercle de diamètre $[EF]$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Utilise la caractérisation par $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=0$.
Indice 2
Calcule $\overrightarrow{PE}(-3,-1)$ et $\overrightarrow{PF}(1,-3)$.
Indice 3
Point délicat : vérifie que $E\neq F$, et nomme la propriété qui conclut.

Réponse
« Les points E et F sont distincts. On a $\overrightarrow{PE}(-3,-1)$ et $\overrightarrow{PF}(1,-3)$, donc

$$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=-3+3=0.$$

D'après la caractérisation du cercle de diamètre $[EF]$, le point P appartient à ce cercle. »

Remarque : Coin devoir : « montrer qu'un point est sur un cercle »

En devoir surveillé, la question « Montrer que le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$ » admet deux rédactions.

- La première calcule $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ et trouve 0.
- La seconde calcule le milieu Ω de $[AB]$, puis compare ΩC et $\dfrac{AB}{2}$.

Dans les deux cas, annonce le repère orthonormé, écris les coordonnées des vecteurs et nomme la propriété qui conclut. Un croquis sur papier permet de contrôler la vraisemblance du résultat.

Représentation paramétrique d'un cercle

Un point qui tourne

Devine : Où va le point ?

Dans un repère orthonormé, le point M a pour coordonnées $(2+3\cos\theta, -1+3\sin\theta)$. D'après toi, que décrit M quand θ décrit $\mathbb{R}$?

A. Une droite.

Faux.
Pour $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$ et π, les points $(5,-1)$, $(2,2)$ et $(-1,-1)$ ne sont pas alignés.

B. Le cercle de centre $(2,-1)$ et de rayon 3.

Juste.
Juste : $\Omega M^2 = 9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta = 9$.

C. Le cercle de centre $(-2,1)$ et de rayon 3.

Faux.
Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le point $(2,2)$ est à la distance $\sqrt{17}$ de $(-2,1)$, et non 3.

D. Le cercle de centre $(2,-1)$ et de rayon 9.

Faux.
C'est le carré de la distance qui vaut 9 : le rayon est 3.

Correction
Soit $\Omega(2,-1)$. Alors $\overrightarrow{\Omega M}(3\cos\theta, 3\sin\theta)$ et, par la relation fondamentale :

$$\Omega M^2 = 9\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 9.$$

Donc M est sur le cercle de centre Ω et de rayon 3. Le théorème qui suit montre que M parcourt **tout** ce cercle.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans un sens, la relation fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ suffit.

Dans l'autre, on ramène un point du cercle sur le cercle trigonométrique, en retranchant le centre et en divisant par r. Ce point a une abscisse curviligne : elle fournit θ.

Représentation paramétrique

Théorème : Représentation paramétrique d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $r>0$. Un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel θ tel que

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

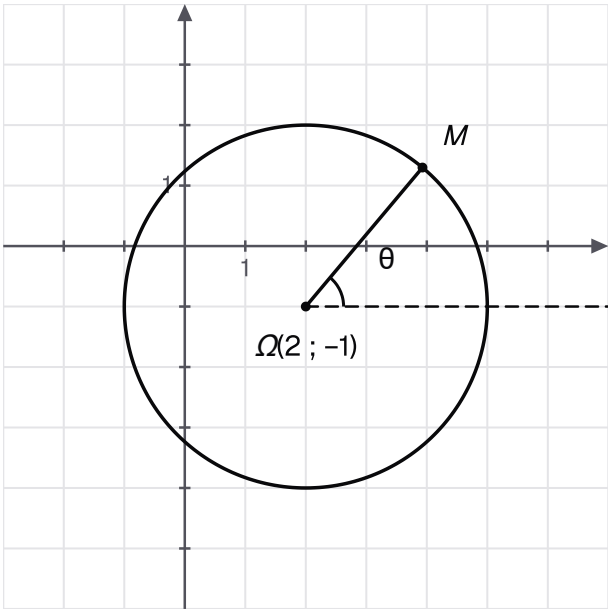
Ce système, où θ décrit $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** de $\mathcal{C}$.

Démonstration

Étape 1. Si $x = a + r\cos\theta$ et $y = b + r\sin\theta$, alors $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2$ par la relation fondamentale : $M \in \mathcal{C}$ (F11).

Étape 2. Réciproquement, soit $M \in \mathcal{C}$ et P le point de coordonnées $\left(\dfrac{x-a}{r}, \dfrac{y-b}{r}\right)$. Par F11, $OP^2 = \dfrac{(x-a)^2+(y-b)^2}{r^2} = 1$: P appartient au cercle trigonométrique.

Étape 3. Le point P a une abscisse curviligne θ, et par définition du cosinus et du sinus, $P(\cos\theta, \sin\theta)$. Donc $x = a + r\cos\theta$ et $y = b + r\sin\theta$.



Le cercle de l'activité, centré en (2, -1) et de rayon 3 : son point M est repéré par l'angle θ, compté depuis la direction de l'axe des abscisses.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On se ramène au cercle trigonométrique : le point de coordonnées $\left(\dfrac{x-a}{r}, \dfrac{y-b}{r}\right)$ y appartient.

Son abscisse curviligne fournit le paramètre θ, défini à 2π près. L'hypothèse $r>0$ autorise cette division.

Vérifie : Diviser par le rayon

Dans la preuve de la réciproque, pourquoi forme-t-on le point P en divisant par r ?

A. Pour supprimer le centre Ω.

Faux.

C'est la soustraction de a et de b qui ramène le centre en O, pas la division.

B. Parce que le rayon r peut être nul.

Faux.

L'énoncé suppose $r > 0$: c'est ce qui autorise la division.

C. Pour obtenir un point du cercle trigonométrique.

Juste.

Juste : $OP^2 = 1$, et ce point a une abscisse curviligne θ.

D. Pour que θ soit dans $]-\pi, \pi]$.

Faux.

La division ne choisit aucune mesure : θ est défini à 2π près.

Correction

À l'étape 2, le point $P\left(\dfrac{x-a}{r}, \dfrac{y-b}{r}\right)$ vérifie

$$OP^2 = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{r^2} = 1.$$

Il est donc sur le cercle trigonométrique.

À l'étape 3, son abscisse curviligne θ donne $P(\cos\theta, \sin\theta)$, d'où $x = a + r\cos\theta$ et $y = b + r\sin\theta$.

D'une écriture à l'autre

Méthode : passer d'une écriture du cercle à l'autre

1. **De l'équation au paramétrage** : repérer le centre $\Omega(a, b)$ et le rayon r ; le cercle est décrit par $x = a + r\cos\theta$ et $y = b + r\sin\theta$, où θ parcourt $\mathbb{R}$.
2. **Du paramétrage à l'équation** : exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de x et de y, puis appliquer la relation fondamentale.
3. **Contrôler** que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont multipliés par le même nombre strictement positif.

Rédaction attendue. « D'après la représentation paramétrique d'un cercle, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. »

Exemple : du paramétrage à l'équation

Énoncé. Dans un repère orthonormé, Γ est l'ensemble des points $M(-1+2\cos\theta, 4+2\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Détermine une équation cartésienne de Γ.

Isoler. Pour un point $M(x,y)$ de Γ et un réel θ associé : $\cos\theta = \dfrac{x+1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{y-4}{2}$.

Relation fondamentale. Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1,$$

soit $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Conclusion. D'après la représentation paramétrique d'un cercle, Γ est le cercle de centre $(-1,4)$ et de rayon 2, d'équation

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0.$$

Rédiger un paramétrage

Attention : un coefficient négatif

✗ « Le système $x = 2 - 3\cos\theta$, $y = 1 - 3\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, décrit un cercle de rayon -3. »

✓ Un rayon est strictement positif. Ici :

$$\begin{aligned}&(x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= 9\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 9.\end{aligned}$$

Le cercle a pour centre $(2,1)$ et pour rayon 3.

Comme $-\cos\theta = \cos(\theta+\pi)$ et $-\sin\theta = \sin(\theta+\pi)$, on retrouve la forme du théorème en changeant θ en $\theta+\pi$.

À toi : Rédige un paramétrage de cercle

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C}$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$. Rédige une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par reconnaître le centre et le rayon en complétant les carrés.
Indice 2
Tu dois trouver $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$.
Indice 3
Point délicat : le rayon est 2, pas 4, et θ décrit $\mathbb{R}$.

Réponse
« L'équation équivaut à $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$, avec $k = 9+1-6 = 4 > 0$: $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(3,-1)$ et de rayon 2.

D'après la représentation paramétrique d'un cercle, une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est :

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \\ y = -1 + 2\sin\theta \end{cases}$$

où θ décrit $\mathbb{R}$. »

Position relative d'une droite et d'un cercle

Trop loin, ou pas ?

Devine : Une droite loin du centre

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1,-1)$ et de rayon 2, et D la droite d'équation $y = 2$. D'après toi, combien de points communs ont D et $\mathcal{C}$?

A. Un seul.

Faux.

Un seul point commun exigerait une distance de Ω à D égale à 2 ; elle vaut 3.

B. Deux.

Faux.

Les points du cercle ont une ordonnée au plus égale à $-1+2=1$.

C. On ne peut pas savoir sans résoudre un système.

Faux.

Une comparaison de distances suffit, sans système.

D. Aucun.

Juste.

Juste : tous les points de D sont à au moins 3 de Ω.

Correction

Pour un point $M(x,2)$ de D :

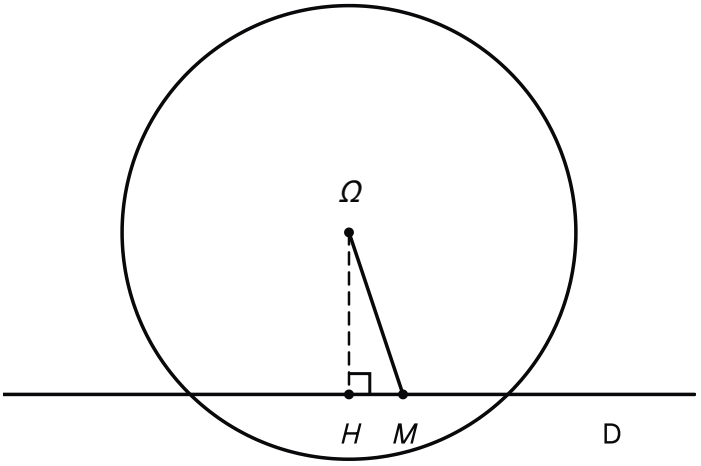
$$\Omega M^2 = (x-1)^2 + 3^2 \geq 9,$$

donc $\Omega M \geq 3 > 2$. Aucun point de D n'est sur $\mathcal{C}$.

Le nombre clé est la distance du centre à la droite, ici 3, comparée au rayon 2.

Pourquoi est-ce vrai ? Soit H le projeté orthogonal de Ω sur D. Pour un point M de D, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux, donc $\Omega M^2 = d^2 + HM^2$.

Le point M est sur le cercle exactement quand $HM^2 = r^2 - d^2$: tout dépend du signe de $r^2 - d^2$.



Le pied H de la perpendiculaire menée de Ω et un point M de D forment avec Ω un triangle rectangle en H, d'où ΩM² = d² + HM².

Comparer la distance et le rayon

Théorème : Position relative d'une droite et d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, D une droite, et $d = d(\Omega, D)$.

- Si $d > r$, D et $\mathcal{C}$ n'ont aucun point commun.
- Si $d = r$, D et $\mathcal{C}$ ont un seul point commun : le projeté orthogonal H de Ω sur D.
- Si $d < r$, D et $\mathcal{C}$ ont exactement deux points communs.

Démonstration

Étape 1. Soit H le projeté orthogonal de Ω sur D : $\Omega H = d$ (F10), et $\overrightarrow{\Omega H}$ est nul ou orthogonal à la direction de D. Pour tout $M \in D$, $\overrightarrow{HM}$ dirige D ou est nul, donc $\overrightarrow{\Omega H} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$ (F03). Par la relation de Chasles vectorielle et F03, $\Omega M^2 = \|\overrightarrow{\Omega H} + \overrightarrow{HM}\|^2 = d^2 + HM^2$.

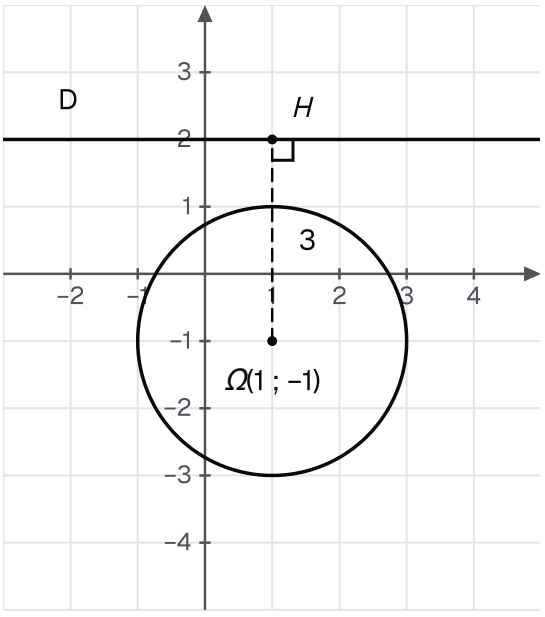
Étape 2. Donc $M \in D$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $HM^2 = r^2 - d^2$. Si $d > r$, c'est impossible. Si $d = r$, c'est $HM = 0$, soit $M = H$.

Étape 3. Si $d < r$, soit $s = \sqrt{r^2 - d^2} > 0$ et $\vec{e}$ un vecteur directeur de D de norme 1. Un point M appartient à D si et seulement si $\overrightarrow{HM}$ est colinéaire à $\vec{e}$, c'est-à-dire s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{HM} = t\vec{e}$; alors $HM = |t|$. La condition $|t| = s$ donne exactement $t = s$ ou $t = -s$: deux points distincts.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le théorème de Pythagore, écrit avec le produit scalaire, ramène tout à $HM^2 = r^2 - d^2$ sur la droite.

Selon le signe de $r^2 - d^2$, il y a zéro, un ou deux points communs. Dans le dernier cas, les deux points sont à la distance $\sqrt{r^2 - d^2}$ de H, de part et d'autre.



Le cercle et la droite de l'activité « Une droite loin du centre » : la distance de Ω à D vaut 3, plus que le rayon 2.

Vérifie : Distance et rayon égaux

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$, et $D : x + 2y - 9 = 0$. Combien de points communs ont D et $\mathcal{C}$?

A. Un seul.

Juste.

Juste : $d(\Omega, D) = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = r$.

B. Deux.

Faux.

Il faudrait $d < r$; ici $d = \sqrt{5}$, égal au rayon.

C. Aucun.

Faux.

Il faudrait $d > r$; ici d et r sont égaux.

D. On ne peut pas conclure sans le système.

Faux.

La comparaison de d et de r suffit pour compter les points communs.

Correction

Par la formule donnant la distance d'un point à une droite :

$$d(\Omega, D) = \frac{|2 + 2 - 9|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Donc $d = r$: d'après le théorème de position relative, D et $\mathcal{C}$ ont un seul point commun.

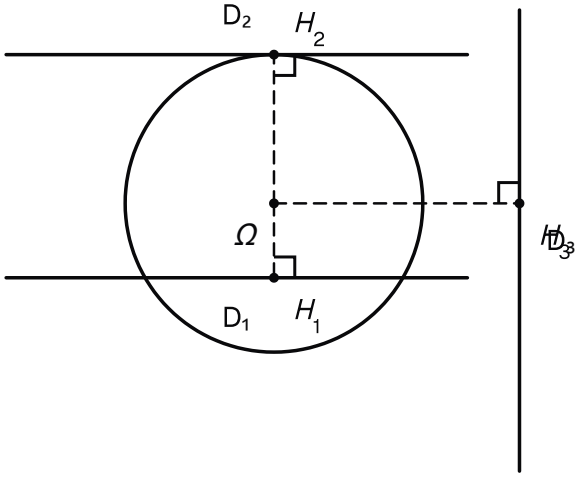
On verra dans la section suivante que D est alors la tangente au cercle en ce point.

Deux points communs

Méthode : position relative et points communs

1. **Lire** le centre Ω et le rayon r ; écrire la droite sous la forme $ax + by + c = 0$.
2. **Comparer** $d(\Omega, D)$ et r : la position relative en découle.
3. **Résoudre** le système des deux équations : tirer une coordonnée de l'équation de la droite, la reporter dans celle du cercle, puis résoudre l'équation du second degré qui en résulte.

Rédaction attendue. « On a $d(\Omega, D) = \cdots < r$, donc D et $\mathcal{C}$ ont deux points communs. Le système donne . . . : ce sont les points . . . et . . .. »



Un cercle centré en Ω, de rayon r, et trois droites : D_1, plus proche de Ω que r, le coupe ; D_2, à la distance r, le touche ; D_3, plus loin, l'évite.

Exemple : deux points communs

Énoncé. Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ et $D : 2x + y - 14 = 0$. Étudie leur position relative et leurs points communs.

Cercle. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$: centre $\Omega(1, 2)$, rayon 5.

Distance. Par la formule donnant la distance d'un point à une droite :

$$d(\Omega, D) = \frac{|2 + 2 - 14|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

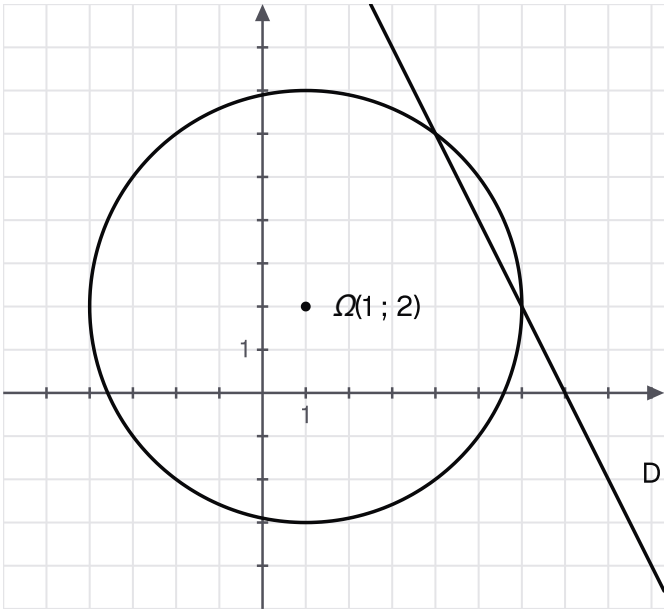
Comme $2\sqrt{5} < 5$, le théorème de position relative donne deux points communs.

Système. L'équation de D donne $y = 14 - 2x$. En reportant dans celle de $\mathcal{C}$, on obtient $(x-1)^2 + (12 - 2x)^2 = 25$, soit, après développement et division par 5 :

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Le discriminant vaut 4, d'où $x = 4$ ou $x = 6$.

Conclusion. Avec $y = 14 - 2x$, les points communs sont $(4, 6)$ et $(6, 2)$.



Le cercle centré en Ω(1, 2), de rayon 5 est coupé par la droite D en deux points, (4, 6) et (6, 2).

Aucun point, un point

Exemple **: aucun point commun**

Énoncé. Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, 3)$ et de rayon 2, et $D : 3x - 4y + 3 = 0$.

Distance. Par la formule donnant la distance d'un point à une droite :

$$d(\Omega, D) = \frac{|-6 - 12 + 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Conclusion. Comme $3 > 2$, la droite et le cercle n'ont aucun point commun, d'après le théorème de position relative.

Le système formé par leurs équations n'a donc aucune solution : son équation du second degré a un discriminant strictement négatif.

Exemple **: un cercle tangent à une droite**

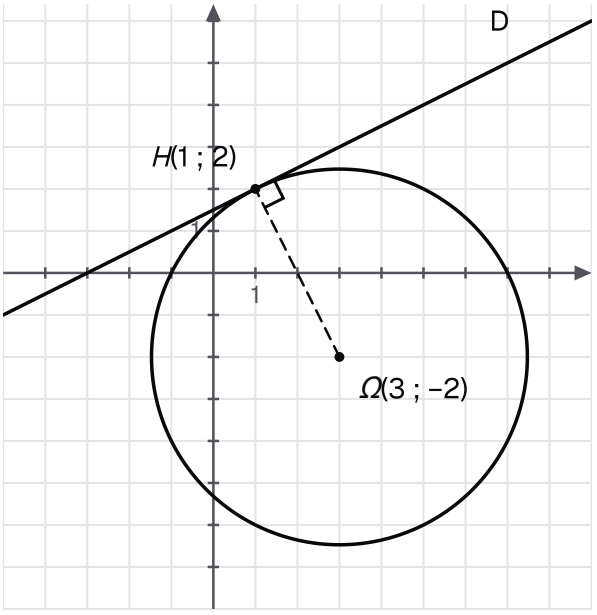
Énoncé. Dans un repère orthonormé, détermine le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(3, -2)$ tangent à $D : x - 2y + 3 = 0$.

Rayon. $\mathcal{C}$ est tangent à D si et seulement si son rayon vaut

$$r = d(\Omega, D) = \frac{|3 + 4 + 3|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

D'où $\mathcal{C} : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 20$.

Point de contact. C'est le projeté de Ω sur D : $H(1, 2)$. En effet, $1 - 4 + 3 = 0$, $\overrightarrow{\Omega H}(-2, 4)$ est colinéaire à $\vec{n}(1, -2)$, et $\Omega H^2 = 4 + 16 = 20$.



Le cercle de centre Ω(3, -2) touche la droite D en un seul point, H(1, 2), pied de la perpendiculaire à D menée de Ω.

Rédiger une position relative

Vérifie : Un discriminant nul

En résolvant le système formé par une droite D et un cercle $\mathcal{C}$, tu obtiens une équation du second degré de discriminant nul. Que peux-tu conclure ?

A. On ne peut rien conclure sans calculer le rayon.

Faux.
Le système dit déjà combien il y a de points communs.

B. La droite D et le cercle $\mathcal{C}$ ont un seul point commun.

Juste.
Juste : une seule solution, donc un seul point commun.

C. Il y a deux points communs, confondus.

Faux.
Une racine double donne une seule valeur de la coordonnée, donc un seul point de la droite.

D. Il n'y a aucun point commun.

Faux.
Un discriminant nul donne une solution ; c'est un discriminant strictement négatif qui n'en donne aucune.

Correction
L'équation du second degré a une seule solution. La coordonnée correspondante, reportée dans l'équation de la droite, donne un seul point commun.

D'après le théorème de position relative, c'est le cas $d = r$.

À toi : Rédige une position relative

Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 10$ et $D : x + y - 2 = 0$. Rédige l'étude de leur position relative, puis le calcul de leurs points communs. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le cercle a pour centre O et pour rayon $\sqrt{10}$; calcule $d(O, D)$.
Indice 2
Remplace y par $2 - x$ dans l'équation du cercle.
Indice 3
Point délicat : résous l'équation du second degré jusqu'au bout et donne les deux points.

Réponse
« Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre O et pour rayon $\sqrt{10}$. Par la formule donnant la distance d'un point à une droite :

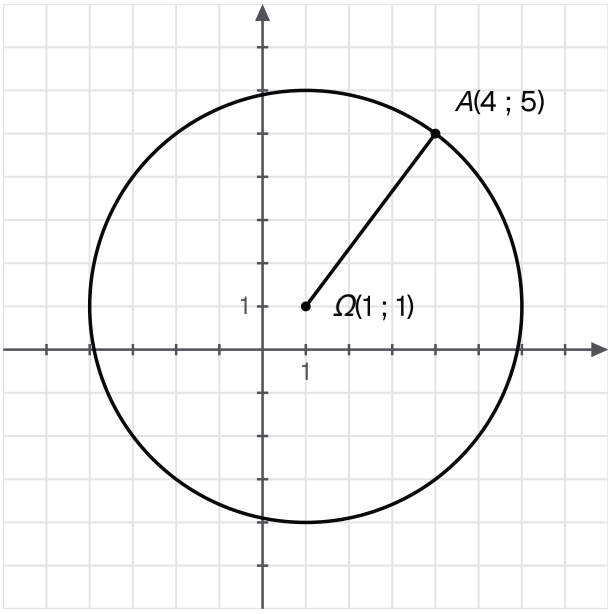
$$d(O, D) = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

> Comme $\sqrt{2} < \sqrt{10}$, le théorème de position relative donne deux points communs.
>
> Avec $y = 2 - x$, on obtient $x^2 + (2-x)^2 = 10$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$. Le discriminant vaut 16, d'où $x = 3$ ou $x = -1$. Les points communs sont $(3, -1)$ et $(-1, 3)$. »

Tangente à un cercle en un point

Toucher sans couper

> **Devine : La direction de la tangente**
>
> Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1, 1)$ et de rayon 5 ; le point $A(4, 5)$ est sur $\mathcal{C}$. D'après toi, à quelle droite la tangente à $\mathcal{C}$ en A est-elle perpendiculaire ?
>
> **A.** À la droite (OA).
>
> **Faux.**
> L'origine O ne joue aucun rôle : seul compte le centre Ω.
>
> **B.** À aucune : elle est parallèle à (ΩA).
>
> **Faux.**
> La parallèle à (ΩA) passant par A est (ΩA) elle-même : elle coupe le cercle en deux points.
>
> **C.** À la droite (ΩA).
>
> **Juste.**
> Juste : la tangente est perpendiculaire au rayon $[\Omega A]$.
>
> **D.** À l'axe des abscisses.
>
> **Faux.**
> Ce serait le cas seulement si A et Ω avaient la même ordonnée.
>
> **Correction**
> Au collège, tu as vu que la tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon en ce point.
>
> Ici, $\overrightarrow{\Omega A}(3, 4)$ dirige le rayon $[\Omega A]$: la tangente en A est perpendiculaire à (ΩA). La définition qui suit fait de ce fait son point de départ.



Les données de l'activité : le cercle centré en Ω(1, 1), de rayon 5, le point A(4, 5) qui lui appartient, et le rayon [ΩA].

Définition : Tangente à un cercle en un point

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$, et A un point de $\mathcal{C}$; le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ est non nul, car $\Omega A = r$. La **tangente** à $\mathcal{C}$ en A est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.

Vérifie : Le bon vecteur normal

Dans le même repère orthonormé, avec le même cercle de centre $\Omega(1, 1)$ et de rayon 5, le point $B(-2, 5)$ est sur $\mathcal{C}$. D'après la définition, quel vecteur est normal à la tangente à $\mathcal{C}$ en B ?

A. $\vec{w}(4, 3)$

Faux.

Ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega B}$: il dirige la tangente.

B. $\vec{p}(-2, 5)$

Faux.

Ce sont les coordonnées de B, pas celles de $\overrightarrow{\Omega B}$.

C. $\vec{s}(-1, 6)$

Faux.

Tu as ajouté les coordonnées au lieu de les soustraire.

D. $\overrightarrow{\Omega B}(-3, 4)$

Juste.

Juste : $\overrightarrow{\Omega B}(-2 - 1, 5 - 1)$.

Correction

On vérifie $\Omega B^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$: le point B est sur $\mathcal{C}$.

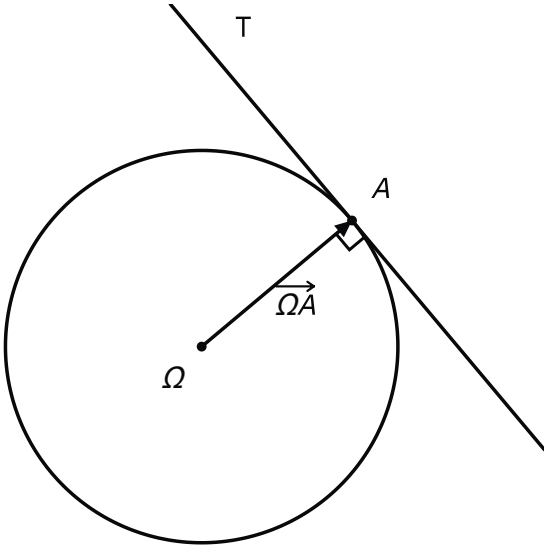
Par définition, la tangente en B a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega B}(-3, 4)$.

Le vecteur $\vec{w}(4, 3)$ vérifie $-3 \times 4 + 4 \times 3 = 0$: il est directeur, pas normal.

Équation de la tangente

Pourquoi est-ce vrai ? Par définition, $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à la tangente : son équation vient d'un produit scalaire nul.

De plus, A est le pied de la perpendiculaire à la tangente issue de Ω. La distance du centre à la tangente vaut donc $\Omega A = r$, et la position relative donne un seul point commun.



La tangente T en A admet le vecteur ΩA pour vecteur normal : elle coupe le rayon [ΩA] à angle droit et ne touche le cercle qu'en A.

Propriété : Équation de la tangente en un point

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$, et $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathcal{C}$. La tangente T à $\mathcal{C}$ en A a pour équation

$$(x_A - a)(x - x_A) + (y_A - b)(y - y_A) = 0,$$

et A est le seul point commun à T et à $\mathcal{C}$. Réciproquement, toute droite D telle que $d(\Omega, D) = r$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au projeté orthogonal de Ω sur D ; on dit que D est **tangente** à $\mathcal{C}$.

Démonstration

Étape 1. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}(x_A - a, y_A - b)$ est non nul, car $\Omega A = r$. Par F16 et F08, $M(x, y) \in T$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$, ce qui donne l'équation annoncée par F02.

Étape 2. $A \in T$ et $\overrightarrow{\Omega A}$ est orthogonal à la direction de T : par unicité du projeté orthogonal, A est le projeté de Ω sur T. Donc $d(\Omega, T) = \Omega A = r$ (F10) et, par F15, A est le seul point commun.

Étape 3. Réciproquement, soit H le projeté de Ω sur D. Alors $\Omega H = r$ (F10) : $H \in \mathcal{C}$ et $\overrightarrow{\Omega H} \neq \vec{0}$. Ce vecteur est orthogonal à la direction de D, donc normal à D (F07). Par F08, D est la droite passant par H de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega H}$: c'est la tangente en H (F16).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'équation vient de la définition : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$.

Le seul point commun vient de la position relative : A est le projeté orthogonal de Ω sur T, donc $d(\Omega, T) = r$.

La propriété « un seul point commun » est démontrée, jamais prise pour définition.

Vérifie : Une tangente à écrire

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$, et $A(3, 2)$ est un point de $\mathcal{C}$. Quelle est une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A ?

A. $x + 3y - 9 = 0$

Juste.
Juste : $\overrightarrow{\Omega A}(1, 3)$ est normal, et $3 + 6 - 9 = 0$.

B. $3x - y - 7 = 0$

Faux.
Tu as pris $\overrightarrow{\Omega A}$ comme vecteur directeur : cette droite est le rayon prolongé.

C. $x + 3y + 1 = 0$

Faux.
Cette droite passe par le centre $\Omega(2, -1)$, pas par A.

D. $3x + 2y - 13 = 0$

Faux.
Tu as pris les coordonnées de A comme vecteur normal, au lieu de $\overrightarrow{\Omega A}$.

Correction
On vérifie d'abord $A \in \mathcal{C}$: $(3-2)^2 + (2+1)^2 = 1 + 9 = 10$.

Le centre est $\Omega(2, -1)$, donc $\overrightarrow{\Omega A}(1, 3)$ est normal à la tangente T. Ainsi $M(x, y) \in T$ si et seulement si $(x-3) + 3(y-2) = 0$, soit :

$$x + 3y - 9 = 0.$$

La méthode et un exemple

Méthode : la tangente à un cercle en un point

1. **Vérifier** que le point A est sur le cercle : sinon, aucune tangente en A n'est définie.
2. **Calculer** $\overrightarrow{\Omega A}$: c'est un vecteur normal à la tangente.
3. **Traduire** $M \in T$ par $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$, développer, puis vérifier sur A.

Rédaction attendue. « On a $A \in \mathcal{C}$ car … D'après la définition de la tangente, $\overrightarrow{\Omega A}(\dots)$ est normal à T, donc T : … . »

Exemple : une tangente, puis un contrôle

Énoncé. Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ et $A(1, 7)$. Détermine la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.

Cercle. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$: centre $\Omega(-2, 3)$, rayon 5. Et $A \in \mathcal{C}$, car $1 + 49 + 4 - 42 - 12 = 0$.

Équation. D'après la définition de la tangente, $\overrightarrow{\Omega A}(3, 4)$ est normal à T : $3(x-1) + 4(y-7) = 0$, soit

$$T : 3x + 4y - 31 = 0.$$

Contrôle. Par la formule donnant la distance d'un point à une droite :

$$d(\Omega, T) = \frac{|-6 + 12 - 31|}{5} = 5 = r.$$

La tangente est bien à la distance r du centre.

Rédiger, comme en devoir

Attention : le rayon est normal, pas directeur

✗ « La tangente en $A(2, 1)$ au cercle $x^2 + y^2 = 5$ est dirigée par $\overrightarrow{OA}(2, 1)$: elle a pour équation $x - 2y = 0$. »

✓ Dans un repère orthonormé, le centre est O, et $\overrightarrow{OA}(2, 1)$ est **normal** à la tangente. Celle-ci a pour équation $2(x-2) + (y-1) = 0$, soit $2x + y - 5 = 0$.

La droite $x - 2y = 0$ est le rayon prolongé : elle passe par O et coupe le cercle en deux points.

À toi : Rédige une équation de tangente

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(0, -1)$ et de rayon $\sqrt{13}$. Rédige la preuve que $B(3, 1)$ appartient à $\mathcal{C}$, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en B. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule ΩB^2 et compare-le à 13.
Indice 2
Le vecteur $\overrightarrow{\Omega B}$ est normal à la tangente.
Indice 3
Point délicat : écris $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{\Omega B} = 0$, avec B et non Ω.

Réponse
« On a $\Omega B^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, donc $\Omega B = \sqrt{13}$ et $B \in \mathcal{C}$.

D'après la définition de la tangente, $\overrightarrow{\Omega B}(3, 2)$ est normal à la tangente T en B. Donc $M(x, y) \in T$ si et seulement si $3(x - 3) + 2(y - 1) = 0$, soit :

$$T : 3x + 2y - 11 = 0.$$

Vérification : $9 + 2 - 11 = 0$. »

Remarque : Coin devoir : « tangente et points communs »

En devoir surveillé, un problème de cercle enchaîne des questions : « Déterminer le centre et le rayon », « Vérifier que A appartient à $\mathcal{C}$ », « Écrire une équation de la tangente en A », « Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D ».

Chaque réponse sert la suivante : cite-la au lieu de la refaire.

Pour une position relative, compare d et r, nomme le théorème, puis résous le système jusqu'aux coordonnées des points.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

- Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$ donnent le cosinus **et** le sinus d'un angle orienté.
- Cauchy-Schwarz : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$, avec égalité pour des vecteurs colinéaires.
- La droite $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a, b)$, et $d(M_0, D) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Devant $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$: compléter les carrés, puis conclure selon le signe de $k = a^2 + b^2 - c$.
- Une droite et un cercle : comparer $d(\Omega, D)$ et r, puis résoudre le système.
- La tangente en A a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.

Le mot du prof. Tu sais maintenant transformer une question de géométrie en calcul sur des coordonnées : angles, distances, droites, cercles. Surtout, tu sais **démontrer** chaque formule que tu emploies. La rotation, puis le produit scalaire dans l'espace, réutiliseront ces outils.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Analytique du produit scalaire et applications » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)