BURHAN

# Vecteurs de l'espace : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

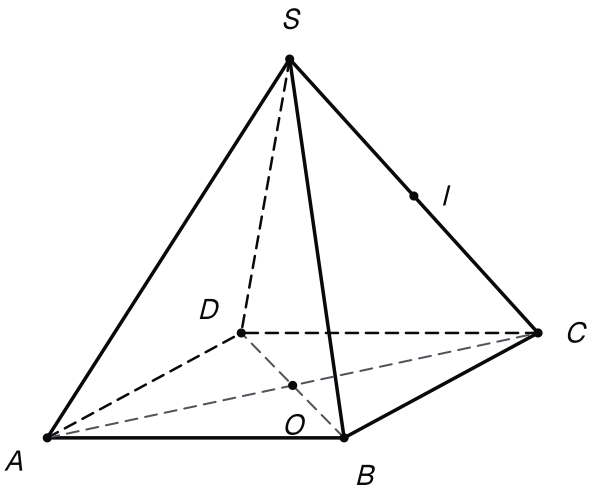
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Vecteurs de l'espace | Niveau examen | 5 |

**Exercice 1** 5 pts

## Une pyramide à base parallélogramme

$SABCD$ est une pyramide de sommet $S$. Sa base $ABCD$ est un parallélogramme de centre $O$ : le point $O$ est le milieu commun de $[AC]$ et de $[BD]$. Le sommet $S$ n'appartient pas au plan de la base. On note $I$ le milieu de l'arête $[SC]$. Trace la figure sur ton cahier.




**La pyramide SABCD, le centre O de sa base parallélogramme et le milieu I de l'arête [SC].**

**1.** 0,75 pts

Utiliser la règle du parallélogramme pour exprimer $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis exprimer $\overrightarrow{AO}$.

INDICE

**Début :** dans le parallélogramme $ABCD$, quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AD}$ ?

**Outil :** la règle du parallélogramme, puis $O$ milieu de $[AC]$.

**2.** 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$.

INDICE

**Outil :** la propriété du milieu du segment $[SC]$, avec le point $A$.

**Ensuite :** remplace $\overrightarrow{AC}$ grâce à la question 1.

**3.** 1 pts

En déduire que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}$. Que peut-on dire des droites $(OI)$ et $(SA)$ ?

INDICE

**Outil :** $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI}$, puis les questions 1 et 2.

**4. a)** 0,5 pts

Exprimer $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BI}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$. Vérifier que $\overrightarrow{AS} = 2\,\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BD}$.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$, avec la question 2.

**4. b)** 0,75 pts

En déduire que la droite $(SA)$ est parallèle au plan $(BDI)$.

INDICE

**Début :** si $B$, $D$, $I$ étaient alignés, $I$ serait sur la droite $(BD)$, donc dans le plan de la base ; or $I$ est le milieu de $[SC]$ et $S$ n'est pas dans ce plan.

**Outil :** la propriété de la droite parallèle à un plan.

**5.** 1 pts

Le point $K$ est défini par $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{OI}$. Exprimer $\overrightarrow{AK}$, puis $\overrightarrow{KI}$, à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$. En déduire que les droites $(KI)$ et $(BD)$ sont parallèles.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$, avec la question 3.

**Ensuite :** $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AK}$.

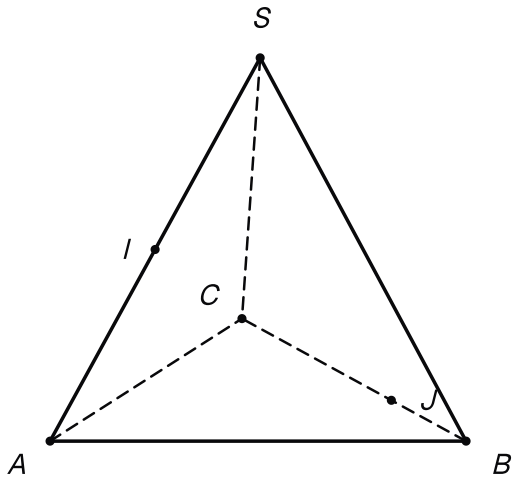
## Exercice 2 — 5 pts

### Alignement et identification dans un tétraèdre

$SABC$ est un tétraèdre. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$. On note $I$ le milieu de $[SA]$ ; les points $J$ et $K$ sont définis par :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{4}\,\vec{u} + \frac{1}{3}\,\vec{v} + \frac{1}{6}\,\vec{w}.$$

Trace la figure sur ton cahier.




**Le tétraèdre SABC, I au milieu de [SA] et J sur [BC], au tiers de l'arête en partant de B.**

### 1. — 0,5 pts

Justifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

**Outil :** la définition des vecteurs coplanaires, avec $S$ comme origine.

### 2. — 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{SJ}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BJ}$, puis $\overrightarrow{BC} = \vec{w} - \vec{v}$.

**3.** 1 pts

En déduire $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, puis justifier que $I$, $J$, $K$ sont alignés.

INDICE

**Outil :** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SI}$.

**Ensuite :** cherche un réel $k$ tel que $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{IK}$.

**4.** 1,25 pts

Le point $L$ est défini par :

$$\overrightarrow{SL} = -\frac{1}{4}\,\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\,\vec{w}.$$

Exprimer $\overrightarrow{IL}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, puis justifier que $L$ appartient à la droite $(IJ)$.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{SL} - \overrightarrow{SI}$.

**Ensuite :** cherche un réel $t$ tel que $\overrightarrow{IL} = t\,\overrightarrow{IJ}$, en comparant les coefficients de $\vec{v}$.

**5.** 1,25 pts

La droite $(IJ)$ est-elle parallèle au plan $(ABC)$ ?

INDICE

**Début :** raisonne par l'absurde en supposant $\overrightarrow{IJ} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

**Aide :** d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{w} - \vec{u}$ ; remplace, puis identifie les coefficients.

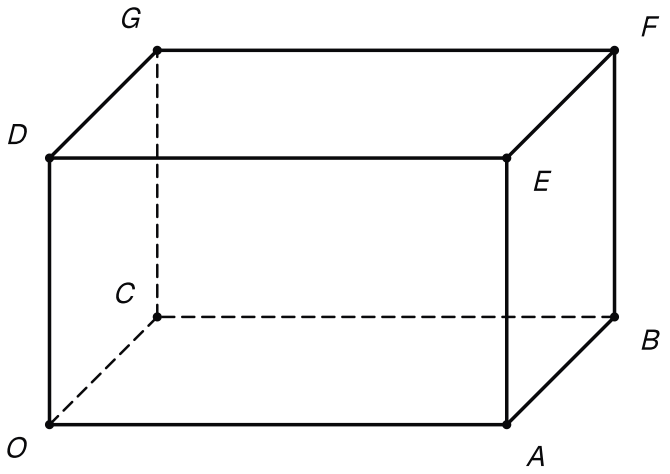
## Exercice 3 — 5 pts

### Une diagonale de pavé et deux centres de gravité

$OABCDEFG$ est un pavé droit. Les faces $OABC$ et $DEFG$ sont opposées, et les arêtes $[OD]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ joignent leurs sommets. Comme toutes les faces sont des rectangles, on dispose des égalités :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG},$$
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}.$$

Trace la figure sur ton cahier.




**Le pavé droit OABCDEFG de l'examen, avec la face OABC en bas et la face DEFG en haut.**

**1.** — 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{OB}$, puis $\overrightarrow{OF}$, à l'aide de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

INDICE

**Outil :** la relation de Chasles, avec les chemins $O$, $C$, $B$ puis $O$, $B$, $F$.

**2.** — 1 pts

On note $H$ le centre de gravité du triangle $ACD$, c'est-à-dire le point tel que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$. Justifier que :

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

INDICE

**Outil :** la relation de Chasles, en passant par $H$ dans $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

**3.** 0,75 pts

En déduire que les points $O$, $H$, $F$ sont alignés, et préciser la position de $H$ sur le segment $[OF]$.

INDICE

**Outil :** compare les questions 1 et 2, puis la définition vectorielle d'une droite.

**4. a)** 0,75 pts

Exprimer $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$.

**Ensuite :** écris $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

**4. b)** 0,5 pts

En déduire que les plans $(BEG)$ et $(ACD)$ sont parallèles.

INDICE

**Début :** les points $A$, $C$, $D$ ne sont pas alignés. Si l'on avait $\overrightarrow{BE} = k\,\overrightarrow{BG}$, écris $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AD}$ pour obtenir une contradiction.

**Outil :** la propriété des plans parallèles.

**5.** 1 pts

On note $L$ le centre de gravité du triangle $BEG$. Comme à la question 2, on a :

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}\right).$$

Exprimer $\overrightarrow{OL}$ à l'aide de $\overrightarrow{OF}$. Que peut-on dire des points $H$ et $L$ sur le segment $[OF]$ ?

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG}$.

**Ensuite :** compare avec la question 3.

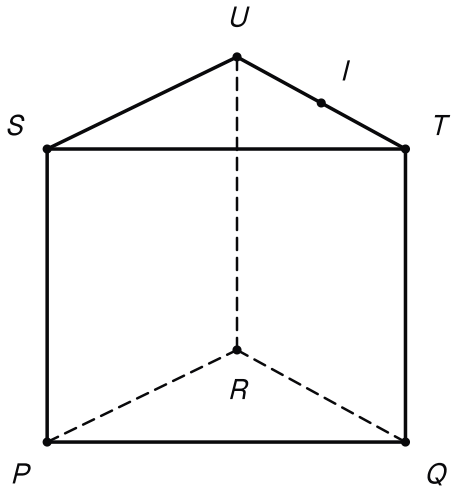
## Exercice 4 — 5 pts

### Une droite et un plan dans un prisme

$PQRSTU$ est un prisme. Ses bases sont les triangles $PQR$ et $STU$, situés dans deux plans parallèles distincts, et ses arêtes latérales sont $[PS]$, $[QT]$, $[RU]$. Les faces latérales $PQTS$, $QRUT$, $PRUS$ sont des parallélogrammes, donc

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RU}.$$

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{PS}$. On note $I$ le milieu de l'arête $[TU]$. Trace la figure sur ton cahier.




**Le prisme PQRSTU : la base PQR en bas, la base STU en haut, et I au milieu de l'arête [TU].**

#### 1. — 0,75 pts

Le point $S$ appartient-il au plan $(PQR)$ ? En déduire que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires. Exprimer ensuite $\overrightarrow{PT}$ et $\overrightarrow{PU}$ à l'aide de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

INDICE

**Début :** les deux bases sont dans des plans parallèles distincts, qui n'ont aucun point commun.

**Outil :** la relation de Chasles, avec les chemins $P, Q, T$ puis $P, R, U$.

#### 2. — 0,75 pts

Exprimer $\overrightarrow{PI}$ à l'aide de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

INDICE

**Outil :** la propriété du milieu de $[TU]$ : pour tout point $M$, $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MU} = 2\,\overrightarrow{MI}$ ; choisis $M = P$.

**Ensuite :** utilise la question 1.

**3.** 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{QS}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Justifier que les points $Q$, $R$, $S$ ne sont pas alignés.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$.

**Aide :** raisonne par l'absurde : si l'on avait $\overrightarrow{QS} = k\,\overrightarrow{QR}$, écris cette égalité sur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et compare les coefficients de $\vec{w}$.

**4.** 1,25 pts

On note $K$ le milieu du segment $[PI]$. Exprimer $\overrightarrow{PK}$, puis $\overrightarrow{QK}$, à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. En déduire que $K$ appartient au plan $(QRS)$.

INDICE

**Début :** $\overrightarrow{PK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PK}$.

**Ensuite :** calcule $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{QR} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QS}$ avec la question 3, puis compare.

**5.** 1,25 pts

Soit $t$ un réel et $L$ le point défini par $\overrightarrow{PL} = t\,\overrightarrow{PI}$ : lorsque $t$ varie, le point $L$ décrit la droite $(PI)$. On suppose que $L$ appartient au plan $(QRS)$.

Déterminer $t$. Que peut-on en conclure pour la droite $(PI)$ et le plan $(QRS)$ ?

INDICE

**Début :** avec la question 2, $\overrightarrow{QL} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PL} = \left(\dfrac{t}{2} - 1\right)\vec{u} + \dfrac{t}{2}\,\vec{v} + t\,\vec{w}$.

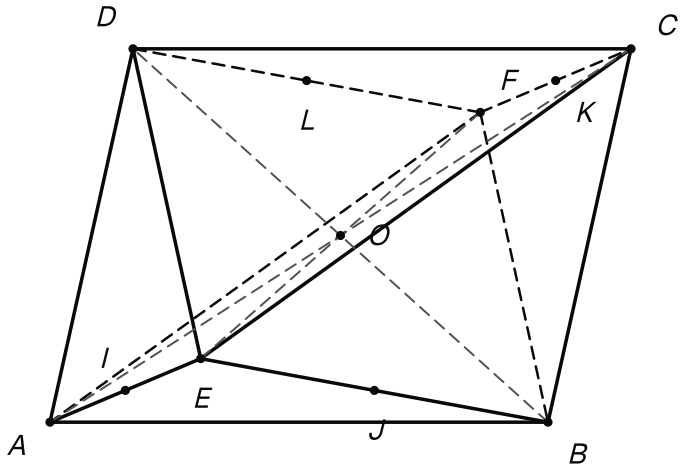
**Aide :** écris $\overrightarrow{QL} = x\,\overrightarrow{QR} + y\,\overrightarrow{QS}$ sur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, puis identifie les coefficients : tu obtiens trois équations d'inconnues $x$, $y$, $t$.

## Exercice 5 — 5 pts

### Deux pyramides de même base

$ABCD$ est un parallélogramme de centre $O$ : le point $O$ est le milieu commun de $[AC]$ et de $[BD]$. Le point $E$ n'appartient pas au plan $(ABD)$ de ce parallélogramme, et le point $F$ est le symétrique de $E$ par rapport à $O$ : le point $O$ est aussi le milieu de $[EF]$. Les pyramides $EABCD$ et $FABCD$ ont ainsi la même base $ABCD$ et sont situées de part et d'autre de son plan.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ ; ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires, car $E$ n'est pas dans le plan $(ABD)$. On note $I$, $J$, $K$, $L$ les milieux respectifs des arêtes $[EA]$, $[EB]$, $[FC]$, $[FD]$. Trace la figure sur ton cahier.




**La base ABCD dressée face à nous : le sommet E est devant elle, le sommet F derrière, caché.**

#### 1. — 0,75 pts

Justifier que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ et que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$. Nommer les deux parallélogrammes obtenus.

INDICE

**Outil :** la définition de l'égalité de deux vecteurs : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ lorsque les segments $[AC]$ et $[EF]$ ont le même milieu.

**Ensuite :** suis le contour pour nommer chaque parallélogramme.

#### 2. — 0,75 pts

On rappelle que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, d'après la règle du parallélogramme dans $ABCD$. Exprimer $\overrightarrow{AF}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

**Outil :** la propriété du milieu de $[EF]$, appliquée avec le point $A$ : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AO}$.

**Ensuite :** $O$ est aussi le milieu de $[AC]$ ; utilise le rappel de l'énoncé.

**3.** 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

**Outil :** la propriété du milieu avec le point $A$, pour chacun des quatre segments ; par exemple $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AK}$.

**Ensuite :** remplace grâce à la question 2.

**4. a)** 0,75 pts

En déduire $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$, puis comparer ces deux vecteurs.

INDICE

**Outil :** $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AL}$.

**Ensuite :** compare les deux résultats.

**4. b)** 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IK}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. En déduire que les points $I$, $J$, $K$, $L$ sont coplanaires, puis préciser la nature du quadrilatère $IJKL$.

INDICE

**Début :** vérifie que $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IL}$.

**Aide :** raisonne par l'absurde : si l'on avait $\overrightarrow{IL}=k\,\overrightarrow{IJ}$, compare les coefficients de $\vec{v}$ des deux membres.

**Ensuite :** utilise l'égalité de la question 4. a).

**5.** 0,75 pts

Calculer $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}$. En déduire que $O$ est le milieu de $[IK]$, puis que $O$ appartient au plan $(IJL)$.

INDICE

**Début :** compare $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}$ avec $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AO}$.

**Outil :** si $M$ est le milieu de $[IK]$, alors $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\,\overrightarrow{AM}$ ; un seul point $M$ vérifie $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}$.