BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

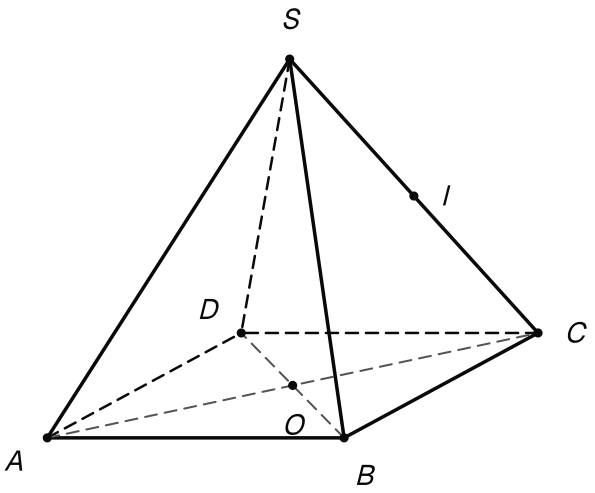
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Une pyramide à base parallélogramme

$SABCD$ est une pyramide de sommet S. Sa base $ABCD$ est un parallélogramme de centre O : le point O est le milieu commun de $[AC]$ et de $[BD]$. Le sommet S n'appartient pas au plan de la base. On note I le milieu de l'arête $[SC]$. Trace la figure sur ton cahier.



La pyramide SABCD, le centre O de sa base parallélogramme et le milieu I de l'arête [SC].

1. — 0,75 pts

Utiliser la règle du parallélogramme pour exprimer $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis exprimer $\overrightarrow{AO}$.

INDICE

Début : dans le parallélogramme $ABCD$, quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AD}$?

Outil : la règle du parallélogramme, puis O milieu de $[AC]$.

CORRIGÉ

Une égalité de la base. Les diagonales $[AC]$ et $[DB]$ du parallélogramme $ABCD$ ont le même milieu O. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Règle du parallélogramme. Elle donne alors :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Vecteur $\overrightarrow{AO}$. Le point O est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Les règles de calcul donnent :

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$.

INDICE

Outil : la propriété du milieu du segment $[SC]$, avec le point A.

Ensuite : remplace $\overrightarrow{AC}$ grâce à la question 1.

CORRIGÉ

Milieu de $[SC]$. La propriété du milieu, écrite à partir du point A, donne $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AI}$. Donc $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$.

Remplacement. D'après la question 1, $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}$.

Conclusion. On obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}&=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}\\&\quad+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AS}.\end{aligned}$$

3. 1 pts

En déduire que $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AS}$. Que peut-on dire des droites (OI) et (SA) ?

INDICE

Outil : $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}$, puis les questions 1 et 2.

CORRIGÉ

Calcul. Relation de Chasles, puis questions 1 et 2 ; les termes en $\overrightarrow{AB}$ et en $\overrightarrow{AD}$ s'éliminent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}\\&=-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AI}\\&=-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}\\&\quad+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}\\&\quad+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AS}\\&=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AS}.\end{aligned}$$

Parallélisme. Le vecteur $\overrightarrow{OI}$ n'est pas nul, donc $O\neq I$. Il est colinéaire à $\overrightarrow{SA}$, puisque $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{SA}$. D'après la propriété des droites parallèles, (OI) et (SA) sont parallèles.

Conclusion. $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AS}$, et les droites (OI) et (SA) sont parallèles.

4. a) 0,5 pts

Exprimer $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BI}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$. Vérifier que $\overrightarrow{AS} = 2\,\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BD}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$, avec la question 2.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{BD}$. Relation de Chasles, en passant par A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Vecteur $\overrightarrow{BI}$. Même passage par A, puis question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &\quad + \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}.\end{aligned}$$

Vérification. On développe, puis on simplifie :

$$\begin{aligned}&2\,\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS} \\ &\quad + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AS}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité $\overrightarrow{AS} = 2\,\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BD}$ est vérifiée.

4. b) 0,75 pts

En déduire que la droite (SA) est parallèle au plan (BDI).

INDICE

Début : si B, D, I étaient alignés, I serait sur la droite (BD), donc dans le plan de la base ; or I est le milieu de $[SC]$ et S n'est pas dans ce plan.

Outil : la propriété de la droite parallèle à un plan.

CORRIGÉ

Le plan (BDI). Supposons B, D, I alignés. Le point I serait alors sur la droite (BD), donc dans le plan de la base. Le point S, symétrique de C par rapport à I, y serait aussi : c'est exclu. Ainsi B, D, I ne sont pas alignés, et $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ dirigent le plan (BDI).

Combinaison. D'après la question 4. a), le vecteur directeur de (SA) s'écrit $\overrightarrow{AS} = 2\,\overrightarrow{BI} - 1\,\overrightarrow{BD}$.

Conclusion. D'après la propriété « droite parallèle à un plan », la droite (SA) est parallèle au plan (BDI).

5. 1 pts

Le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{OI}$. Exprimer $\overrightarrow{AK}$, puis $\overrightarrow{KI}$, à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$. En déduire que les droites (KI) et (BD) sont parallèles.

INDICE

Début : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$, avec la question 3.

Ensuite : $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AK}$.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{AK}$. Relation de Chasles, puis question 3 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}.\end{aligned}$$

Vecteur $\overrightarrow{KI}$. On passe par A et l'on utilise la question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KI} &= \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AK} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

D'après la question 4. a), $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$, donc $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et non nuls. D'après la propriété des droites parallèles, les droites (KI) et (BD) sont parallèles.

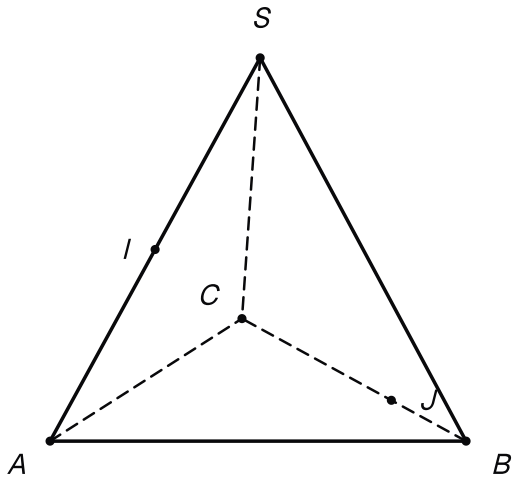
Exercice 2 — 5 pts

Alignement et identification dans un tétraèdre

$SABC$ est un tétraèdre. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$. On note I le milieu de $[SA]$; les points J et K sont définis par :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{4}\,\vec{u} + \frac{1}{3}\,\vec{v} + \frac{1}{6}\,\vec{w}.$$

Trace la figure sur ton cahier.



Le tétraèdre SABC, I au milieu de [SA] et J sur [BC], au tiers de l'arête en partant de B.

1. — 0,5 pts

Justifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Outil : la définition des vecteurs coplanaires, avec S comme origine.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ ont la même origine S. Par définition, ils sont coplanaires si et seulement si S, A, B, C sont dans un même plan.

Or ces quatre points sont les sommets d'un tétraèdre : ils ne sont pas coplanaires.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

2. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{SJ}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{SJ} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BJ}$, puis $\overrightarrow{BC} = \vec{w} - \vec{v}$.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{SI}$. Le point I est le milieu de $[SA]$, donc $\overrightarrow{SI} = \dfrac{1}{2}\,\vec{u}$.

Vecteur $\overrightarrow{SJ}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC} = \vec{w} - \vec{v}$. Puis :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SJ} &= \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= \vec{v} + \frac{1}{3}\,(\vec{w} - \vec{v}) \\ &= \frac{2}{3}\,\vec{v} + \frac{1}{3}\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{SI} = \dfrac{1}{2}\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{SJ} = \dfrac{2}{3}\,\vec{v} + \dfrac{1}{3}\,\vec{w}$.

3. 1 pts

En déduire $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, puis justifier que I, J, K sont alignés.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SI}$.

Ensuite : cherche un réel k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\,\overrightarrow{IK}$.

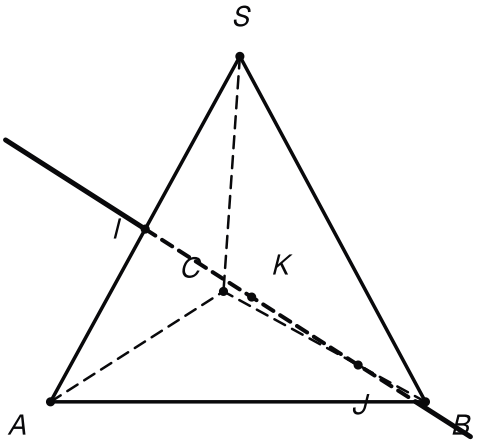
CORRIGÉ

Vecteurs. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SI}$ et $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SI}$. Avec la question 2 :

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\,\vec{u} + \frac{2}{3}\,\vec{v} + \frac{1}{3}\,\vec{w},$$
$$\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{4}\,\vec{u} + \frac{1}{3}\,\vec{v} + \frac{1}{6}\,\vec{w}.$$

Colinéarité. Chaque coefficient de $\overrightarrow{IJ}$ est le double du coefficient correspondant de $\overrightarrow{IK}$, donc $\overrightarrow{IJ} = 2\,\overrightarrow{IK}$. Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ n'est pas nul : ses coefficients ne sont pas tous nuls et $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires (question 1).

Conclusion. D'après la définition vectorielle d'une droite, les points I, J, K sont alignés ; K est même le milieu de $[IJ]$.



Le point K se place sur la droite (IJ), entre I et J : les trois points sont alignés.

4. 1,25 pts

Le point L est défini par :

$$\overrightarrow{SL} = -\frac{1}{4}\,\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\,\vec{w}.$$

Exprimer $\overrightarrow{IL}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, puis justifier que L appartient à la droite (IJ).

INDICE

Début : $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{SL} - \overrightarrow{SI}$.

Ensuite : cherche un réel t tel que $\overrightarrow{IL} = t\,\overrightarrow{IJ}$, en comparant les coefficients de $\vec{v}$.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{IL}$. Relation de Chasles, puis question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IL} &= \overrightarrow{SL} - \overrightarrow{SI}\\ &= -\frac{3}{4}\,\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Comparaison. Le coefficient de $\vec{v}$ vaut $\frac{2}{3}$ dans $\overrightarrow{IJ}$ et 1 dans $\overrightarrow{IL}$: on essaie le facteur $\frac{3}{2}$. Avec la question 3 :

$$\frac{3}{2}\,\overrightarrow{IJ} = -\frac{3}{4}\,\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\,\vec{w}.$$

Donc $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{IJ}$.

Conclusion. Comme $I \neq J$, la définition vectorielle d'une droite montre que L appartient à la droite (IJ).

5. 1,25 pts

La droite (IJ) est-elle parallèle au plan (ABC) ?

INDICE

Début : raisonne par l'absurde en supposant $\overrightarrow{IJ} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

Aide : d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{w} - \vec{u}$; remplace, puis identifie les coefficients.

CORRIGÉ

Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{w} - \vec{u}$. Avec la question 3, on obtient :

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\,\vec{u} + \frac{2}{3}\,\vec{v} + \frac{1}{3}\,\vec{w}\\ &= -(x+y)\,\vec{u} + x\,\vec{v} + y\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Identification. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires : par identification des coefficients, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ et $x + y = \frac{1}{2}$. Or $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, et $1 \neq \frac{1}{2}$: c'est une contradiction.

Conclusion. Non : la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).

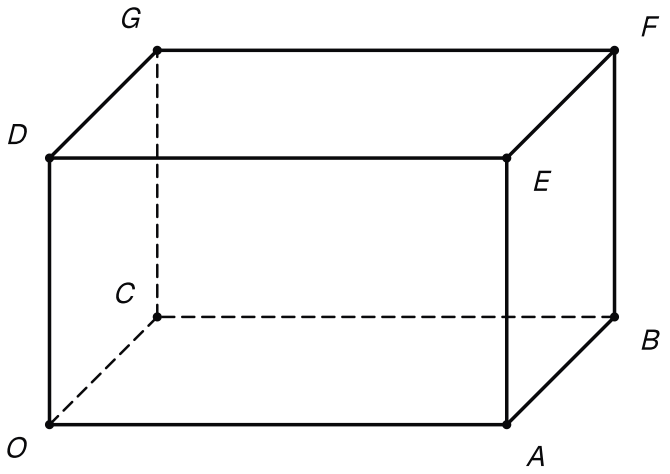
Exercice 3 — 5 pts

Une diagonale de pavé et deux centres de gravité

$OABCDEFG$ est un pavé droit. Les faces $OABC$ et $DEFG$ sont opposées, et les arêtes $[OD]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ joignent leurs sommets. Comme toutes les faces sont des rectangles, on dispose des égalités :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG},$$
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}.$$

Trace la figure sur ton cahier.



Le pavé droit OABCDEFG de l'examen, avec la face OABC en bas et la face DEFG en haut.

1. — 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{OB}$, puis $\overrightarrow{OF}$, à l'aide de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, avec les chemins O, C, B puis O, B, F.

CORRIGÉ

D'après la relation de Chasles et les égalités de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

puis, en utilisant ce premier résultat :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

2. 1 pts

On note H le centre de gravité du triangle ACD, c'est-à-dire le point tel que $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}=\vec{0}$. Justifier que :

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$$

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par H dans $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.

CORRIGÉ

Décompositions. On passe par H dans chacun des trois vecteurs (relation de Chasles) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}&=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA},\\ \overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC},\\ \overrightarrow{OD}&=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HD}.\end{aligned}$$

Somme. En additionnant, la somme $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}$ est nulle par définition de H :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\,\overrightarrow{OH}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

3. 0,75 pts

En déduire que les points O, H, F sont alignés, et préciser la position de H sur le segment $[OF]$.

INDICE

Outil : compare les questions 1 et 2, puis la définition vectorielle d'une droite.

CORRIGÉ

Colinéarité. D'après la question 1, la parenthèse de la question 2 est égale à $\overrightarrow{OF}$. Donc :

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{OF}.$$

Alignement. Le sommet F n'est pas dans la face $OABC$, donc $O\neq F$. D'après la définition vectorielle d'une droite, H appartient à la droite (OF).

Conclusion. Les points O, H, F sont alignés, et H est sur le segment $[OF]$, au tiers de sa longueur à partir de O.

4. a) 0,75 pts

Exprimer $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$.

Ensuite : écris $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

CORRIGÉ

Un vecteur utile. D'après la question 1, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.

Vecteur $\overrightarrow{BE}$. Relation de Chasles, puis égalités de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} \\ &= -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \\ &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

La dernière ligne vient de $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$ et de $-\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$.

Vecteur $\overrightarrow{BG}$. De même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD}$.

4. b) 0,5 pts

En déduire que les plans (BEG) et (ACD) sont parallèles.

INDICE

Début : les points A, C, D ne sont pas alignés. Si l'on avait $\overrightarrow{BE} = k\,\overrightarrow{BG}$, écris $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AD}$ pour obtenir une contradiction.

Outil : la propriété des plans parallèles.

CORRIGÉ

Le plan (ACD). Le point D n'est pas dans le plan de la face $OABC$, qui contient A et C. Donc A, C, D ne sont pas alignés, et $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ dirigent le plan (ACD).

Le plan (BEG). Le vecteur $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD}$ n'est pas nul. Si l'on avait $\overrightarrow{BE} = k\,\overrightarrow{BG}$ pour un réel k, la question 4. a) donnerait $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AD}$, soit $\overrightarrow{AC} = (1-k)\,\overrightarrow{AD}$, et A, C, D seraient alignés : c'est exclu. Donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (BEG).

Conclusion. D'après la question 4. a), $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont des combinaisons de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. D'après la propriété des plans parallèles, les plans (BEG) et (ACD) sont parallèles.

5. 1 pts

On note L le centre de gravité du triangle BEG. Comme à la question 2, on a :

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}\right).$$

Exprimer $\overrightarrow{OL}$ à l'aide de $\overrightarrow{OF}$. Que peut-on dire des points H et L sur le segment $[OF]$?

INDICE

Début : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG}$.

Ensuite : compare avec la question 3.

CORRIGÉ

Décomposition. D'après la relation de Chasles et l'énoncé, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. Avec la question 1 :

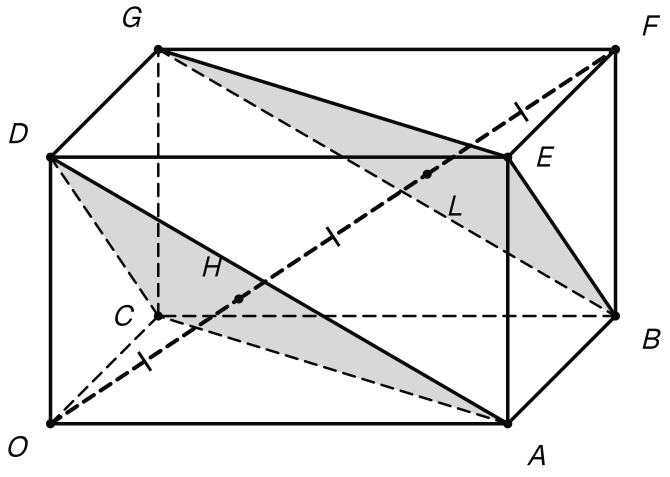
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}\\ &= 2\,\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OC} + 2\,\overrightarrow{OD}\\ &= 2\,\overrightarrow{OF}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{OL} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OF}$.

Partage. On a $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OF}$ (question 3) et $\overrightarrow{OL} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OF}$. Par différence :

$$\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{LF} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OF}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{OL} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OF}$: les points H et L découpent $[OF]$ en trois segments de même longueur.



Les triangles ACD et BEG, parallèles, coupent la diagonale [OF] en H et L, aux tiers de sa longueur.

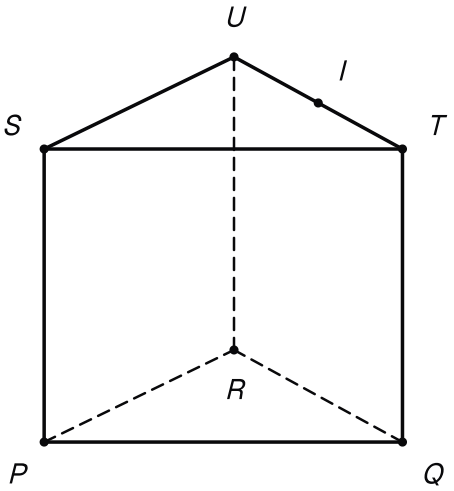
Exercice 4 5 pts

Une droite et un plan dans un prisme

$PQRSTU$ est un prisme. Ses bases sont les triangles PQR et STU, situés dans deux plans parallèles distincts, et ses arêtes latérales sont $[PS]$, $[QT]$, $[RU]$. Les faces latérales $PQTS$, $QRUT$, $PRUS$ sont des parallélogrammes, donc

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RU}.$$

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{PS}$. On note I le milieu de l'arête $[TU]$. Trace la figure sur ton cahier.



Le prisme PQRSTU : la base PQR en bas, la base STU en haut, et I au milieu de l'arête [TU].

1. 0,75 pts

Le point S appartient-il au plan (PQR) ? En déduire que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. Exprimer ensuite $\overrightarrow{PT}$ et $\overrightarrow{PU}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

Début : les deux bases sont dans des plans parallèles distincts, qui n'ont aucun point commun.

Outil : la relation de Chasles, avec les chemins P, Q, T puis P, R, U.

CORRIGÉ

Le point S. Le point S est un sommet de la base STU. Cette base est dans un plan parallèle au plan (PQR) et distinct de lui, et deux tels plans n'ont aucun point commun. Donc S n'appartient pas au plan (PQR).

Non-coplanarité. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$ ont la même origine P. Par définition, ils sont coplanaires si et seulement si P, Q, R, S sont dans un même plan, ce qui est faux. Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Vecteurs. D'après la relation de Chasles et les égalités de l'énoncé :

$$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QT} = \vec{u} + \vec{w},$$
$$\overrightarrow{PU} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RU} = \vec{v} + \vec{w}.$$

Conclusion. S n'appartient pas au plan (PQR), les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, et $\overrightarrow{PT} = \vec{u} + \vec{w}$, $\overrightarrow{PU} = \vec{v} + \vec{w}$.

2. 0,75 pts

Exprimer $\overrightarrow{PI}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

Outil : la propriété du milieu de $[TU]$: pour tout point M, $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MU} = 2\,\overrightarrow{MI}$; choisis $M = P$.

Ensuite : utilise la question 1.

CORRIGÉ

La propriété du milieu de $[TU]$, écrite à partir du point P, donne $\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PU} = 2\,\overrightarrow{PI}$. Avec la question 1 :

$$2\,\overrightarrow{PI} = \vec{u} + \vec{v} + 2\,\vec{w}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{PI} = \dfrac{1}{2}\,\vec{u} + \dfrac{1}{2}\,\vec{v} + \vec{w}$.

3. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{QS}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Justifier que les points Q, R, S ne sont pas alignés.

INDICE

Début : $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$.

Aide : raisonne par l'absurde : si l'on avait $\overrightarrow{QS} = k\,\overrightarrow{QR}$, écris cette égalité sur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et compare les coefficients de $\vec{w}$.

CORRIGÉ

Vecteurs. D'après la relation de Chasles, en passant par P :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}\\ &= -\vec{u} + \vec{v},\\ \overrightarrow{QS} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS}\\ &= -\vec{u} + \vec{w}.\end{aligned}$$

Non-alignement. Le vecteur $\overrightarrow{QR}$ n'est pas nul, car $Q \neq R$. Supposons qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{QS} = k\,\overrightarrow{QR}$. On aurait :

$$\begin{aligned}&-\vec{u} + 0\,\vec{v} + 1\,\vec{w}\\ &= -k\,\vec{u} + k\,\vec{v} + 0\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires (question 1) : deux écritures du même vecteur ont alors les mêmes coefficients (propriété des trois vecteurs non coplanaires). Ici, le coefficient de $\vec{w}$ donnerait $1 = 0$, ce qui est impossible.

Conclusion. $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{QS}$ ne sont pas colinéaires : les points Q, R, S ne sont pas alignés, et ils déterminent le plan (QRS).

4. 1,25 pts

On note K le milieu du segment $[PI]$. Exprimer $\overrightarrow{PK}$, puis $\overrightarrow{QK}$, à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. En déduire que K appartient au plan (QRS).

INDICE

Début : $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PK}$.

Ensuite : calcule $\frac{1}{4}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QS}$ avec la question 3, puis compare.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{PK}$. Le point K est le milieu de $[PI]$. Avec la question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PK} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{PI}\\ &= \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}.\end{aligned}$$

Vecteur $\overrightarrow{QK}$. Relation de Chasles, avec $\overrightarrow{QP} = -\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QK} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PK}\\ &= -\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}.\end{aligned}$$

Comparaison. Avec la question 3 :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QS}\\ &= -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}\\ &= -\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{QK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QS}$.

Conclusion. Les points Q, R, S ne sont pas alignés (question 3). D'après la définition vectorielle d'un plan, K appartient au plan (QRS).

5. 1,25 pts

Soit t un réel et L le point défini par $\overrightarrow{PL} = t\,\overrightarrow{PI}$: lorsque t varie, le point L décrit la droite (PI). On suppose que L appartient au plan (QRS).

Déterminer t. Que peut-on en conclure pour la droite (PI) et le plan (QRS) ?

INDICE

Début : avec la question 2, $\overrightarrow{QL} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PL} = \left(\frac{t}{2} - 1\right)\vec{u} + \frac{t}{2}\,\vec{v} + t\,\vec{w}$.

Aide : écris $\overrightarrow{QL} = x\,\overrightarrow{QR} + y\,\overrightarrow{QS}$ sur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, puis identifie les coefficients : tu obtiens trois équations d'inconnues x, y, t.

CORRIGÉ

Mise en équation. Le point L est dans le plan (QRS). D'après la définition vectorielle d'un plan, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{QL} = x\,\overrightarrow{QR} + y\,\overrightarrow{QS}$. Avec la question 3 et l'expression de $\overrightarrow{QL}$ donnée en indice :

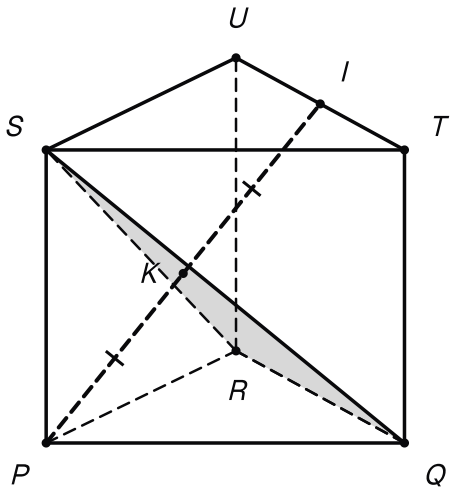
$$\begin{aligned}&\left(\frac{t}{2} - 1\right)\vec{u} + \frac{t}{2}\,\vec{v} + t\,\vec{w}\\ &= -(x+y)\,\vec{u} + x\,\vec{v} + y\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Identification. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont non coplanaires (question 1). On compare donc les coefficients un à un, ce qu'autorise la propriété des trois vecteurs non coplanaires.

- coefficient de $\vec{v}$: $x = \frac{t}{2}$;
- coefficient de $\vec{w}$: $y = t$;
- coefficient de $\vec{u}$: $\frac{t}{2} - 1 = -(x+y) = -\frac{3t}{2}$.

La dernière équation donne $2t = 1$, soit $t = \frac{1}{2}$, puis $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{2}$.

Conclusion. Pour $t = \frac{1}{2}$, le point L est le milieu K de $[PI]$, qui appartient bien au plan (QRS) (question 4). La droite (PI) et le plan (QRS) ont donc un seul point commun : le point K.



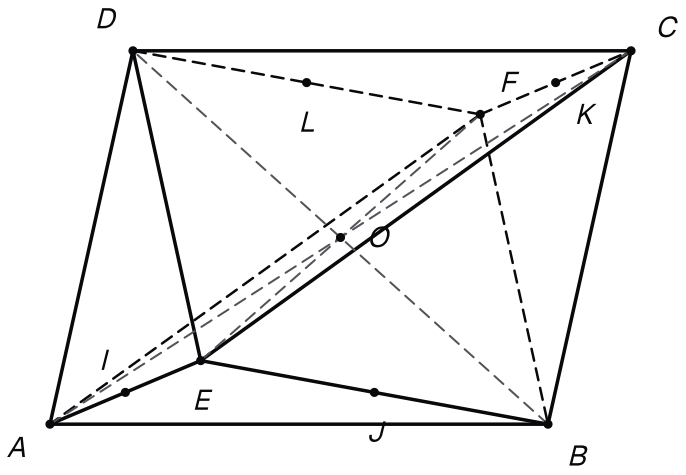
La droite (PI) perce le plan (QRS) en K, milieu de [PI] : elle n'est pas parallèle à ce plan.

Exercice 5 5 pts

Deux pyramides de même base

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O : le point O est le milieu commun de $[AC]$ et de $[BD]$. Le point E n'appartient pas au plan (ABD) de ce parallélogramme, et le point F est le symétrique de E par rapport à O : le point O est aussi le milieu de $[EF]$. Les pyramides $EABCD$ et $FABCD$ ont ainsi la même base $ABCD$ et sont situées de part et d'autre de son plan.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$; ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires, car E n'est pas dans le plan (ABD). On note I, J, K, L les milieux respectifs des arêtes $[EA]$, $[EB]$, $[FC]$, $[FD]$. Trace la figure sur ton cahier.



La base ABCD dressée face à nous : le sommet E est devant elle, le sommet F derrière, caché.

1. 0,75 pts

Justifier que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ et que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$. Nommer les deux parallélogrammes obtenus.

INDICE

Outil : la définition de l'égalité de deux vecteurs : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ lorsque les segments $[AC]$ et $[EF]$ ont le même milieu.

Ensuite : suis le contour pour nommer chaque parallélogramme.

CORRIGÉ

Par définition, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ signifie que les segments $[AC]$ et $[EF]$ ont le même milieu.

Première égalité. Le point O est à la fois le milieu de $[AC]$ et celui de $[EF]$. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$, et $AECF$ est un parallélogramme.

Seconde égalité. De même, O est le milieu de $[BD]$ et de $[EF]$. Donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$, et $BEDF$ est un parallélogramme.

Conclusion. Les deux égalités sont établies ; les parallélogrammes obtenus sont $AECF$ et $BEDF$.

2. 0,75 pts

On rappelle que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, d'après la règle du parallélogramme dans $ABCD$. Exprimer $\overrightarrow{AF}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

Outil : la propriété du milieu de $[EF]$, appliquée avec le point A : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AO}$.

Ensuite : O est aussi le milieu de $[AC]$; utilise le rappel de l'énoncé.

CORRIGÉ

Milieu de $[EF]$. La propriété du milieu, écrite à partir du point A, donne $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AO}$.

Milieu de $[AC]$. Le point O est aussi le milieu de $[AC]$, donc $2\,\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$.

Conclusion. Avec le rappel de l'énoncé, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.

3. 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

Outil : la propriété du milieu avec le point A, pour chacun des quatre segments ; par exemple $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AK}$.

Ensuite : remplace grâce à la question 2.

CORRIGÉ

On écrit la propriété du milieu à partir du point A pour chacun des quatre segments, puis on remplace grâce à la question 2.

Points I et J. I est le milieu de $[EA]$, donc $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\,\vec{w}$. Pour J, milieu de $[EB]$, on a $2\,\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$, donc :

$$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\,\vec{u}+\frac{1}{2}\,\vec{w}.$$

Point K. K est le milieu de $[FC]$:

$$\begin{aligned}2\,\overrightarrow{AK}&=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}\\&=2\,\vec{u}+2\,\vec{v}-\vec{w}.\end{aligned}$$

Point L. L est le milieu de $[FD]$:

$$\begin{aligned}2\,\overrightarrow{AL}&=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}\\&=\vec{u}+2\,\vec{v}-\vec{w}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\,\vec{w}$, $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{2}\,\vec{u}+\dfrac{1}{2}\,\vec{w}$, $\overrightarrow{AK}=\vec{u}+\vec{v}-\dfrac{1}{2}\,\vec{w}$ et $\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{2}\,\vec{u}+\vec{v}-\dfrac{1}{2}\,\vec{w}$.

4. a) 0,75 pts

En déduire $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$, puis comparer ces deux vecteurs.

INDICE

Outil : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AL}$.

Ensuite : compare les deux résultats.

CORRIGÉ

Vecteurs. D'après la relation de Chasles et la question 3 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}&=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\,\vec{u},\\\overrightarrow{LK}&=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\,\vec{u}.\end{aligned}$$

Comparaison. Les deux vecteurs sont égaux à $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, les segments $[IK]$ et $[JL]$ ont donc le même milieu.

Conclusion. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}=\dfrac{1}{2}\,\vec{u}$.

4. b) 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IK}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. En déduire que les points I, J, K, L sont coplanaires, puis préciser la nature du quadrilatère $IJKL$.

INDICE

Début : vérifie que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL}$.

Aide : raisonne par l'absurde : si l'on avait $\overrightarrow{IL} = k\,\overrightarrow{IJ}$, compare les coefficients de $\vec{v}$ des deux membres.

Ensuite : utilise l'égalité de la question 4. a).

CORRIGÉ

Vecteurs. D'après la relation de Chasles et la question 3 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IL} &= \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AI}\\ &= \frac{1}{2}\,\vec{u} + \vec{v} - \vec{w},\\ \overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AI}\\ &= \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}.\end{aligned}$$

Avec $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\,\vec{u}$ (question 4. a)), on constate que $\overrightarrow{IK} = 1\,\overrightarrow{IJ} + 1\,\overrightarrow{IL}$.

Non-colinéarité. Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ n'est pas nul. Supposons qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IL} = k\,\overrightarrow{IJ}$. On aurait :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\vec{u} + 1\,\vec{v} - \vec{w}\\ &= \frac{k}{2}\,\vec{u} + 0\,\vec{v} + 0\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires : on compare les coefficients (propriété des trois vecteurs non coplanaires), et celui de $\vec{v}$ donnerait $1 = 0$: c'est impossible. Les points I, J, L ne sont donc pas alignés.

Coplanarité. D'après la définition vectorielle d'un plan, l'égalité $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL}$ place K dans le plan (IJL).

Conclusion. Les points I, J, K, L sont coplanaires. Comme $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et que I, J, L ne sont pas alignés, $IJKL$ est un parallélogramme non aplati.

5. 0,75 pts

Calculer $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}$. En déduire que O est le milieu de $[IK]$, puis que O appartient au plan (IJL).

INDICE

Début : compare $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}$ avec $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AO}$.

Outil : si M est le milieu de $[IK]$, alors $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\,\overrightarrow{AM}$; un seul point M vérifie $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}$.

CORRIGÉ

Somme. Avec la question 3, le rappel de la question 2 et la définition de O :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}\\&=\frac{1}{2}\,\vec{w}+\vec{u}+\vec{v}-\frac{1}{2}\,\vec{w}\\&=\vec{u}+\vec{v}\\&=\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AO}.\end{aligned}$$

Milieu. Soit M le milieu de $[IK]$. La propriété du milieu donne $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\,\overrightarrow{AM}$, donc $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}$. À partir de A, le vecteur $\overrightarrow{AO}$ mène à un unique point (propriété du point défini par un vecteur) : $M=O$. Le point O est donc le milieu de $[IK]$, et aussi celui de $[JL]$ d'après la question 4. a).

Plan. Avec la question 4. b) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IO}&=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{IK}\\&=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{IJ}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{IL}.\end{aligned}$$

D'après la définition vectorielle d'un plan, O appartient au plan (IJL).

Conclusion. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}$; le point O est le milieu de $[IK]$ et appartient au plan (IJL) : c'est le centre du parallélogramme $IJKL$.