BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Entraînement	7

Exercice 1

Deux points définis par des égalités, puis un alignement

O, A, B, C sont quatre points de l'espace qui ne sont pas dans un même plan. Les points P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OQ} = 2\,\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

1.

Exprimer $\overrightarrow{CP}$ à l'aide de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par O : $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}$.

2.

Exprimer de même $\overrightarrow{CQ}$.

INDICE

Outil : même décomposition, en passant par O.

3. a)

En déduire que les points C, P, Q sont alignés.

INDICE

Début : compare les résultats des questions 1 et 2.

Donnée : C est distinct de P, car O, A, B, C ne sont pas coplanaires ; si l'on avait $C = P$, le point C serait dans le plan (OAB).

3. b)

Préciser la position du point P sur le segment $[CQ]$.

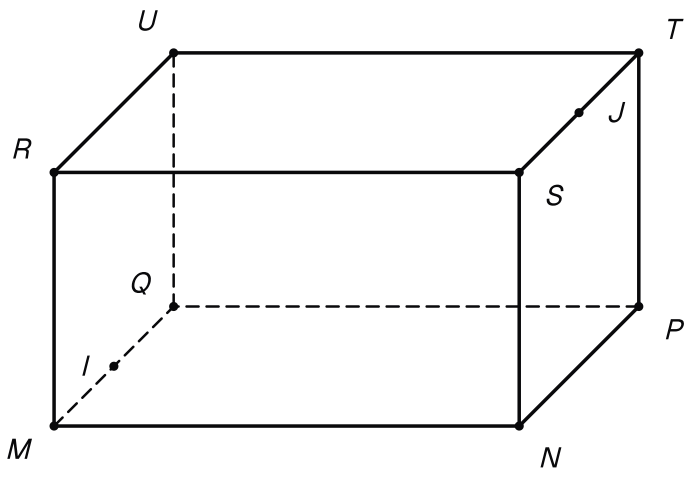
INDICE

Début : écris $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}$, puis utilise la question 3. a).

Exercice 2

Droites parallèles dans un pavé droit

$MNPQRSTU$ est un pavé droit. Ses faces $MNPQ$ et $RSTU$ sont opposées ; les arêtes $[MR]$, $[NS]$, $[PT]$, $[QU]$ joignent ces deux faces, et toutes les faces sont des rectangles. On note I le milieu de $[MQ]$ et J le milieu de $[ST]$. Fais la figure sur ton cahier.



Le pavé droit MNPQRSTU avec I, milieu de [MQ] sur le sol, et J, milieu de [ST] sur le dessus.

1.

Justifier que $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{MR}$ et que $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{MQ}$.

INDICE

Outil : l'égalité de deux vecteurs, lue sur les diagonales des faces $MNSR$, $NPTS$ et $MNPQ$.

2.

En suivant le chemin I, M, N, S, J, justifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MR}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{IM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ST}$.

Ensuite : utilise la question 1.

3.

En déduire que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{MS}$, puis que les droites (IJ) et (MS) sont parallèles.

INDICE

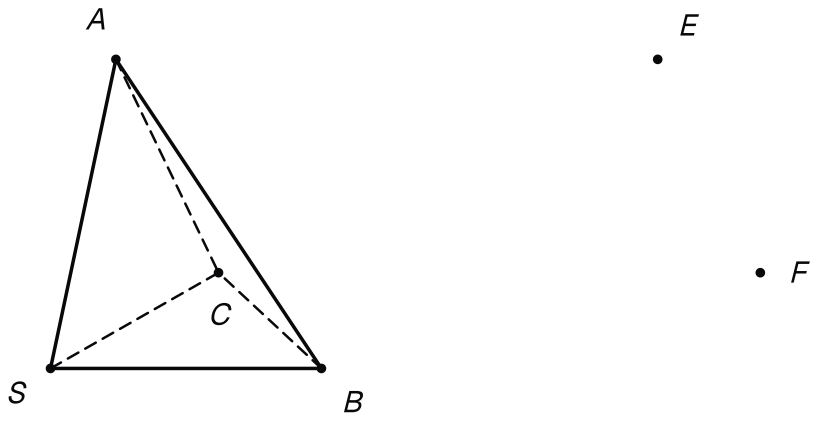
Outil : la règle du parallélogramme dans la face $MNSR$, puis la propriété des droites parallèles.

Exercice 3

Quatre points coplanaires dans un tétraèdre

$SABC$ est un tétraèdre. Les points E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{SA} + 2\,\overrightarrow{SB},$$
$$\overrightarrow{SF} = 2\,\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.$$



Le tétraèdre SABC et les deux points E et F, construits à partir du sommet S.

1.

Exprimer $\overrightarrow{AE}$ à l'aide de $\overrightarrow{SB}$, puis $\overrightarrow{AF}$ à l'aide de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{SB}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par S.

2.

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires.

INDICE

Début : raisonne par l'absurde. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{SB}$ étaient colinéaires, que dire des droites (AC) et (SB) ?

3.

En déduire que les points A, C, E, F sont coplanaires. Quelle est la nature du quadrilatère $AEFC$?

INDICE

Outil : la définition vectorielle d'un plan, avec $\overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AC} + y\,\overrightarrow{AE}$.

Ensuite : compare $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CF}$.

Exercice 4

Identifier des coefficients dans un tétraèdre

$KLMN$ est un tétraèdre. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$, $\vec{v} = \overrightarrow{KM}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{KN}$. Le point P est défini par $\overrightarrow{LP} = 2\,\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$.

1.

Justifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Outil : la définition des vecteurs coplanaires, avec le point K comme origine.

2.

Exprimer $\overrightarrow{KP}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LP}$.

Ensuite : écris $\overrightarrow{LM} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{MN} = \vec{w} - \vec{v}$.

3.

Existe-t-il un réel a tel que $\overrightarrow{KP} = a\,\vec{u} + (a+2)\,\vec{v} + \vec{w}$? Même question avec $\overrightarrow{KP} = a\,\vec{u} + a\,\vec{v} + \vec{w}$.

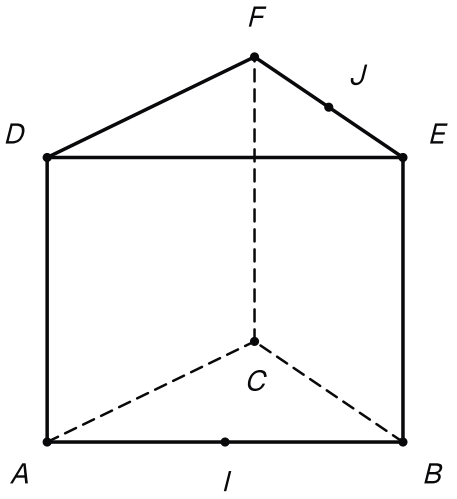
INDICE

Outil : les trois vecteurs ne sont pas coplanaires ; identifie les coefficients avec ceux de la question 2.

Exercice 5

Une droite parallèle au plan d'une face d'un prisme

$ABCDEF$ est un prisme. Ses bases sont les triangles ABC et DEF, et ses faces latérales $ABED$, $BCFE$, $ACFD$ sont des parallélogrammes. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[EF]$.



Le prisme ABCDEF, le milieu I de [AB] sur la base du bas et le milieu J de [EF] sur la base du haut.

1.

Justifier que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$.

INDICE

Outil : l'égalité de deux vecteurs, lue sur les diagonales des faces $ABED$ et $BCFE$.

2.

En suivant le chemin I, B, E, J, justifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

Ensuite : la question 1, puis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

3.

En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ACD).

INDICE

Outil : la propriété de la droite parallèle à un plan, avec les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

4.

La droite (IJ) est-elle parallèle au plan (ABC) ?

INDICE

Début : raisonne par l'absurde en supposant $\overrightarrow{IJ} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

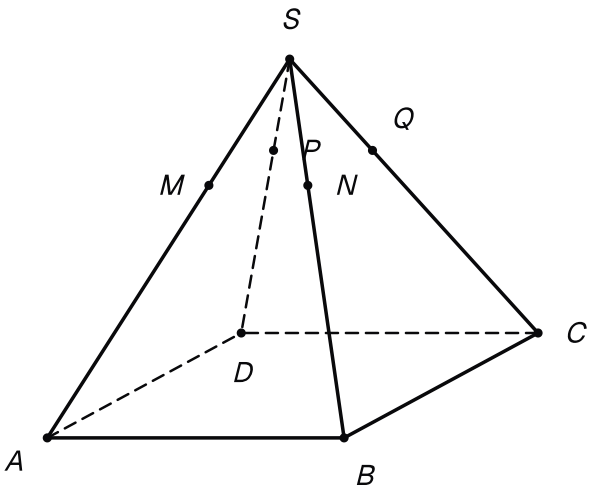
Outil : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 6

Une section parallèle à la base d'une pyramide

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Sur les arêtes latérales, on place les points M, N, P, Q tels que :

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA},$$
$$\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB},$$
$$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD},$$
$$\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$$



La pyramide SABCD et les points M, N, P, Q placés au tiers de chaque arête latérale, en partant de S.

1.

Exprimer $\overrightarrow{MN}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{MP}$ à l'aide de $\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SN}$. Factorise ensuite par $\frac{1}{3}$.

2.

En déduire que les plans (MNP) et (ABD) sont parallèles.

INDICE

Outil : la propriété des plans parallèles. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dirigent le plan de la base.

3.

Justifier que $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$. Que peut-on en déduire pour le point Q ?

INDICE

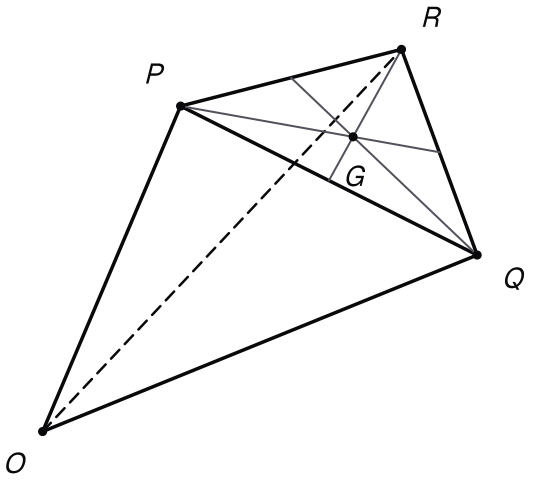
Début : comme à la question 1, $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Outil : la règle du parallélogramme dans la base.

Exercice 7

Le centre de gravité d'une face d'un tétraèdre

$OPQR$ est un tétraèdre. On note G le centre de gravité du triangle PQR : c'est le point tel que $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$. Le point K est défini par $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.



Le tétraèdre OPQR et le centre de gravité G de sa face PQR.

1.

Soit M un point de l'espace. Justifier que $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par G dans chacun des trois vecteurs.

2.

En déduire $\overrightarrow{OG}$ à l'aide de $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.

INDICE

Outil : choisis $M = O$ dans la question 1.

3.

Justifier que G appartient au plan (PQR). En déduire que $O \neq G$.

INDICE

Début : choisis $M = P$ dans la question 1, puis isole $\overrightarrow{PG}$.

Outil : la définition vectorielle d'un plan.

4.

Écrire $\overrightarrow{OK}$ à l'aide de $\overrightarrow{OG}$, puis justifier que les points O, G, K sont alignés.

INDICE

Début : compare la définition de K avec la question 2.

Ensuite : la question 3 donne $O \neq G$.