BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Entraînement	7

Exercice 1

Deux points définis par des égalités, puis un alignement

O, A, B, C sont quatre points de l'espace qui ne sont pas dans un même plan. Les points P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},$$
$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

1.

Exprimer $\overrightarrow{CP}$ à l'aide de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par O : $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}$.

CORRIGÉ

On passe par O (relation de Chasles), puis on remplace $\overrightarrow{OP}$ par sa définition :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP} \\ &= -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

2.

Exprimer de même $\overrightarrow{CQ}$.

INDICE

Outil : même décomposition, en passant par O.

CORRIGÉ

Même démarche : relation de Chasles en passant par O, définition de Q, puis regroupement des termes en $\overrightarrow{OC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CQ} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OQ} \\ &= -\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA} \\ &\quad + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$.

3. a)

En déduire que les points C, P, Q sont alignés.

INDICE

Début : compare les résultats des questions 1 et 2.

Donnée : C est distinct de P, car O, A, B, C ne sont pas coplanaires ; si l'on avait $C = P$, le point C serait dans le plan (OAB).

CORRIGÉ

Colinéarité. On factorise par 2 le résultat de la question 2, puis on reconnaît la question 1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CQ} &= 2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)\\ &= 2\,\overrightarrow{CP}.\end{aligned}$$

Points distincts. Si l'on avait $C = P$, on aurait $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, et C serait dans le plan (OAB). C'est impossible, puisque O, A, B, C ne sont pas coplanaires. Donc $C \neq P$.

Conclusion. On a $\overrightarrow{CQ} = 2\,\overrightarrow{CP}$ avec $C \neq P$. D'après la définition vectorielle d'une droite, Q appartient à la droite (CP) : les points C, P, Q sont alignés.

3. b)

Préciser la position du point P sur le segment $[CQ]$.

INDICE

Début : écris $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}$, puis utilise la question 3. a).

CORRIGÉ

Calcul de $\overrightarrow{PQ}$. Relation de Chasles, puis question 3. a) :

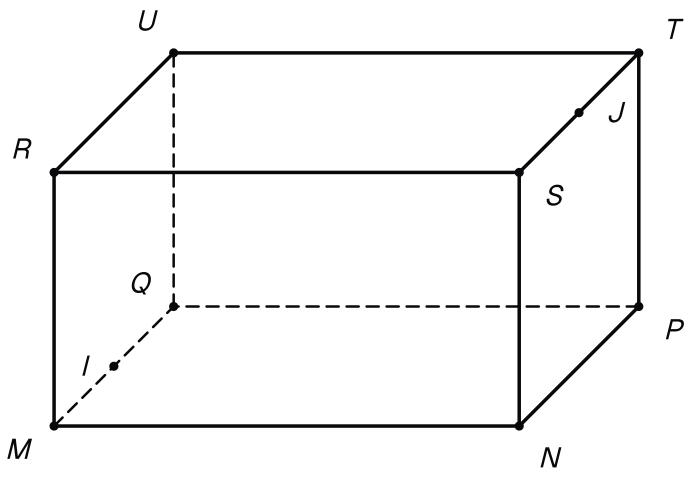
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}\\ &= -\overrightarrow{CP} + 2\,\overrightarrow{CP}\\ &= \overrightarrow{CP}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PQ}$ caractérise le milieu : P est le milieu de $[CQ]$.

Exercice 2

Droites parallèles dans un pavé droit

$MNPQRSTU$ est un pavé droit. Ses faces $MNPQ$ et $RSTU$ sont opposées ; les arêtes $[MR]$, $[NS]$, $[PT]$, $[QU]$ joignent ces deux faces, et toutes les faces sont des rectangles. On note I le milieu de $[MQ]$ et J le milieu de $[ST]$. Fais la figure sur ton cahier.



Le pavé droit MNPQRSTU avec I, milieu de [MQ] sur le sol, et J, milieu de [ST] sur le dessus.

1.

Justifier que $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{MR}$ et que $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{MQ}$.

INDICE

Outil : l'égalité de deux vecteurs, lue sur les diagonales des faces $MNSR$, $NPTS$ et $MNPQ$.

CORRIGÉ

Chaque égalité se lit sur les diagonales d'une face rectangulaire, qui ont le même milieu.

- Face $MNSR$: les diagonales $[MS]$ et $[RN]$ ont le même milieu. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NS}$.
- Face $NPTS$: les diagonales $[NT]$ et $[PS]$ ont le même milieu, donc $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{ST}$.
- Face $MNPQ$: les diagonales $[MP]$ et $[QN]$ ont le même milieu, donc $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

Conclusion. $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{MR}$ et, en enchaînant les deux dernières égalités, $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

2.

En suivant le chemin I, M, N, S, J, justifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MR}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{IM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ST}$.

Ensuite : utilise la question 1.

CORRIGÉ

Chemin. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NS} + \overrightarrow{SJ}.$$

Les deux demi-arêtes. I est le milieu de $[MQ]$, donc $\overrightarrow{IM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$. J est le milieu de $[ST]$ et $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{MQ}$ (question 1), donc $\overrightarrow{SJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$. Ces deux termes ont une somme nulle.

Conclusion. Comme $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{MR}$ (question 1), il reste $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MR}$.

3.

En déduire que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{MS}$, puis que les droites (IJ) et (MS) sont parallèles.

INDICE

Outil : la règle du parallélogramme dans la face $MNSR$, puis la propriété des droites parallèles.

CORRIGÉ

Égalité. Dans la face $MNSR$, on a $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NS}$ (question 1). La règle du parallélogramme donne $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MS}$. Avec la question 2, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{MS}$.

Parallélisme. Le vecteur $\overrightarrow{MS}$ n'est pas nul, donc $I \neq J$. Les droites (IJ) et (MS) ont des vecteurs directeurs égaux, donc colinéaires. D'après la propriété des droites parallèles, elles sont parallèles.

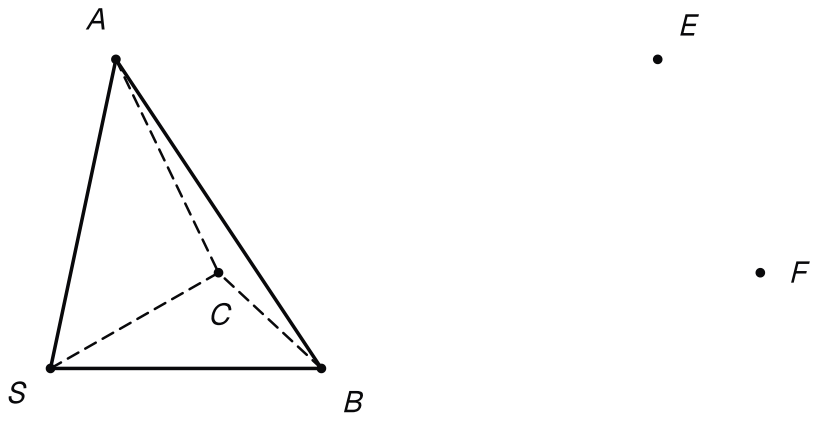
Conclusion. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{MS}$, et les droites (IJ) et (MS) sont parallèles.

Exercice 3

Quatre points coplanaires dans un tétraèdre

$SABC$ est un tétraèdre. Les points E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{SA} + 2\,\overrightarrow{SB},$$
$$\overrightarrow{SF} = 2\,\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.$$



Le tétraèdre SABC et les deux points E et F, construits à partir du sommet S.

1.

Exprimer $\overrightarrow{AE}$ à l'aide de $\overrightarrow{SB}$, puis $\overrightarrow{AF}$ à l'aide de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{SB}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par S.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{AE}$. On passe par S (relation de Chasles), et $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SE} \\ &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SA} + 2\,\overrightarrow{SB} \\ &= 2\,\overrightarrow{SB}.\end{aligned}$$

Vecteur $\overrightarrow{AF}$. Même passage par S, puis $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SF} \\ &= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} + 2\,\overrightarrow{SB} \\ &= \overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{SB}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + 2\,\overrightarrow{SB}$.

2.

Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires.

INDICE

Début : raisonne par l'absurde. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{SB}$ étaient colinéaires, que dire des droites (AC) et (SB) ?

CORRIGÉ

Raisonnons par l'absurde : supposons $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ colinéaires. Comme $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{SB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{SB}$ seraient eux aussi colinéaires.

D'après la propriété des droites parallèles, les droites (AC) et (SB) seraient alors parallèles, donc contenues dans un même plan. Ce plan contiendrait S, A, B, C, ce qui est faux pour les sommets d'un tétraèdre.

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires.

3.

En déduire que les points A, C, E, F sont coplanaires. Quelle est la nature du quadrilatère $AEFC$?

INDICE

Outil : la définition vectorielle d'un plan, avec $\overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AC} + y\,\overrightarrow{AE}$.

Ensuite : compare $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CF}$.

CORRIGÉ

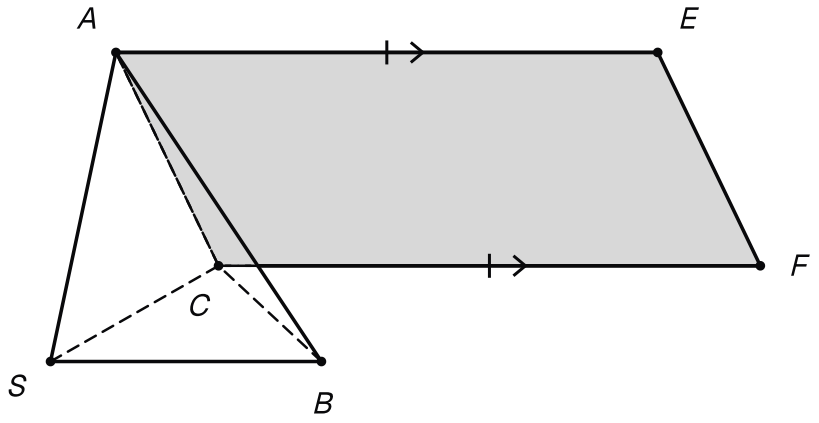
Coplanarité. D'après la question 1, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$. D'après la question 2, les points A, C, E ne sont pas alignés : ils déterminent le plan (ACE). La définition vectorielle d'un plan place F dans ce plan.

Nature. On passe par S :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SF} \\ &= \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SC} + 2\,\overrightarrow{SB} \\ &= 2\,\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

L'égalité $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}$ fait de $AEFC$ un parallélogramme, non aplati car A, C, E ne sont pas alignés.

Conclusion. Les points A, C, E, F sont coplanaires, et $AEFC$ est un parallélogramme.



Le quadrilatère AEFC est plan, et ses côtés [AE] et [CF] sont parallèles et de même longueur.

Exercice 4

Identifier des coefficients dans un tétraèdre

$KLMN$ est un tétraèdre. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$, $\vec{v} = \overrightarrow{KM}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{KN}$. Le point P est défini par $\overrightarrow{LP} = 2\,\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$.

1.

Justifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Outil : la définition des vecteurs coplanaires, avec le point K comme origine.

CORRIGÉ

Les trois vecteurs ont la même origine K : $\overrightarrow{KL} = \vec{u}$, $\overrightarrow{KM} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{KN} = \vec{w}$.

Par définition, ils sont coplanaires si et seulement si les points K, L, M, N sont dans un même plan.

Or ces quatre points sont les sommets d'un tétraèdre.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

2.

Exprimer $\overrightarrow{KP}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LP}$.

Ensuite : écris $\overrightarrow{LM} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{MN} = \vec{w} - \vec{v}$.

CORRIGÉ

Deux vecteurs intermédiaires. En passant par K (relation de Chasles) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KM} = \vec{v} - \vec{u},\\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN} = \vec{w} - \vec{v}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{KP}$. Relation de Chasles, définition de P, puis règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KP} &= \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LP}\\ &= \vec{u} + 2\,(\vec{v} - \vec{u})\\ &\quad + (\vec{w} - \vec{v})\\ &= -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{KP} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

3.

Existe-t-il un réel a tel que $\overrightarrow{KP} = a\,\vec{u} + (a+2)\,\vec{v} + \vec{w}$? Même question avec $\overrightarrow{KP} = a\,\vec{u} + a\,\vec{v} + \vec{w}$.

INDICE

Outil : les trois vecteurs ne sont pas coplanaires ; identifie les coefficients avec ceux de la question 2.

CORRIGÉ

Principe. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires (question 1). D'après la propriété des trois vecteurs non coplanaires, l'écriture de $\overrightarrow{KP}$ à l'aide de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est unique : ses coefficients sont $-1, 1, 1$ (question 2).

Premier cas. L'identification des coefficients donne $a = -1$ et $a + 2 = 1$. La valeur $a = -1$ satisfait ces deux conditions.

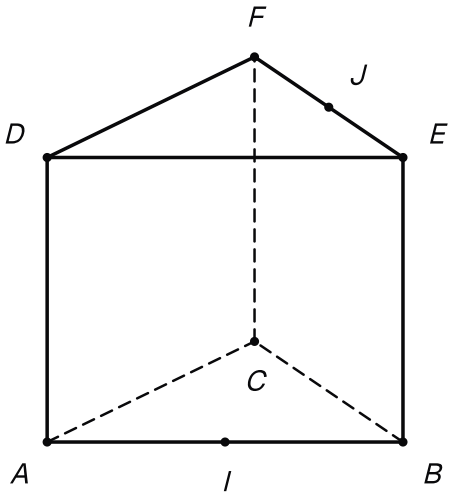
Second cas. En lisant les coefficients de $\vec{u}$ puis de $\vec{v}$, on obtient $a = -1$ et $a = 1$. Un même réel ne peut pas prendre ces deux valeurs.

Conclusion. Dans le premier cas, le réel $a = -1$ convient. Dans le second, aucun réel a ne convient.

Exercice 5

Une droite parallèle au plan d'une face d'un prisme

$ABCDEF$ est un prisme. Ses bases sont les triangles ABC et DEF, et ses faces latérales $ABED$, $BCFE$, $ACFD$ sont des parallélogrammes. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[EF]$.



Le prisme ABCDEF, le milieu I de [AB] sur la base du bas et le milieu J de [EF] sur la base du haut.

1.

Justifier que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$.

INDICE

Outil : l'égalité de deux vecteurs, lue sur les diagonales des faces $ABED$ et $BCFE$.

CORRIGÉ

- Les diagonales $[AE]$ et $[DB]$ du parallélogramme $ABED$ ont le même milieu. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$.
- Les diagonales $[BF]$ et $[CE]$ du parallélogramme $BCFE$ ont le même milieu, ce qui donne $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$.

Conclusion. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$.

2.

En suivant le chemin I, B, E, J, justifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

Ensuite : la question 1, puis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

Chemin. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EJ}$.

Remplacements.

- I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- J est le milieu de $[EF]$, donc $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (question 1).
- $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}$ (question 1).

Calcul. Règles de calcul, puis relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Conclusion. On a bien $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3.

En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ACD).

INDICE

Outil : la propriété de la droite parallèle à un plan, avec les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

CORRIGÉ

Directions du plan. Le point D n'est pas dans le plan de la base ABC, donc A, C, D ne sont pas alignés : $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ dirigent le plan (ACD).

Combinaison. D'après la question 2, le vecteur directeur de (IJ) s'écrit $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 1\,\overrightarrow{AD}$.

Conclusion. D'après la propriété « droite parallèle à un plan », la droite (IJ) est parallèle au plan (ACD).

4.

La droite (IJ) est-elle parallèle au plan (ABC) ?

INDICE

Début : raisonne par l'absurde en supposant $\overrightarrow{IJ} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

Outil : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

CORRIGÉ

Non-coplanarité. Les points A, B, C, D ne sont pas dans un même plan, donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{IJ} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$. Avec la question 2, on obtiendrait :

$$\begin{aligned} &0\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} + 1\,\overrightarrow{AD} \\ &= x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} + 0\,\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Les trois vecteurs n'étant pas coplanaires, on identifie les coefficients. Celui de $\overrightarrow{AD}$ donnerait $1 = 0$: c'est absurde.

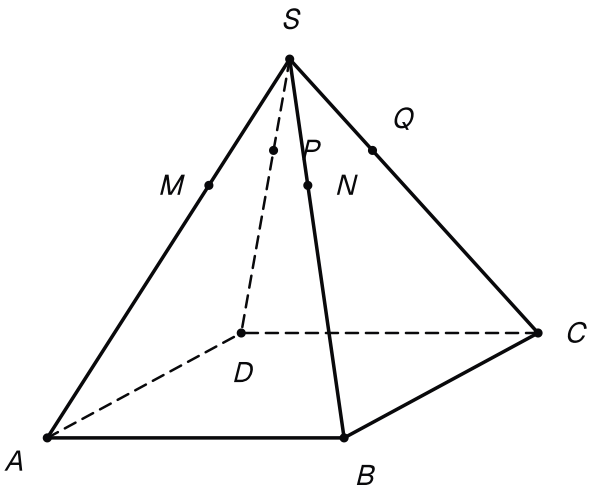
Conclusion. Non : la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).

Exercice 6

Une section parallèle à la base d'une pyramide

$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. Sur les arêtes latérales, on place les points M, N, P, Q tels que :

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA},$$
$$\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB},$$
$$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD},$$
$$\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$$



La pyramide SABCD et les points M, N, P, Q placés au tiers de chaque arête latérale, en partant de S.

1.

Exprimer $\overrightarrow{MN}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{MP}$ à l'aide de $\overrightarrow{AD}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SN}$. Factorise ensuite par $\frac{1}{3}$.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{MN}$. On passe par S (relation de Chasles), on remplace, puis on factorise par $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SN} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} \\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Vecteur $\overrightarrow{MP}$. Le même calcul, avec D à la place de B, donne $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Conclusion. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

2.

En déduire que les plans (MNP) et (ABD) sont parallèles.

INDICE

Outil : la propriété des plans parallèles. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dirigent le plan de la base.

CORRIGÉ

Le plan (ABD). Les points A, B, D ne sont pas alignés : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dirigent le plan (ABD).

Le plan (MNP). D'après la question 1, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont des multiples non nuls de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$. Ils ne sont donc pas colinéaires et dirigent le plan (MNP).

Combinaisons. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{MP} &= 0\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux vecteurs qui dirigent (MNP) sont des combinaisons de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. D'après la propriété des plans parallèles, les plans (MNP) et (ABD) sont parallèles.

3.

Justifier que $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$. Que peut-on en déduire pour le point Q ?

INDICE

Début : comme à la question 1, $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Outil : la règle du parallélogramme dans la base.

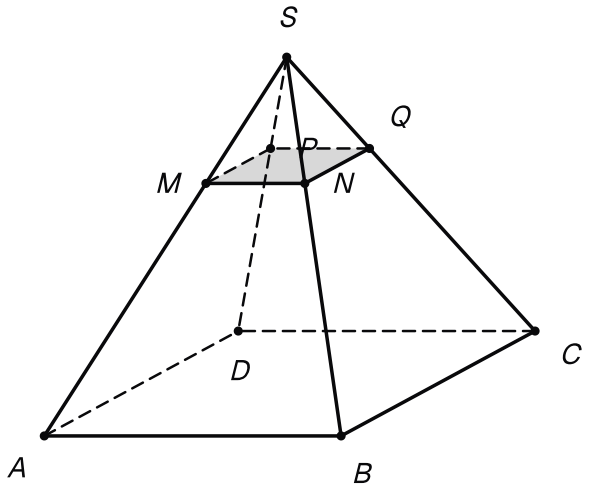
CORRIGÉ

Calcul. Comme à la question 1, $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. La base est un parallélogramme : la règle du parallélogramme donne $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MQ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}.\end{aligned}$$

Position de Q. Les points M, N, P ne sont pas alignés (question 2). D'après la définition vectorielle d'un plan, Q appartient au plan (MNP).

Conclusion. L'égalité $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$ place Q dans le plan (MNP) ; d'après la règle du parallélogramme, $MNQP$ est même un parallélogramme.

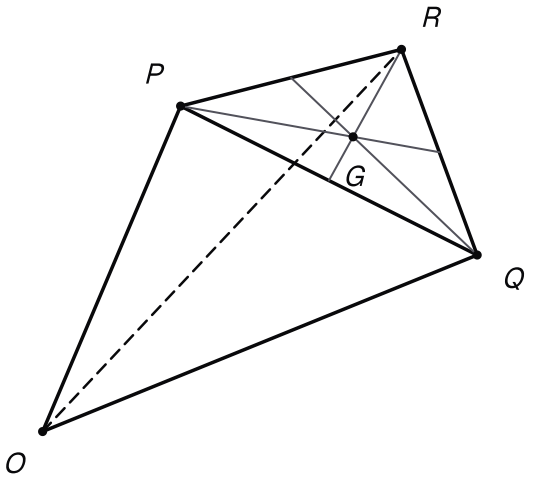


Le point Q appartient au plan (MNP) : le quadrilatère MNQP est une réduction de la base ABCD.

Exercice 7

Le centre de gravité d'une face d'un tétraèdre

$OPQR$ est un tétraèdre. On note G le centre de gravité du triangle PQR : c'est le point tel que $\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$. Le point K est défini par $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$.



Le tétraèdre OPQR et le centre de gravité G de sa face PQR.

1.

Soit M un point de l'espace. Justifier que $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}=3\,\overrightarrow{MG}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par G dans chacun des trois vecteurs.

CORRIGÉ

Décompositions. On passe par G dans chacun des trois vecteurs (relation de Chasles) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}&=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GP},\\ \overrightarrow{MQ}&=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GQ},\\ \overrightarrow{MR}&=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GR}.\end{aligned}$$

Somme. On additionne ces trois égalités (règles de calcul) ; la parenthèse est nulle par définition de G :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}\\ &=3\,\overrightarrow{MG}\\ &\quad+\left(\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}\right)\\ &=3\,\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}=3\,\overrightarrow{MG}$.

2.

En déduire $\overrightarrow{OG}$ à l'aide de $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OR}$.

INDICE

Outil : choisis $M = O$ dans la question 1.

CORRIGÉ

L'égalité de la question 1 est vraie pour tout point M ; on l'écrit avec $M = O$:

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = 3\,\overrightarrow{OG}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right)$.

3.

Justifier que G appartient au plan (PQR). En déduire que $O \neq G$.

INDICE

Début : choisis $M = P$ dans la question 1, puis isole $\overrightarrow{PG}$.

Outil : la définition vectorielle d'un plan.

CORRIGÉ

Le point G dans (PQR). On écrit la question 1 avec $M = P$. Comme $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$, il vient $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = 3\,\overrightarrow{PG}$, donc :

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{PR}.$$

Comme P, Q, R ne sont pas alignés, cette écriture place G dans le plan (PQR) (définition vectorielle d'un plan).

Les points O et G. Le point O n'est pas dans le plan (PQR), car $OPQR$ est un tétraèdre. Or G est dans ce plan.

Conclusion. On a $\overrightarrow{PG} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{PQ} + \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{PR}$, donc G appartient au plan (PQR). Ce plan ne contient pas O. Donc $O \neq G$.

4.

Écrire $\overrightarrow{OK}$ à l'aide de $\overrightarrow{OG}$, puis justifier que les points O, G, K sont alignés.

INDICE

Début : compare la définition de K avec la question 2.

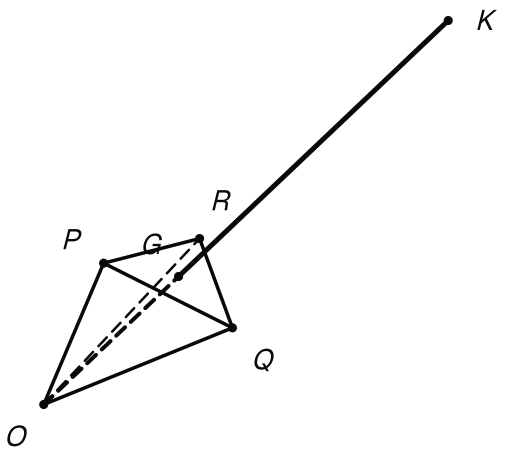
Ensuite : la question 3 donne $O \neq G$.

CORRIGÉ

Colinéarité. La définition de K et la question 2 donnent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= 3\,\overrightarrow{OG}.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $O \neq G$ (question 3) et $\overrightarrow{OK} = 3\,\overrightarrow{OG}$, la définition vectorielle d'une droite place K sur la droite (OG) : les points O, G, K sont alignés.



Avec OK = 3 OG, les points O, G et K sont sur une même droite, K trois fois plus loin de O que G.