BURHAN

Vecteurs de l'espace : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

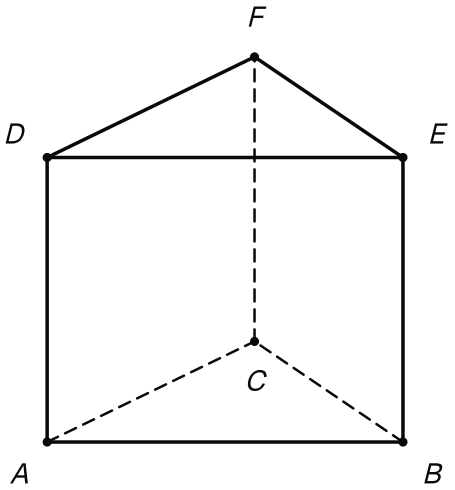
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Vecteurs de l'espace	Application	8

Exercice 1

Des vecteurs égaux dans un prisme droit

$ABCDEF$ est un prisme droit. Ses deux bases sont les triangles ABC et DEF. Ses faces latérales $ABED$, $BCFE$ et $ACFD$ sont des rectangles. Trace la figure sur ton cahier.



Le prisme droit ABCDEF : la base ABC en bas, la base DEF au-dessus, reliées par trois arêtes verticales.

1.

Justifier que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$ et que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$.

INDICE

Outil : l'égalité de deux vecteurs.

Un rectangle est un parallélogramme : ses diagonales se coupent en leur milieu.

2.

En déduire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

INDICE

Outil : relis la définition de l'égalité de deux vecteurs : quels segments doivent avoir le même milieu ?

3.

Le point K vérifie $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BE}$. Quel est ce point ?

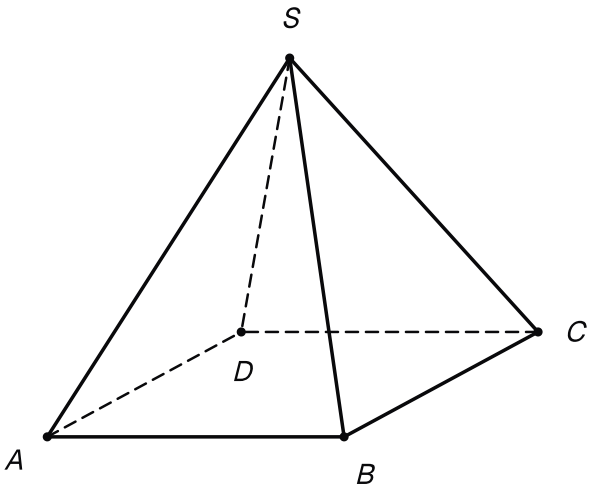
INDICE

Outil : pour un point et un vecteur donnés, il existe un seul point d'arrivée.

Exercice 2

La relation de Chasles dans une pyramide

La pyramide $SABCD$ a pour sommet S et pour base le parallélogramme $ABCD$, de sorte que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Le sommet S n'est pas dans le plan de la base.



La pyramide SABCD : un sommet S au-dessus d'une base parallélogramme ABCD.

1.

Écrire chacune des sommes $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{SC}$ sous la forme d'un seul vecteur.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. Pour la dernière somme, change d'abord l'ordre des termes.

2.

Simplifier $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CS}$.

INDICE

Outil : applique deux fois la relation de Chasles ; où arrive-t-on en partant de S ?

3.

Justifier que $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{SB}$.

INDICE

Début : les lettres ne s'enchaînent pas. Remplace $\overrightarrow{DC}$ par un vecteur égal qui part de A.

Exercice 3

Simplifier trois sommes de vecteurs

P, Q, R, S, T sont cinq points de l'espace, pas forcément dans un même plan.

1.

Simplifier $\vec{a} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RT}$.

INDICE

Outil : range les termes pour que les lettres s'enchaînent, puis applique la relation de Chasles.

2.

Simplifier $\vec{b} = \overrightarrow{TS} - \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PT}$.

INDICE

Premier geste : remplace chaque soustraction par l'opposé : $-\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$ et $-\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{TP}$.

Second geste : regroupe $\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SR}$ d'une part, $\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PR}$ d'autre part, et applique la relation de Chasles à chacune.

3.

Exprimer $\vec{c} = 2\,\overrightarrow{PQ} - 3\,\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QR}$ à l'aide des seuls vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.

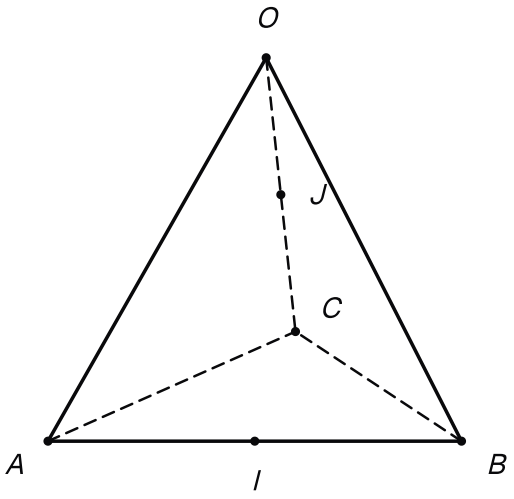
INDICE

Outil : décompose $\overrightarrow{QR}$ en passant par P.

Exercice 4

Le milieu d'un segment dans un tétraèdre

$OABC$ est un tétraèdre : les points O, A, B, C ne sont pas dans un même plan. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[OC]$.



Le tétraèdre OABC, le milieu I de l'arête [AB] et le milieu J de l'arête [OC].

1.

Écrire $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ à l'aide du seul vecteur $\overrightarrow{OI}$.

INDICE

Outil : la propriété du milieu d'un segment, avec le point O.

2.

Écrire de même $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ à l'aide de $\overrightarrow{CI}$.

INDICE

Outil : la même propriété, cette fois avec le point C.

3.

Justifier que $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BJ} = 2\,\overrightarrow{IJ}$.

INDICE

Premier geste : applique la propriété du milieu de $[AB]$ avec le point J : elle donne $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}$.

Second geste : prends les opposés, car $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{JB}$.

Exercice 5

Des vecteurs colinéaires ?

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace. On pose $\vec{a} = 3\,\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{b} = -6\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$ et $\vec{c} = \vec{u} - \dfrac{1}{3}\,\vec{v}$.

1.

Écrire $\vec{b}$ à l'aide de $\vec{a}$. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

Début : compare les coefficients de $\vec{u}$: par quel réel faut-il multiplier 3 pour obtenir -6 ?

2.

Même question pour $\vec{c}$ et $\vec{a}$.

INDICE

Outil : cherche un réel k tel que $\vec{c} = k\,\vec{a}$.

3.

On suppose $\vec{a}$ non nul. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont-ils le même sens ? Comparer leurs longueurs.

INDICE

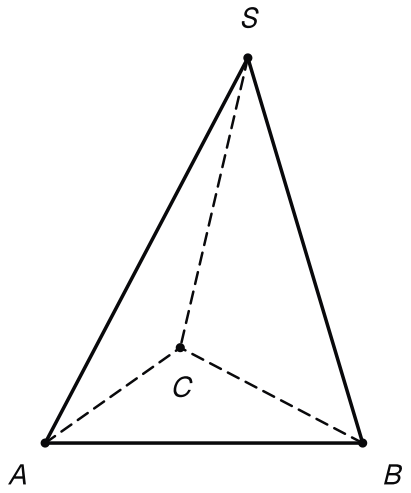
Outil : la définition du produit d'un vecteur par un réel ; regarde le signe et la valeur absolue de -2.

Exercice 6

Sur une droite ou dans un plan

$SABC$ est un tétraèdre de sommet S ; sa base est le triangle ABC. Les points M, N, P sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SA} + 3\,\overrightarrow{AB},$$
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}.$$



Le tétraèdre SABC de l'exercice, sommet S en haut et triangle ABC pour base.

1.

Justifier que M appartient au plan (ABC).

INDICE

Outil : la définition vectorielle d'un plan. Vérifie d'abord que A, B, C ne sont pas alignés.

2.

Exprimer $\overrightarrow{AN}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$. En déduire que N appartient à la droite (AB).

INDICE

Début : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SN}$.

Outil : la définition vectorielle d'une droite.

3.

Le point P appartient-il au plan (SAB) ?

INDICE

Outil : la définition vectorielle d'un plan, avec les vecteurs $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 7

Coplanarité par une combinaison

$SABCD$ est une pyramide. Sa base $ABCD$ est un parallélogramme, et son sommet S est en dehors du plan de cette base.

1.

Justifier que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$?

INDICE

Outil : la règle du parallélogramme, puis la propriété qui relie coplanarité et combinaison de deux vecteurs.

2.

Le point M vérifie $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD} - 2\,\overrightarrow{AB}$. Justifier que M appartient au plan (ABD).

INDICE

Début : calcule $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

3.

On rappelle que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, car $ABCD$ est un parallélogramme. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires.

INDICE

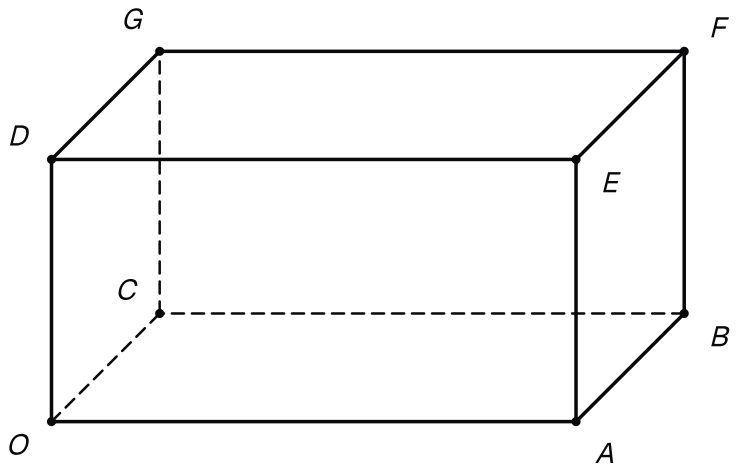
Début : écris $\overrightarrow{AB}$ en passant par S.

Outil : la propriété qui relie coplanarité et combinaison de deux vecteurs.

Exercice 8

Une droite parallèle à une face d'un pavé

$OABCDEFG$ est un pavé droit dont toutes les faces sont des rectangles. Les faces $OABC$ et $DEFG$ sont opposées. Les arêtes $[OD]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ les relient : D est au-dessus de O, E au-dessus de A, et ainsi de suite.



Le pavé droit OABCDEFG : la face OABC au sol, la face DEFG au-dessus, D à la verticale de O.

1.

Justifier que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA}$ et que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OC}$.

INDICE

Outil : l'égalité de deux vecteurs, lue sur les diagonales des faces $OAED$ et $OCGD$.

2.

Exprimer $\overrightarrow{EG}$ à l'aide de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.

INDICE

Début : décompose $\overrightarrow{EG}$ en passant par D, puis utilise la question 1.

3.

En déduire que la droite (EG) est parallèle au plan (OAC).

INDICE

Outil : la propriété de la droite parallèle à un plan, avec les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.