BURHAN

Vecteurs de l'espace

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

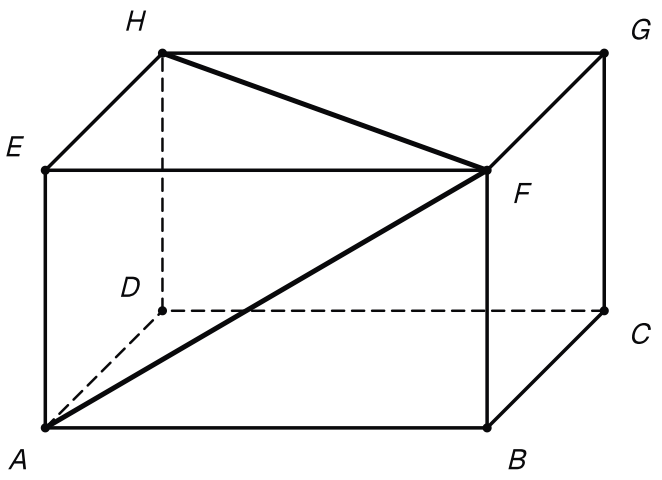
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/vecteurs-de-l-espace/cours

Chapitre	Semestre
Vecteurs de l'espace	Semestre 2

Des flèches qui quittent le plan

Une pièce a la forme d'un pavé $ABCDEFGH$. Le plancher est $ABCD$, le plafond est $EFGH$: les coins E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D.

Une mouche part du coin A. Elle vole en ligne droite jusqu'au coin F, le long du mur $ABFE$. Puis elle traverse le plafond, encore en ligne droite, jusqu'au coin H.



La pièce ABCDEFGH et le vol de la première mouche : de A à F le long du mur, puis de F à H à travers le plafond.

Devine : Une prédiction

Une seconde mouche part aussi de A. Elle longe l'arête $[AD]$ du plancher, puis monte le long de l'arête $[DH]$. Où arrive-t-elle ?

A. Au coin G : elle a fait un autre trajet.

Faux.

Elle a monté le long de $[DH]$: elle s'arrête en H, pas en G.

B. Au coin H, comme la première mouche.

Juste.

Juste : deux trajets différents, un même déplacement de A vers H.

C. Au coin E, au-dessus de son départ.

Faux.
Pour arriver en E, il faudrait monter depuis A ; elle a d'abord longé $[AD]$.

D. On ne peut pas le savoir sans les dimensions.

Faux.
Les dimensions changent les longueurs, pas les coins d'arrivée.

Correction
Les deux mouches partent de A et arrivent en H. Leurs trajets diffèrent, mais le déplacement total est le même : la flèche qui va de A à H, le long de la diagonale du mur $ADHE$.

Deux flèches mises bout à bout se remplacent par une seule. C'est la relation de Chasles, qui reste vraie dans l'espace.

Ces flèches sont des **vecteurs de l'espace**. Dans ce chapitre, tu étends à l'espace le calcul vectoriel du plan : relation de Chasles, produit par un réel, milieu.

Tu t'en sers pour montrer que des points sont alignés, ou situés dans un même plan. Tu démontres aussi des parallélismes de droites et de plans.

Prends ton cahier. Trace un cube $ABCDEFGH$ en perspective. La face du bas est $ABCD$, la face du haut est $EFGH$. Les arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$.

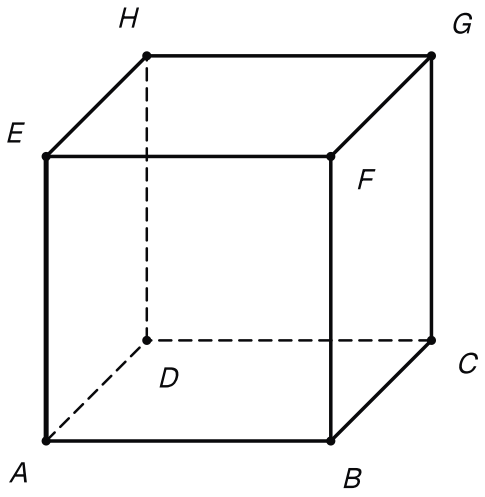
Dessine les arêtes cachées en pointillés. Garde ce dessin sous les yeux : il sert dans tout le chapitre.

Vecteurs de l'espace

Une flèche qu'on fait glisser

Rappel du tronc commun. Dans le plan, un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ a une direction, un sens et une longueur. Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont ces trois éléments en commun.

Dans l'espace, l'idée reste la même : un vecteur est une flèche qu'on fait glisser sans la tourner. Reprends ton cube $ABCDEFGH$, posé sur sa face $ABCD$.



Le cube ABCDEFGH posé sur sa face ABCD, avec l'arête verticale [AE] mise en valeur.

Devine : Une flèche qu'on fait glisser

Dans le cube $ABCDEFGH$, quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AE}$?

A. $\overrightarrow{GC}$

Faux.

Même direction et même longueur, mais cette flèche descend : son sens est contraire.

B. $\overrightarrow{CG}$

Juste.

Juste : une arête verticale, parcourue du bas vers le haut.

C. $\overrightarrow{AB}$

Faux.

Même origine et même longueur, mais pas la même direction.

D. $\overrightarrow{EA}$

Faux.

C'est l'opposé de $\overrightarrow{AE}$: même direction, sens contraire.

Correction

Les arêtes $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur. Les flèches $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CG}$ montent toutes deux, du bas vers le haut.

Elles ont même direction, même sens et même longueur, donc

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}.$$

Définition : Vecteurs de l'espace et égalité de deux vecteurs

Comme dans le plan, à deux points A et B de l'espace on associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$. Lorsque $A \neq B$, il est défini par sa direction (celle de la droite (AB)), son sens (de A vers B) et sa longueur AB. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$. Un vecteur se note aussi par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$.

Soit A, B, C, D quatre points de l'espace. On dit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ lorsque les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu, c'est-à-dire lorsque $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Exemple : des vecteurs égaux dans un cube

Les arêtes $[AB]$, $[DC]$, $[EF]$, $[HG]$ sont parallèles et ont la même longueur. Lues de la première lettre vers la seconde, elles pointent toutes du même côté. Donc :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}.$$

De même, avec les arêtes parallèles à $[AD]$:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}.$$

Contrôle par la définition. Les grandes diagonales $[AG]$ et $[BH]$ ont le même milieu, le centre du cube. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, on retrouve $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, et $ABGH$ est un parallélogramme.

Placer un point

Propriété : Point défini par un vecteur

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un **unique** point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il permet de poser un vecteur à partir de n'importe quel point de l'espace.

Vérifie : Placer un point

Dans le cube, quel est le point M tel que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AC}$?

A. Le point C.

Faux.

Le point C vérifie $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$; ici, la flèche part de E.

B. Le point H.

Faux.
$\overrightarrow{EH}$ est égal à $\overrightarrow{AD}$, pas à $\overrightarrow{AC}$.

C. Le point G.

Juste.
Juste : $[EG]$ est la diagonale de la face du haut, parallèle à $[AC]$.

D. Le point F.

Faux.
$\overrightarrow{EF}$ est égal à $\overrightarrow{AB}$, qui n'est qu'une partie du trajet.

Correction
Le point défini par un vecteur est unique : un seul point M convient.

Les segments $[AG]$ et $[CE]$ ont le même milieu, le centre du cube. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$.

Le point cherché est donc G.

Un piège, puis à toi

Attention : l'ordre des sommets

✗ « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, donc $ABHG$ est un parallélogramme. »

✓ L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne le parallélogramme $ABDC$: les deux dernières lettres s'échangent. Ici, c'est donc $ABGH$.

Dans $ABHG$, les côtés $[BH]$ et $[GA]$ sont deux grandes diagonales du cube. Elles se croisent : ce quadrilatère n'est pas un parallélogramme. Écris toujours les sommets dans l'ordre du contour.

À toi : Des arêtes parallèles

Dans le cube, donne trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{BF}$ dont l'origine est un sommet du cube. Pour l'égalité $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$, nomme ensuite le parallélogramme, sommets dans l'ordre du contour. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche les arêtes parallèles à $[BF]$, et parcours-les du bas vers le haut.
Indice 2
Applique la définition : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donne le parallélogramme $ABDC$.
Indice 3
Point délicat : avec $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$, les deux dernières lettres s'échangent ; le contour est B, F, H, D.

Réponse

Les arêtes verticales sont parallèles et de même longueur, et on les parcourt toutes vers le haut.
Donc :

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}.$$

Pour $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$, la définition donne le parallélogramme $BFHD$.

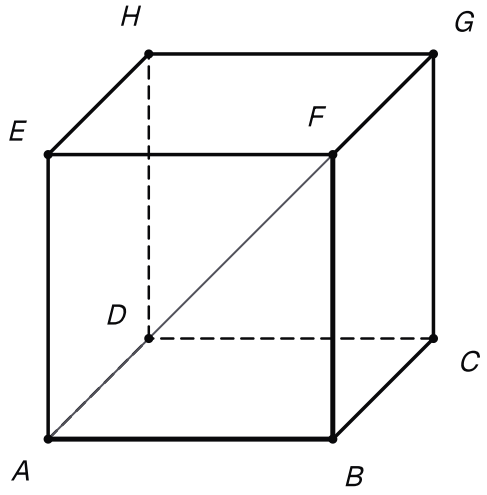
Contrôle : ses diagonales $[BH]$ et $[FD]$ sont deux grandes diagonales du cube. Elles ont le même milieu, le centre du cube.

Somme, relation de Chasles, produit par un réel

Deux déplacements, un seul

En clair. Une fourmi part du sommet A du cube. Elle marche jusqu'à B, puis monte le long de l'arête $[BF]$ jusqu'à F.

Son déplacement total est la flèche $\overrightarrow{AF}$, de son départ à son arrivée. La seconde flèche part du point où finit la première : c'est ce qui permet de les mettre bout à bout.



Le trajet de la fourmi, de A à B puis de B à F, et son déplacement total, de A directement à F.

Devine : Trois trajets bout à bout

La fourmi fait ensuite un troisième trajet, de F à G. Quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$?

A. $\overrightarrow{AF}$

Faux.
C'est le déplacement après deux trajets seulement.

B. $\overrightarrow{AC}$

Faux.
C est sur la face du bas ; or la fourmi est montée.

C. $\overrightarrow{BG}$

Faux.
Le départ est A, pas B.

D. $\overrightarrow{AG}$

Juste.
Juste : du départ A à l'arrivée G.

Correction
Les trajets s'enchaînent : de A vers B, de B vers F, de F vers G. Le déplacement total va du départ A à l'arrivée G :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}.$$

La flèche $\overrightarrow{AG}$ suit une grande diagonale du cube.

Définition : Somme de deux vecteurs et relation de Chasles

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point de l'espace. On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. La **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$; on admet qu'il ne dépend pas du point A choisi.

Ainsi, pour tous points A, B, C de l'espace, on a la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

L'**opposé** de $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, noté $-\overrightarrow{AB}$; on pose $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Exemple : enchaîner les lettres

Lettres qui s'enchaînent. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG},$$
$$\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{ED}.$$

Lettres qui ne s'enchaînent pas. Dans $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$, la seconde flèche ne part pas de B. Or $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$: ce sont deux arêtes verticales parcourues vers le haut. On remplace, puis on applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{AF}.\end{aligned}$$

Multiplier par un réel, calculer

Définition : Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\,\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$; il a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$; sa longueur est celle de $\vec{u}$ multipliée par $|k|$.

On pose de plus $0\,\vec{u} = \vec{0}$ et $k\,\vec{0} = \vec{0}$ pour tout réel k.

Exemple : multiplier par un réel

Soit I le milieu de l'arête $[AE]$.

- $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$: même direction, même sens, longueur moitié.
- $\overrightarrow{EA} = -2\,\overrightarrow{AI}$: même direction, sens contraire, longueur double.
- Si l'arête du cube mesure 4 cm, le vecteur $3\,\overrightarrow{AB}$ a pour longueur 12 cm.

Propriété : Règles de calcul vectoriel

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace et tous réels k et k' :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- $k\,(\vec{u} + \vec{v}) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$ et $(k + k')\,\vec{u} = k\,\vec{u} + k'\,\vec{u}$;
- $k\,(k'\,\vec{u}) = (kk')\,\vec{u}$ et $1\,\vec{u} = \vec{u}$;
- $k\,\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Ce sont les règles du plan : tu développes et tu regroupes comme en calcul littéral.

Vérifie : Développer, regrouper

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, à quoi est égal $3\,(\vec{u} + \vec{v}) - 2\,\vec{u}$?

A. $\vec{u} + 3\,\vec{v}$

Juste.

Juste : $3\,\vec{u} - 2\,\vec{u} = \vec{u}$, et il reste $3\,\vec{v}$.

B. $\vec{u} + \vec{v}$

Faux.

Le facteur 3 multiplie aussi $\vec{v}$.

C. $5\,\vec{u}+3\,\vec{v}$

Faux.

On retranche $2\,\vec{u}$: on ne l'ajoute pas.

D. $3\,\vec{v}$

Faux.

Il reste $3\,\vec{u}-2\,\vec{u}=\vec{u}$, qui n'est pas nul en général.

Correction

D'après les règles de calcul vectoriel, on développe, puis on regroupe les termes en $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}&3\,(\vec{u}+\vec{v})-2\,\vec{u}\\&=3\,\vec{u}+3\,\vec{v}-2\,\vec{u}\\&=(3-2)\,\vec{u}+3\,\vec{v}\\&=\vec{u}+3\,\vec{v}.\end{aligned}$$

Simplifier une expression

Méthode : simplifier une expression vectorielle

1. **Cherche** les vecteurs dont les lettres se suivent, comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. **Réordonne** la somme pour les mettre côte à côte : l'addition est commutative.
3. **Applique** la relation de Chasles, autant de fois qu'il le faut.
4. **Remplace** $-\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{BA}$, ou un vecteur par un vecteur égal, pour créer un enchaînement.

Exemple : simplifier dans le cube

Première somme. Soit $\vec{s}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{FG}$. On réordonne les termes :

$$\vec{s}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}.$$

D'après la relation de Chasles, $\vec{s}=\overrightarrow{EC}$.

Seconde somme. Soit $\vec{t}=\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HD}$. On écrit $-\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DH}$, puis on réordonne :

$$\vec{t}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HB}.$$

D'après la relation de Chasles, $\vec{t}=\overrightarrow{DB}$.

Attention : des lettres qui s'enchaînent

✗ « $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, d'après la relation de Chasles. »

✓ La relation de Chasles exige que le second vecteur parte de l'extrémité du premier. Ici, $\overrightarrow{AE}$ finit en E, et $\overrightarrow{BC}$ part de B.

On remplace d'abord $\overrightarrow{BC}$ par le vecteur égal $\overrightarrow{EH}$. Alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}\\ &= \overrightarrow{AH},\end{aligned}$$

et non $\overrightarrow{AC}$.

À toi : Deux sommes à réduire

Dans le cube, simplifie $\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{BF}$, puis $\vec{z}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour $\vec{w}$, réordonne la somme pour que les lettres se suivent.
Indice 2
Pour $\vec{z}$, remplace $-\overrightarrow{GA}$ par $\overrightarrow{AG}$.
Indice 3
Point délicat : après ce remplacement, écris $\overrightarrow{AG}$ en premier ; alors les deux lettres G se suivent.

Réponse
La somme $\vec{w}$. On réordonne :

$$\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FH}.$$

D'après la relation de Chasles, $\vec{w}=\overrightarrow{AH}$.

La somme $\vec{z}$. Comme $-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AG}$, on a

$$\vec{z}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}.$$

D'après la relation de Chasles, $\vec{z}=\overrightarrow{AC}$: c'est une diagonale de la face du bas.

Règle du parallélogramme et milieu

Deux flèches issues d'un même point

En clair. Sur la face du bas du cube, pars de A. Avance de $\overrightarrow{AB}$, puis de $\overrightarrow{BC}$: tu arrives en C.

Or $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Additionner deux flèches issues de A revient donc à suivre la diagonale du parallélogramme qu'elles forment.

Pourquoi est-ce vrai ? La relation de Chasles fait passer par un sommet, puis les règles de calcul simplifient.

Devine : Deux arêtes issues de A

Dans le cube, quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$?

A. $\overrightarrow{BE}$

Faux.

C'est l'autre diagonale de la face $ABFE$; elle ne part pas de A.

B. $\overrightarrow{AG}$

Faux.

Pour aller jusqu'à G, il manque $\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AF}$

Juste.

Juste : la diagonale de la face $ABFE$ issue de A.

D. $\overrightarrow{AH}$

Faux.

Celle-ci vaut $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Correction

On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{AF}.\end{aligned}$$

Le vecteur somme suit la diagonale du carré $ABFE$ issue de A.

La règle du parallélogramme

Propriété : Règle du parallélogramme

Soit A, B, C, D quatre points de l'espace. Alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \quad \text{si et seulement si} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD},$$

c'est-à-dire si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Démonstration

Étape 1. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut donc à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

Étape 2. On ajoute $-\overrightarrow{AB}$ aux deux membres ; d'après les règles de calcul vectoriel, l'égalité équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Étape 3. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ signifie que $ACDB$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. C'est le quadrilatère $ABDC$, parcouru dans l'autre sens.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve tient en deux gestes.

D'abord, la relation de Chasles **fait passer par** B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

Ensuite, les règles de calcul retranchent $\overrightarrow{AB}$ des deux membres. Il reste $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$: par définition de l'égalité de deux vecteurs, $ABDC$ est un parallélogramme.

Vérifie : Le premier geste de la preuve

Dans la preuve de la règle du parallélogramme, quelle égalité transforme d'abord $\overrightarrow{AD}$?

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

Juste.

Juste : la relation de Chasles, de A à D en passant par B.

B. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

Faux.

Erreur de signe : on ajoute $\overrightarrow{AB}$, on ne le retranche pas.

C. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$

Faux.

Les lettres ne s'enchaînent pas : il faudrait $\overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Faux.

C'est l'égalité à étudier : on ne peut pas la supposer vraie.

Correction

C'est la relation de Chasles : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$.

L'égalité étudiée devient

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.$$

On retranche $\overrightarrow{AB}$ des deux membres : il reste $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Exemple : la grande diagonale du cube

La face du bas. La face $ABCD$ est un carré, donc un parallélogramme. D'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

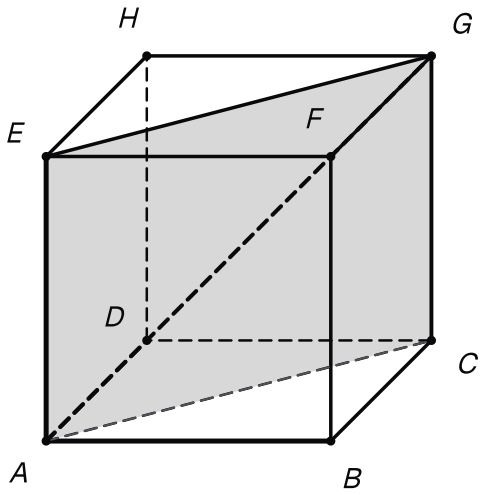
Le rectangle $ACGE$. Ses côtés $[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles et de même longueur. D'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}.$$

Conclusion. On remplace $\overrightarrow{AC}$ dans la seconde égalité :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

La grande diagonale est la somme des trois arêtes issues de A.



La grande diagonale [AG] obtenue en deux temps : d'abord la diagonale [AC] du bas, puis le rectangle ACGE.

À retenir : la grande diagonale du cube

Dans le cube :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

La grande diagonale issue de A est la somme des trois arêtes issues de A. Ce résultat sert dans tout le chapitre, sous le nom d'« exemple de la grande diagonale ».

Le milieu d'un segment

En clair. Le milieu I d'un segment $[AB]$ est à mi-chemin. Les flèches $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont la même longueur et des sens contraires : elles se compensent.

Pourquoi est-ce vrai ? On insère I dans chaque flèche issue d'un point M, avec la relation de Chasles.

Propriété : Milieu d'un segment

Soit A et B deux points de l'espace et I le milieu du segment $[AB]$. Alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et, **pour tout point** M de l'espace,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}.$$

Démonstration

Étape 1. Le segment $[II]$ est réduit au point I, qui est donc son milieu : les segments $[AB]$ et $[II]$ ont le même milieu I. Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$. Comme $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IA}$, on obtient $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Étape 2. Soit M un point de l'espace. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.

Étape 3. On additionne ces deux égalités ; d'après les règles de calcul vectoriel, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$. D'après l'étape 1, la parenthèse est nulle, donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : **insérer le milieu** I dans chaque vecteur, avec la relation de Chasles. Par exemple, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$.

On additionne les deux égalités. Les termes $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ se compensent, car I est le milieu de $[AB]$. Il reste $2\,\overrightarrow{MI}$.

Le milieu au travail, puis à toi

Vérifie : Deux termes qui disparaissent

Dans la preuve, pourquoi la somme $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ est-elle nulle ?

A. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB}$.

Faux.

Cette égalité est vraie, mais elle ne rend aucune somme nulle.

B. Parce que M est un point quelconque.

Faux.

Le point M n'apparaît pas dans cette somme.

C. Parce que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, par définition.

Juste.

Juste : les segments $[AB]$ et $[II]$ ont le même milieu I.

D. Parce que A, I, B sont alignés.

Faux.

Trois points alignés ne donnent pas, à eux seuls, une somme nulle.

Correction

Le segment $[II]$ est réduit au point I : les segments $[AB]$ et $[II]$ ont donc le même milieu I.

Par définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$. Comme $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IA}$, on obtient $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Exemple : deux milieux d'un tétraèdre

Un tétraèdre $ABCD$ a quatre sommets, six arêtes et quatre faces triangulaires. Soit I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

Deux chemins de I à J. D'après la relation de Chasles :

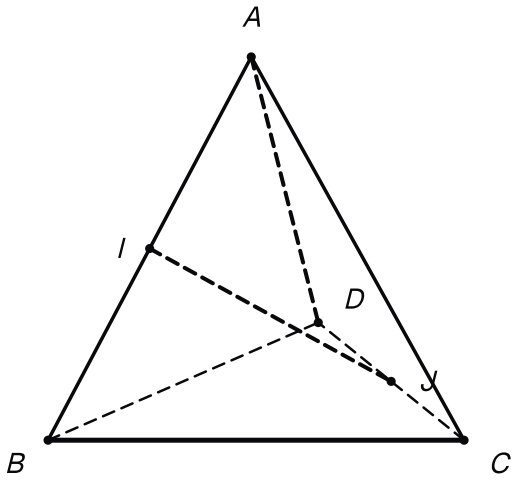
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ},$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}.$$

Somme. On additionne ces deux égalités. D'après la propriété du milieu d'un segment, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$. Il reste

$$2\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Conclusion. On divise par 2 :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right).$$



Le tétraèdre ABCD, I milieu de [AB], J milieu de [CD], et le segment [IJ] qui relie ces deux arêtes opposées.

À toi : Le milieu d'une arête du haut

Dans le cube, soit K le milieu de l'arête $[FG]$. Exprime $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la propriété du milieu d'un segment à $[FG]$, avec le point $M = A$.

Indice 2

Exprime $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ avec les trois arêtes issues de A : la règle du parallélogramme les a déjà donnés.

Indice 3

Point délicat : divise toute la somme par 2, sans oublier aucun terme.

Réponse

Le milieu K. D'après la propriété du milieu d'un segment, avec $M = A$:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{AK}.$$

Les deux vecteurs. D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$. D'après l'exemple de la grande diagonale, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Conclusion. On additionne :

$$2\,\overrightarrow{AK} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{AE},$$

soit

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

Vecteurs colinéaires, droites, alignement

Des vecteurs de même direction

Rappel du tronc commun. Dans le plan, deux vecteurs sont colinéaires lorsque l'un est un multiple de l'autre. Trois points A, B, C sont alignés lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Dans l'espace, ces deux idées restent vraies. Elles deviennent l'outil principal pour étudier les droites.

Devine : Une même direction

Dans le cube, lequel de ces vecteurs est colinéaire à $\overrightarrow{AE}$?

A. $\overrightarrow{AB}$

Faux.

Une arête horizontale : ce n'est pas la direction de $[AE]$.

B. $\overrightarrow{EG}$

Faux.

Une diagonale de la face du haut : elle reste horizontale.

C. $\overrightarrow{AG}$

Faux.

Elle monte, mais en biais : sa direction n'est pas celle de $[AE]$.

D. $\overrightarrow{HD}$

Juste.

Juste : $\overrightarrow{HD} = -\overrightarrow{AE}$.

Correction

Les arêtes $[AE]$ et $[DH]$ sont parallèles et de même longueur. La flèche $\overrightarrow{HD}$ descend, alors que $\overrightarrow{AE}$ monte :

$$\overrightarrow{HD} = -\overrightarrow{AE}.$$

Les deux vecteurs sont colinéaires, avec le réel $k = -1$.

Définition : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur. Deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Exemple : reconnaître des vecteurs colinéaires

Soit I le milieu de $[AE]$ et J celui de $[CG]$.

Arêtes verticales. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AI}$: ces vecteurs sont colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}.$$

Or $\overrightarrow{IA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Ces deux termes se compensent, donc

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}.$$

Contre-exemple. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires : ils n'ont pas la même direction.

Un point et une direction

Propriété : Définition vectorielle d'une droite

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, où t est un réel, est une droite : c'est la droite passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u}$, notée $D(A, \vec{u})$.

En particulier, si $A \neq B$, la droite (AB) est la droite $D(A, \overrightarrow{AB})$. Trois points A, B, C, avec $A \neq B$, sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Une droite est donc déterminée par un point et une direction.

Vérifie : Aligné ou non ?

Dans le cube, soit O le centre de la face $ABCD$, c'est-à-dire le milieu de $[AC]$. Lequel de ces triplets de points est aligné ?

A. B, O, D

Juste.
Juste : les diagonales du carré $ABCD$ se coupent en leur milieu O.

B. A, O, E

Faux.
$\overrightarrow{AE}$ monte, alors que $\overrightarrow{AO}$ reste dans la face du bas.

C. E, G, O

Faux.
O est dans la face du bas, alors que $[EG]$ est dans celle du haut.

D. A, O, G

Faux.
$\overrightarrow{AG}$ monte, alors que $\overrightarrow{AO}$ reste dans la face du bas.

Correction
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré $ABCD$ ont le même milieu O. Donc

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. D'après la définition vectorielle d'une droite, B, O, D sont alignés.

Démontrer un alignement

Méthode : démontrer que trois points sont alignés

1. **Choisis** deux vecteurs de même origine, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. **Exprime** ces deux vecteurs avec des vecteurs connus, comme les arêtes issues d'un sommet, grâce à la relation de Chasles.

3. **Trouve** un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$.

4. **Conclus** avec la définition vectorielle d'une droite : A, B, C sont alignés.

Exemple : un alignement dans le cube

Soit S le milieu de la grande diagonale $[AG]$. Montrons que B, S, H sont alignés. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AS}$. D'après l'exemple de la grande diagonale :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right).\end{aligned}$$

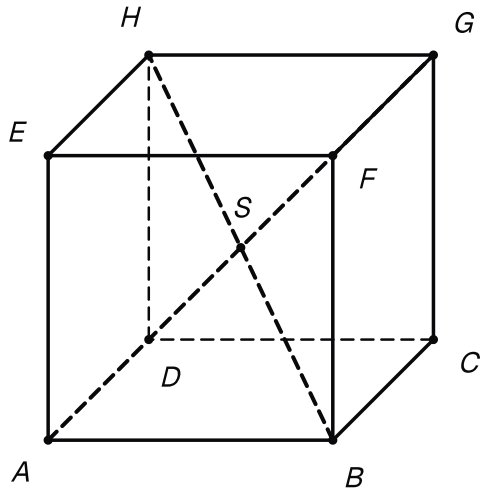
Le vecteur $\overrightarrow{BS}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BS} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} \\ &= -\vec{u} + \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right).\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$. D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AH} = \vec{v} + \vec{w}$. Avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \\ &= -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.\end{aligned}$$

Conclusion. On a $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$. D'après la définition vectorielle d'une droite, B, S, H sont alignés.



S, milieu de la grande diagonale [AG], est aussi sur la diagonale [BH] : B, S et H sont alignés.

Droites parallèles

Propriété : Droites parallèles

Soit $D(A, \vec{u})$ et $D(B, \vec{v})$ deux droites de l'espace. Elles sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il relie le parallélisme de deux droites, vu au tronc commun, à leurs vecteurs directeurs.

Exemple : des milieux dans un tétraèdre

Dans le tétraèdre $ABCD$, soit I, J, K, L les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[DB]$, $[DC]$.

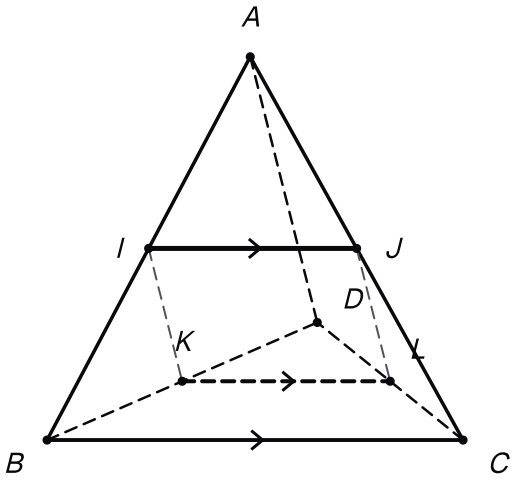
Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{KL}$. De même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. D'après la propriété des droites parallèles, (IJ) et (BC) sont parallèles. De plus, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$: $IJLK$ est un parallélogramme.



Dans le tétraèdre ABCD, [IJ] et [KL] ont la même direction que [BC] : les trois portent le même chevron.

Méthode : démontrer que deux droites sont parallèles

1. **Choisis** un vecteur directeur de chaque droite : $\overrightarrow{AB}$ pour (AB), $\overrightarrow{CD}$ pour (CD).
2. **Exprime** ces deux vecteurs avec des vecteurs connus.
3. **Montre** qu'ils sont colinéaires : $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$.
4. **Conclus** avec la propriété des droites parallèles ; si les droites ont un point commun, elles sont confondues.

Un piège, puis à toi

Attention : colinéaires ne veut pas dire alignés

✗ « $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, donc I, J, B, C sont alignés. »

✓ Ces vecteurs colinéaires donnent deux droites (IJ) et (BC) parallèles, pas un alignement. Dans le tétraèdre, I n'est pas sur la droite (BC).

Pour un alignement, compare deux vecteurs qui ont un point **commun**, comme $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{BH}$ dans le cube.

À toi : Deux droites parallèles dans le cube

Dans le cube, soit M le milieu de $[EF]$ et N le milieu de $[FG]$. Montre que les droites (MN) et (AC) sont parallèles. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Décompose $\overrightarrow{MN}$ en passant par F, avec la relation de Chasles.
Indice 2
Remplace $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ par des arêtes égales issues de A.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{MF}$ vaut la moitié de $\overrightarrow{EF}$, et non de $\overrightarrow{FE}$; garde le sens des flèches.

Réponse
Le vecteur $\overrightarrow{MN}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$. D'après la règle du parallélogramme :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. D'après la propriété des droites parallèles, (MN) et (AC) sont parallèles.

Plans et vecteurs coplanaires

Une feuille sur trois pointes

En clair. Pose une feuille rigide sur trois pointes de crayon qui ne sont pas alignées : elle tient, dans une seule position. Trois points non alignés déterminent un plan.

Pour atteindre un point de ce plan à partir de A, deux directions suffisent : on avance selon l'une, puis selon l'autre.

Devine : Deux directions suffisent

Dans le cube, on part de A et on ne se déplace que selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, aussi loin qu'on veut, dans un sens ou dans l'autre. Quel sommet peut-on atteindre ?

A. Le sommet E.
Faux.
Pour atteindre E, il faut monter selon $\overrightarrow{AE}$.

B. Le sommet G.
Faux.
G est dans la face du haut : il faut aussi monter.

C. Le sommet C.
Juste.

Juste : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

D. Le sommet F.

Faux.

F est au-dessus de B : il faut aussi monter.

Correction

On reste dans le plan de la face du bas. Le sommet C est dans ce plan :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Les sommets E, F, G sont dans la face du haut ; pour les atteindre, il faut monter selon $\overrightarrow{AE}$.

Un point et deux directions

Propriété : Définition vectorielle d'un plan

Soit A, B, C trois points **non alignés** de l'espace. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe deux réels x et y tels que

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}.$$

Plus généralement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **non colinéaires**, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec x et y réels, est un plan, noté $P(A, \vec{u}, \vec{v})$; on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **dirigent** ce plan.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il traduit avec des vecteurs un fait du tronc commun : trois points non alignés déterminent un plan.

Exemple : un point d'un plan

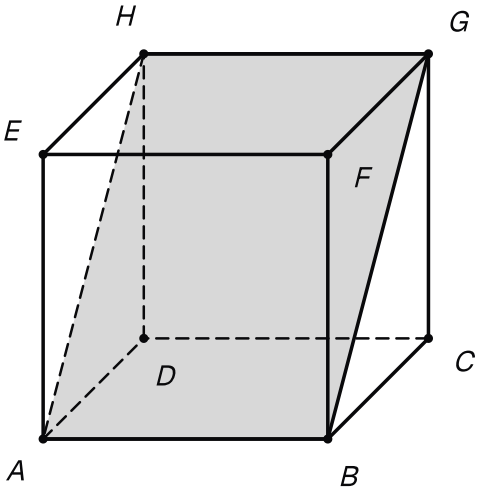
Les points A, B, G ne sont pas alignés. Le sommet H est-il dans le plan (ABG) ?

Deux décompositions. D'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. D'après l'exemple de la grande diagonale, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Combinaison. On en déduit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} \\ &= -1\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AG}.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition vectorielle d'un plan, avec $x = -1$ et $y = 1$, le point H appartient au plan (ABG). Le quadrilatère $ABGH$ est en effet un rectangle.



Le plan (ABG) coupe le cube suivant le rectangle ABGH : le sommet H est bien dans ce plan.

Des vecteurs coplanaires

Définition : Vecteurs coplanaires

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs et O un point de l'espace. On construit les points M, N, P tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OP} = \vec{w}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsque les quatre points O, M, N, P sont dans un même plan. On admet que cela ne dépend pas du point O choisi.

En particulier, quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** (situés dans un même plan) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Attention : quatre points ne sont pas toujours coplanaires

✗ « Trois points sont toujours dans un même plan ; donc les quatre sommets A, B, C, D d'un tétraèdre le sont aussi. »

✓ Trois points sont toujours dans un même plan ; quatre points, pas forcément. Dans le tétraèdre $ABCD$, le sommet D n'est pas dans le plan (ABC) de la face opposée.

La coplanarité de quatre points se démontre.

Vérifie : Coplanaires ou non ?

Dans le cube, lequel de ces triplets est formé de vecteurs coplanaires ?

A. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EG}$

Juste.

Juste : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$, et A, B, D, C sont dans la face du bas.

B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$

Faux.

Les points A, B, D, E ne sont pas coplanaires : E n'est pas dans la face du bas.

C. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG}$

Faux.

G est dans la face du haut, hors du plan de la face du bas.

D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH}$

Faux.

H n'est pas dans la face $ABFE$.

Correction

Par définition des vecteurs coplanaires, on construit les trois flèches à partir d'un même point, ici A. Comme $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$, on obtient les points A, B, D, C : ils sont tous dans la face du bas.

Les trois vecteurs sont donc coplanaires. Remarque : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Coplanarité et combinaison

Dans l'activité, le troisième vecteur s'écrivait avec les deux premiers. C'est un critère général, à une condition : les deux premiers vecteurs ne doivent pas être colinéaires.

Pourquoi est-ce vrai ? On construit les trois flèches à partir d'un même point, puis on applique la définition vectorielle d'un plan.

Propriété : Coplanarité et combinaison de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**, et $\vec{w}$ un vecteur de l'espace. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que

$$\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit O un point de l'espace. On construit les points M, N, P tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OP} = \vec{w}$. Comme $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u} \neq \vec{0}$ (le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur), donc $O \neq M$; d'après la définition vectorielle d'une droite, O, M, N ne sont pas alignés. Ils déterminent un seul plan, le plan (OMN) (tronc commun).

Étape 2. Par définition des vecteurs coplanaires, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si O, M, N, P sont dans un même plan, c'est-à-dire si et seulement si P appartient au plan (OMN).

Étape 3. D'après la définition vectorielle d'un plan, P appartient au plan (OMN) si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{OM} + y\,\overrightarrow{ON}$, c'est-à-dire $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **ramène tout à un même point** O, d'où partent les trois flèches.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, O, M, N ne sont pas alignés : ils déterminent un seul plan. Être coplanaires revient alors à dire que P est dans ce plan.

La définition vectorielle d'un plan donne la combinaison $x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.

Vérifie : Le rôle de l'hypothèse

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires » ?

A. À pouvoir appliquer la relation de Chasles.
Faux.
La relation de Chasles s'applique toujours, sans condition.

B. À obtenir O, M, N non alignés, donc un seul plan.
Juste.
Juste : sans elle, la définition vectorielle d'un plan ne s'applique pas.

C. À garantir que $\vec{w}$ n'est pas le vecteur nul.
Faux.
L'énoncé n'exige rien sur $\vec{w}$.

D. À rendre les réels x et y positifs.
Faux.
Les réels x et y peuvent être de tout signe.

Correction
Avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, les points O, M, N ne sont pas alignés, d'après la définition vectorielle d'une droite. Ils déterminent donc un seul plan, (OMN).

C'est ce plan qui permet d'appliquer la définition vectorielle d'un plan.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : démontrer que quatre points sont coplanaires

1. **Forme** trois vecteurs de même origine : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. **Vérifie** que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
3. **Cherche** deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.
4. **Conclus** avec la coplanarité et la combinaison de deux vecteurs : A, B, C, D sont coplanaires.

Exemple : un point de la face du bas

Dans le cube, soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Les points A, B, D, M sont-ils coplanaires ?

Non-colinéarité. Les points A, B, D sont trois sommets de la face du bas : ils ne sont pas alignés, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

Combinaison. L'égalité donnée s'écrit $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AD}$, avec $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}$.

Conclusion. D'après la coplanarité et la combinaison de deux vecteurs, A, B, D, M sont coplanaires : M est dans le plan de la face du bas. C'est même le milieu de $[BC]$.

Attention : deux vecteurs non colinéaires d'abord

✗ « Je cherche x et y tels que $\overrightarrow{AE} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{DC}$. Je n'en trouve pas, donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. »

✓ Le critère exige que les deux premiers vecteurs ne soient pas colinéaires. Ici, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$: choisis d'autres vecteurs.

Avec $\overrightarrow{DC} = 1\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AE}$, les trois vecteurs sont en fait coplanaires.

À toi : Quatre points du cube

Dans le cube, soit I le milieu de $[AE]$ et J celui de $[CG]$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Montre que les points B, I, J, H sont coplanaires. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Exprime $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, avec la relation de Chasles.
Indice 2
On a déjà $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$: additionne $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$, puis compare.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires, car J n'est pas dans le plan de la face $ABFE$, qui contient B et I.

Réponse
Trois vecteurs issus de B. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \\ &= -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}.\end{aligned}$$

De même, comme $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{CG} = \vec{w}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BJ} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} \\ &= \vec{v} + \frac{1}{2}\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Enfin, $\overrightarrow{AH} = \vec{v} + \vec{w}$ d'après la règle du parallélogramme, donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \\ &= -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}.\end{aligned}$$

Combinaison. En additionnant les deux premiers résultats, on trouve $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BJ}$.

Non-colinéarité. Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ ne sont pas colinéaires : sinon J serait sur la droite (BI), dans le plan de la face $ABFE$, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion. D'après la coplanarité et la combinaison de deux vecteurs, B, I, J, H sont coplanaires.

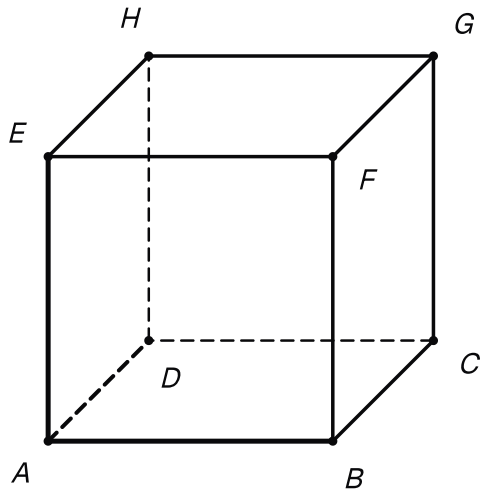
Trois vecteurs non coplanaires

Trois arêtes d'un coin

En clair. Au sommet A du cube partent trois arêtes : $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$. Elles ne sont pas dans un même plan.

Avec ces trois directions, on atteint n'importe quel point : on avance, on va sur le côté, on monte.

Pourquoi est-ce vrai ? Les trois nombres de pas sont uniques : sinon, l'une des directions s'écrirait avec les deux autres.



Au coin A, trois arêtes partent dans trois directions : [AB] pour avancer, [AD] pour aller sur le côté, [AE] pour monter.

Devine : Revenir au départ

On part de A. On se déplace de $x\,\overrightarrow{AB}$, puis de $y\,\overrightarrow{AD}$, puis de $z\,\overrightarrow{AE}$, et on revient exactement en A. Que peux-tu dire des réels x, y, z ?

A. Ils sont égaux, de valeur quelconque.

Faux.

Avec $x = y = z = 1$, le déplacement vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$, qui n'est pas nul.

B. Ils sont tous les trois nuls.

Juste.

Juste : chaque direction est indispensable, aucune ne compense les autres.

C. Seul z est nul ; x et y sont quelconques.

Faux.

Avec $x = y = 1$ et $z = 0$, le déplacement vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$: on arrive en C, pas en A.

D. Ils peuvent prendre n'importe quelles valeurs.

Faux.

Avec $x = 1$ et $y = z = 0$, on arrive en B, pas en A.

Correction

Seul le déplacement selon $\overrightarrow{AE}$ fait monter : pour revenir à la hauteur de A, il faut $z = 0$.

Il reste un trajet dans la face du bas, selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, qui ne sont pas colinéaires. Pour revenir en A, il faut alors $x = 0$ et $y = 0$.

L'énoncé qui suit le démontre.

Identifier les coefficients

Propriété : Trois vecteurs non coplanaires

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace, et x, y, z trois réels. Si $x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{w} = \vec{0}$, alors $x = y = z = 0$.

Par conséquent, si $x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{w} = x'\,\vec{u} + y'\,\vec{v} + z'\,\vec{w}$, alors $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$: on peut **identifier les coefficients**.

Démonstration

Étape 1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Sinon, les points O, M, N de la définition des vecteurs coplanaires seraient alignés ($M = O$ si $\vec{u} = \vec{0}$, définition vectorielle d'une droite sinon) ; une droite et un point étant dans un même plan (tronc commun), $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ seraient coplanaires.

Étape 2. Supposons par l'absurde que $z \neq 0$. Alors $\vec{w} = -\dfrac{x}{z}\,\vec{u} - \dfrac{y}{z}\,\vec{v}$ et, d'après la coplanarité et la combinaison de deux vecteurs, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ seraient coplanaires : contradiction. Donc $z = 0$.

Étape 3. Il reste $x\,\vec{u} + y\,\vec{v} = \vec{0}$. Si $x \neq 0$, alors $\vec{u} = -\dfrac{y}{x}\,\vec{v}$, ce qui contredit l'étape 1 ; donc $x = 0$. Enfin $y\,\vec{v} = \vec{0}$, et $\vec{v} \neq \vec{0}$ car le vecteur nul est colinéaire à $\vec{u}$ (étape 1), donc $y = 0$ (règles de calcul vectoriel).

Étape 4. Pour l'identification, on applique ce qui précède à $(x - x')\,\vec{u} + (y - y')\,\vec{v} + (z - z')\,\vec{w} = \vec{0}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve procède **par l'absurde**, coefficient par coefficient.

Si $z \neq 0$, on isole $\vec{w}$: il devient une combinaison de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et les trois vecteurs seraient coplanaires. Donc $z = 0$.

Le même argument, avec la non-colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donne $x = 0$, puis $y = 0$.

Vérifie : Ce qui est contredit

Dans la preuve, si $z \neq 0$, quelle hypothèse est contredite ?

A. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Faux.
Ce n'est pas une hypothèse de l'énoncé ; c'est même faux ici.

B. Le vecteur $\vec{w}$ est nul.

Faux.
L'énoncé ne suppose pas cela ; trois vecteurs non coplanaires ne sont d'ailleurs jamais nuls.

C. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Juste.
Juste : $\vec{w}$ s'écrirait avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

D. La somme $x + y + z$ est nulle.

Faux.
L'énoncé ne fait aucune hypothèse sur cette somme.

Correction
Si $z \neq 0$, on isole $\vec{w}$ dans l'égalité :

$$\vec{w} = -\frac{x}{z}\,\vec{u} - \frac{y}{z}\,\vec{v}.$$

D'après la coplanarité et la combinaison de deux vecteurs, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ seraient coplanaires. Cela contredit l'hypothèse : donc $z = 0$.

La méthode au travail

Méthode : identifier les coefficients

1. **Choisis** trois vecteurs non coplanaires, par exemple les trois arêtes d'un cube issues d'un même sommet.
2. **Exprime** chaque vecteur de la question avec ces trois vecteurs, par la relation de Chasles.
3. **Écris** l'égalité sous la forme $x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{w} = x'\,\vec{u} + y'\,\vec{v} + z'\,\vec{w}$.
4. **Identifie** les coefficients : $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, puis résous.

Exemple : deux grandes diagonales se coupent

Les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires : E n'est pas dans le plan de la face $ABCD$.

Cherchons un point M et deux réels t et s tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EM} = s\,\overrightarrow{EC}$.

Première écriture. D'après l'exemple de la grande diagonale :

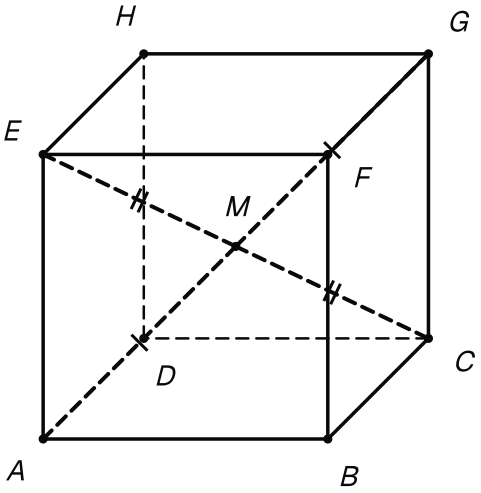
$$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + t\,\vec{v} + t\,\vec{w}.$$

Seconde écriture. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$. Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} \\ &= \vec{w} + s\,(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \\ &= s\,\vec{u} + s\,\vec{v} + (1 - s)\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Identification. D'après la propriété des trois vecteurs non coplanaires, on identifie les coefficients : $t = s$ et $t = 1 - s$. Donc $s = 1 - s$, puis $t = s = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Les diagonales $[AG]$ et $[EC]$ se coupent en leur milieu.



Les grandes diagonales [AG] et [EC] se rencontrent au point M, milieu de chacune d'elles.

Vérifie : Identifier dans le cube

Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, on sait que $a\,\vec{u} + 2\,\vec{v} + b\,\vec{w} = 3\,\vec{u} + c\,\vec{v} - \vec{w}$. Que valent a, b, c ?

A. $a = 3, b = -1, c = 2$

Juste.

Juste : on identifie les coefficients de $\vec{u}$, $\vec{w}$, puis $\vec{v}$.

B. $a = 3, b = 1, c = 2$

Faux.

Le coefficient de $\vec{w}$ à droite est -1, pas 1.

C. $a = 2, b = -1, c = 3$

Faux.

Tu as échangé les coefficients de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

D. Impossible à dire : trois inconnues.

Faux.

Une seule égalité suffit : elle donne trois égalités de coefficients.

Correction

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. D'après la propriété des trois vecteurs non coplanaires, on identifie les coefficients :

- devant $\vec{u}$: $a = 3$;
- devant $\vec{v}$: $2 = c$;
- devant $\vec{w}$: $b = -1$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un point hors d'une diagonale

On reprend $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, et le milieu K de $[FG]$: on a trouvé $\overrightarrow{AK} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$. Le point K appartient-il à la droite (AG) ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Si K était sur (AG), il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{AK} = k\,\overrightarrow{AG}$.
Indice 2
Écris $k\,\overrightarrow{AG}$ avec $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, puis identifie les coefficients.
Indice 3
Point délicat : le raisonnement est par l'absurde ; annonce-le, puis montre que deux coefficients donnent deux valeurs différentes de k.

Réponse
Raisonnons par l'absurde : supposons K sur la droite (AG).

Traduction. D'après la définition vectorielle d'une droite, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AK} = k\,\overrightarrow{AG}$. D'après l'exemple de la grande diagonale, $k\,\overrightarrow{AG} = k\,\vec{u} + k\,\vec{v} + k\,\vec{w}$. Donc

$$\begin{aligned}&\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}\\ &= k\,\vec{u} + k\,\vec{v} + k\,\vec{w}.\end{aligned}$$

Identification. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. D'après la propriété des trois vecteurs non coplanaires, on identifie : $k = 1$ et $k = \frac{1}{2}$. C'est impossible.

Conclusion. Le point K n'appartient pas à la droite (AG).

Remarque : Coin devoir : rédiger une identification

En devoir, une identification se rédige en deux phrases. Écris :

« Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires, car E n'est pas dans le plan (ABD). D'après la propriété des trois vecteurs non coplanaires, on identifie les coefficients. »

Justifie d'abord la non-coplanarité, puis nomme la propriété : sans elle, l'identification n'a pas de fondement.

Droite parallèle à un plan, plans parallèles

Une règle au-dessus d'une table

En clair. Tiens une règle à plat au-dessus d'une table, sans la pencher. Elle ne touche jamais la table : elle est parallèle au plan de la table.

Sa direction est une direction « de la table » : on l'obtient en combinant deux directions tracées sur la table.

Devine : Parallèle à la face du bas ?

Dans le cube, laquelle de ces droites est parallèle au plan (ABC) de la face du bas ?

A. La droite (AG).
Faux.
Elle passe par A, dans la face du bas, puis monte vers G.

B. La droite (DH).
Faux.
C'est une arête verticale : elle traverse la face du bas.

C. La droite (BH).
Faux.
Elle passe par B, dans la face du bas, puis monte vers H.

D. La droite (EG).
Juste.
Juste : elle est dans la face du haut, et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Correction
La droite (EG) est dans la face du haut, qui ne rencontre pas la face du bas. Son vecteur directeur vérifie

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

C'est une combinaison de deux vecteurs qui dirigent le plan (ABC).

Les trois autres droites montent : elles rencontrent le plan de la face du bas.

Droite parallèle à un plan

Propriété : Droite parallèle à un plan

Soit $D(A, \vec{w})$ une droite et $P(B, \vec{u}, \vec{v})$ un plan de l'espace. La droite $D(A, \vec{w})$ est **parallèle** au plan $P(B, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il traduit avec des vecteurs le parallélisme d'une droite et d'un plan, vu au tronc commun.

Exemple : une droite parallèle à une face

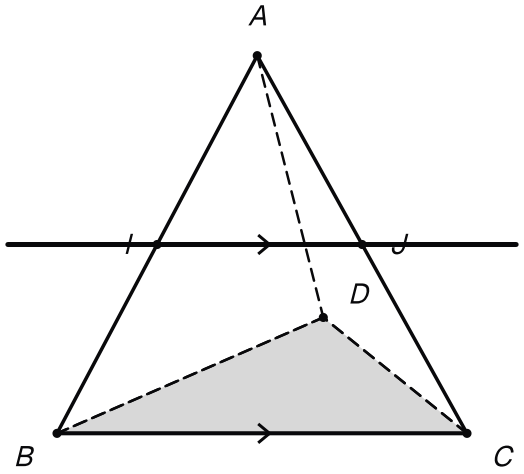
Dans le tétraèdre $ABCD$, soit I et J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. On a vu que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Le plan. Le plan (BCD) est dirigé par $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, non colinéaires, car B, C, D ne sont pas alignés.

La droite. Son vecteur directeur s'écrit

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 0\,\overrightarrow{BD}.$$

Conclusion. D'après la propriété de la droite parallèle à un plan, la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).



La droite (IJ) est parallèle à l'arête [BC], donc au plan de la face BCD, teintée.

La méthode

Méthode : démontrer un parallélisme avec un plan

1. **Choisis** deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui dirigent le plan.
2. **Droite** de vecteur directeur $\vec{w}$: cherche deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.
3. **Plan** dirigé par $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$: écris chacun d'eux sous la forme $x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.
4. **Conclus** : la droite est parallèle au plan, ou les deux plans sont parallèles, d'après la propriété correspondante.

Vérifie : Quelle droite est parallèle au plan ?

Dans le cube, le plan (BDE) est dirigé par $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$, non colinéaires. Laquelle de ces droites est parallèle à ce plan ?

A. La droite (AG).

Faux.
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ ne s'écrit pas avec $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.

B. La droite (DG).

Faux.
$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ ne s'écrit pas avec $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.

C. La droite (CE).

Faux.
$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ ne s'écrit pas avec $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$.

D. La droite (CF).

Juste.
Juste : $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD}$.

Correction
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AD}, \vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CF}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = -\vec{v} + \vec{w}$.

Combinaison. On a $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{BE} = \vec{w} - \vec{u}$. Donc

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD}\\ &= (\vec{w} - \vec{u}) - (\vec{v} - \vec{u})\\ &= \vec{w} - \vec{v}.\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD}$.

Conclusion. D'après la propriété de la droite parallèle à un plan, (CF) est parallèle au plan (BDE).

Deux plans parallèles

Propriété : Plans parallèles

Soit $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $P(B, \vec{u}', \vec{v}')$ deux plans de l'espace. Ils sont **parallèles** si et seulement si chacun des vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ s'écrit sous la forme $x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec x et y réels.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Deux plans parallèles ont les mêmes directions : chaque direction de l'un est une direction de l'autre.

Exemple : deux plans parallèles dans le cube

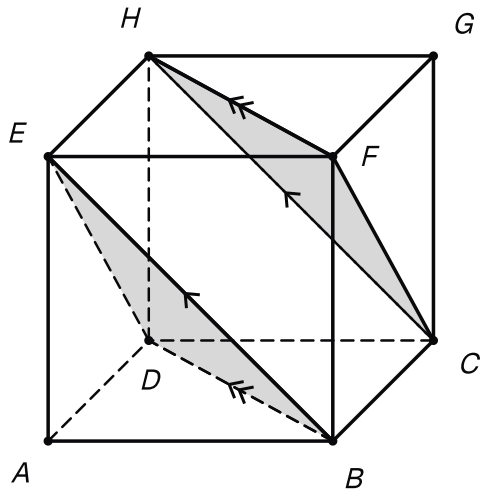
On garde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AD}, \vec{w} = \overrightarrow{AE}$, et l'on compare les plans (BDE) et (CFH).

Premier plan. Le plan (BDE) est dirigé par $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{BE} = \vec{w} - \vec{u}$, non colinéaires, car B, D, E ne sont pas alignés.

Second plan. Le plan (CFH) est dirigé par $\overrightarrow{CF} = \vec{w} - \vec{v}$ et $\overrightarrow{CH} = \vec{w} - \vec{u}$, non colinéaires, car C, F, H ne sont pas alignés.

Comparaison. Or $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$.

Conclusion. D'après la propriété des plans parallèles, les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.



Les triangles BDE et CFH, coupés dans le cube : les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

Un piège, à toi, le coin devoir

Attention : parallèle à un plan, pas à toutes ses droites

✗ « La droite (EG) est parallèle au plan (ABC), donc elle est parallèle à la droite (AB). »

✓ Une droite parallèle à un plan n'est pas parallèle à toutes les droites de ce plan. Ici, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

La droite (EG) est parallèle à (AC) : une seule direction du plan parmi d'autres.

À toi : Une droite et un plan du cube

Dans le cube, soit M le milieu de $[EF]$ et N le milieu de $[DC]$. Montre que la droite (MN) est parallèle au plan (BDE). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Exprime $\overrightarrow{MN}$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, en passant par E, A et D.
Indice 2
Le plan (BDE) est dirigé par $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{BE} = \vec{w} - \vec{u}$.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\,\vec{u}$; ces deux termes se compensent.

Réponse
Le vecteur $\overrightarrow{MN}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} \\ &\quad + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{ME} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\,\vec{u}$: ces deux termes se compensent. Comme $\overrightarrow{EA} = -\vec{w}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$:

$$\overrightarrow{MN} = \vec{v} - \vec{w}.$$

Le plan. Le plan (BDE) est dirigé par $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$ et $\overrightarrow{BE} = \vec{w} - \vec{u}$, non colinéaires. Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} &= \vec{v} - \vec{w} \\ &= \overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la propriété de la droite parallèle à un plan, (MN) est parallèle au plan (BDE).

Remarque : Coin devoir : rédiger un parallélisme

En devoir, nomme les deux vecteurs qui dirigent le plan, et vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires. Écris par exemple :

« Le plan (BDE) est dirigé par $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$, non colinéaires. Or $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE}$. D'après la propriété de la droite parallèle à un plan, (MN) est parallèle à (BDE). »

Pour deux plans, fais ce travail pour chacun des deux vecteurs du second plan.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Simplifier** une somme de vecteurs : relation de Chasles, en enchaînant les lettres.
- **Milieu** I de $[AB]$: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$, pour tout point M.

- **Alignement** de A, B, C, avec $A \neq B$: $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, deux vecteurs de même origine.
- **Droites parallèles** : des vecteurs directeurs colinéaires.
- **Points coplanaires** : $\overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$, avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires.
- **Identifier** des coefficients : trois vecteurs non coplanaires, comme trois arêtes d'un cube issues d'un sommet.
- **Parallélisme avec un plan** : une combinaison des deux vecteurs qui le dirigent.

Le mot du prof. Dans l'espace, un dessin peut tromper : deux droites qui semblent se couper ne se rencontrent pas toujours. Les vecteurs, eux, ne trompent pas.

Choisis trois arêtes issues d'un même sommet, exprime tout avec elles, puis calcule. Au chapitre suivant, la géométrie analytique de l'espace prolonge ce travail.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Vecteurs de l'espace » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)