BURHAN

Résumé : Suites numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/resume

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Suite, terme, modes de définition

Définition : Suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite numérique** est une fonction qui, à chaque entier naturel $n \geq n_0$, associe un nombre réel noté u_n. On la note $(u_n)_{n\geq n_0}$, ou simplement (u_n).

Le réel u_n est le **terme d'indice** n de la suite, appelé aussi son **terme général** ; le **premier terme** est u_{n_0}. Lorsque $n_0 = 0$, on note aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition : Modes de définition d'une suite

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ peut être définie :

- **de façon explicite**, par une formule $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$: chaque terme se calcule directement à partir de son indice ;
- **par récurrence**, par la donnée de son premier terme u_{n_0} et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier $n \geq n_0$, où f est une fonction : chaque terme se calcule à partir du précédent.

Une définition par récurrence n'a de sens que si chaque terme u_n appartient à l'ensemble de définition de f.

Méthode : calculer des termes

1. **Regarde** comment la suite est donnée : une formule en n, ou un premier terme et une relation entre deux termes consécutifs.
2. **Formule explicite** : remplace n par l'indice demandé. Aucun terme intermédiaire n'est utile.
3. **Relation de récurrence** : pars du premier terme et avance d'un rang à la fois. Range les valeurs dans un tableau.
4. **Terme suivant** : pour écrire u_{n+1}, remplace n par $n+1$ partout dans la formule.

Exemple

Explicite. Pour $a_n = \dfrac{n+4}{2n+1}$, on obtient directement $a_0 = 4$, $a_1 = \dfrac{5}{3}$ et $a_{10} = \dfrac{14}{21} = \dfrac{2}{3}$.

Par récurrence. Soit (b_n) définie par $b_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $b_{n+1} = 2\,b_n - 3$. On avance rang par rang :

n	0	1	2	3
b_n	1	-1	-5	-13

Avec la seule relation de récurrence, on obtient b_{10} à partir de b_9, donc après avoir calculé tous les termes précédents.

Attention : Terme suivant ou terme augmenté de 1 ?

Pour $c_n = 2^n$, le terme suivant est $c_{n+1} = 2^{n+1}$, le double de c_n. Ce n'est pas $c_n + 1 = 2^n + 1$. De même, $c_{2n} = 2^{2n} = 4^n$. L'indice désigne un rang : remplace-le partout dans la formule.

Suites majorées, minorées, bornées

Définition : Suites majorées, minorées, bornées

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$; le réel M est un **majorant** de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq m$; le réel m est un **minorant** de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Un majorant, ou un minorant, est un réel fixé : il est le même pour tous les termes et ne dépend pas de n .

Exemple

Énoncé. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{3n}{n+2}$. Cette suite est-elle bornée ?

Minorant. Pour tout entier $n \geq 0$, $3n \geq 0$ et $n + 2 > 0$, donc $u_n \geq 0$.

Majorant. Pour tout entier $n \geq 0$, $3n < 3n + 6$. On divise par $n + 2 > 0$: $u_n < 3$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n < 3$. Par définition, la suite est bornée.

Attention : Un majorant est un nombre fixé

L'inégalité $v_n \leq 6n + 2$ ne fait pas de $6n + 2$ un majorant : ce nombre change avec n. La suite définie par $v_n = 5n + 2$ la vérifie, et elle dépasse pourtant tout réel fixé. Un majorant s'écrit sans la lettre n.

Méthode : rédiger une récurrence

1. **Écris** la propriété $P(n)$, par exemple « $0 \leq u_n \leq 2$ », et l'entier de départ n_0.
2. **Initialisation** : vérifie $P(n_0)$ avec la valeur du premier terme.
3. **Hérédité** : écris « Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$ ». Pars de cette inégalité. Construis u_{n+1} opération par opération, en nommant chacune.
4. **Conclusion** : « d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ ».

À retenir : Une inégalité, une opération

Dans l'hérédité, chaque passage d'une inégalité à la suivante nomme son opération. Ajouter un même nombre garde le sens. Multiplier par un réel strictement positif garde le sens. Multiplier par un réel strictement négatif change le sens. Entre deux nombres strictement positifs, passer aux inverses change le sens.

Exemple

Énoncé. Soit (a_n) définie par $a_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 6}{3}$. On note $P(n)$ la propriété « $a_n \leq 3$ ».

Initialisation. $a_0 = 0$ et $0 \leq 3$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $a_n \leq 3$. On ajoute 6 : $a_n + 6 \leq 9$. On divise par $3 > 0$, l'inégalité garde son sens : $a_{n+1} \leq 3$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $a_n \leq 3$ pour tout entier $n \geq 0$: la suite est majorée par 3.

Sens de variation

Définition : Sens de variation d'une suite

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$; elle est **strictement croissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$; elle est **strictement décroissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.
- (u_n) est **constante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Le sens de variation de (u_n) se lit donc sur le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Propriété : Sens de variation d'une suite définie de façon explicite

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

De même, si f est strictement croissante (ou strictement décroissante) sur $[n_0, +\infty[$, alors (u_n) est strictement croissante (ou strictement décroissante).

Propriété : Sens de variation et quotient de deux termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite dont tous les termes sont **strictement positifs**.

- (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
- (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Méthode : étudier le sens de variation

1. **Différence** : calcule $u_{n+1} - u_n$, réduis-la, puis étudie son signe pour tout entier $n \geq n_0$.
2. **Quotient** : quand les termes sont tous strictement positifs et contiennent des puissances, compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. **Fonction associée** : si $u_n = f(n)$, cherche le sens de variation de f sur $[n_0, +\infty[$.
4. **Récurrence** : pour une suite définie par récurrence, démontre $u_n \leq u_{n+1}$, ou $u_n \geq u_{n+1}$, par récurrence.

Exemple

Énoncé. Sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

Différence. Pour tout entier $n \geq 0$, on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Conclusion. Ce quotient est strictement positif. Par définition du sens de variation, (u_n) est strictement croissante.

Exemple

Énoncé. Soit $w_n = \dfrac{3^n}{n+2}$ pour tout entier $n \geq 0$. Comme $3^n > 0$ et $n+2 > 0$, tous les termes sont strictement positifs.

Quotient. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{3^{n+1}}{n+3} \times \frac{n+2}{3^n} \\ &= \frac{3n+6}{n+3}.\end{aligned}$$

Comparaison à un. Or $3n+6 \geq n+3$, car $2n+3 \geq 0$. On divise par $n+3 > 0$, l'inégalité garde son sens : le quotient est supérieur ou égal à 1.

Conclusion. D'après la propriété du quotient de deux termes consécutifs, (w_n) est croissante.

Exemple

Énoncé. Soit $t_n = n^2 - 4n + 7$ pour tout entier $n \geq 2$.

Fonction associée. Pour tout entier $n \geq 2$, $t_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto (x-2)^2 + 3$. Soit a et b deux réels tels que $2 \leq a \leq b$.

- On retranche 2 : $0 \leq a-2 \leq b-2$.
- La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$: $(a-2)^2 \leq (b-2)^2$.
- On ajoute 3 : $f(a) \leq f(b)$.

Donc f est croissante sur $[2, +\infty[$.

Conclusion. D'après le sens de variation d'une suite $(t_n)_{n\geq 2}$ définie de façon explicite, cette suite est croissante.

Attention : $t_0 = 7$, $t_1 = 4$ et $t_2 = 3$. À partir de l'indice 0, elle ne l'est pas.

Exemple

Énoncé. On reprend la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 6}{3}$. On note $P(n)$ la propriété « $a_n \leq a_{n+1}$ ».

Initialisation. $a_0 = 0$ et $a_1 = 2$, donc $a_0 \leq a_1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $a_n \leq a_{n+1}$. On ajoute 6 : $a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6$. On divise par $3 > 0$, l'inégalité garde son sens : $\dfrac{a_n+6}{3} \leq \dfrac{a_{n+1}+6}{3}$, c'est-à-dire, par définition de la suite aux rangs n et $n+1$, $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 0$: la suite (a_n) est croissante.

Attention : Quelques termes ne suffisent pas

Pour $s_n = 6n - n^2$, on trouve $s_0 = 0$, $s_1 = 5$, $s_2 = 8$ et $s_3 = 9$: les termes montent. Pourtant $s_4 = 8$, donc la suite n'est pas croissante. Un sens de variation se démontre pour tout entier n. Quelques termes servent seulement à réfuter.

Suites arithmétiques

Définition : Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est la **raison** de la suite. Autrement dit, (u_n) est arithmétique lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ est la même pour tout entier $n \geq n_0$; cette différence est la raison.

Propriété : Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r. Pour tous entiers naturels n et p supérieurs ou égaux à n_0,

$$u_n = u_p + (n - p)\, r.$$

En particulier, si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 + n\, r$ pour tout entier naturel n.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$. La somme des termes consécutifs de u_p à u_n, qui compte $n - p + 1$ termes, vaut

$$\begin{aligned} &u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n \\ &= (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple

Énoncé. La suite (u_n) est arithmétique, avec $u_3 = 10$ et $u_7 = 2$. Trouve sa raison, puis u_{20}.

Raison. D'après le terme général d'une suite arithmétique, $u_7 = u_3 + 4r$. Donc $4r = -8$ et $r = -2$.

Terme. De même, $u_{20} = u_3 + 17r = 10 - 34 = -24$.

Exemple

Énoncé. Calcule $S = 15 + 20 + 25 + \cdots + 100$, somme des multiples de 5 compris entre 15 et 100.

Nombre de termes. Les termes augmentent de 5 en 5 : la suite est arithmétique, de raison 5. De 15 à 100, il y a $\dfrac{100 - 15}{5} + 1 = 18$ termes.

Somme. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = 18 \times \frac{15 + 100}{2} = 1035.$$

Attention : Compter les termes

De u_5 à u_{20}, il y a $20 - 5 + 1 = 16$ termes, et non 15. Pour t'en convaincre, compte les indices de 5 à 8 : il y en a quatre. Une unité de trop ou de moins fausse toute la somme.

Suites géométriques

Définition : Suites géométriques

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = q\, u_n.$$

Le réel q est la **raison** de la suite. Lorsqu'aucun terme n'est nul, (u_n) est géométrique si et seulement si le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est le même pour tout entier $n \geq n_0$; ce quotient est la raison.

Propriété : Terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q. Pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geq p \geq n_0$,

$$u_n = u_p \times q^{n-p},$$

avec la convention $q^0 = 1$. En particulier, si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout entier naturel n.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit q un réel tel que $q \neq 1$. Pour tout entier naturel n,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Plus généralement, si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et si $n_0 \leq p \leq n$, alors

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, la suite est constante et cette somme vaut $(n - p + 1)\, u_p$.

Exemple

Énoncé. La suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est géométrique, de premier terme $g_1 = 5$ et de raison 3. Calcule g_4.

Terme général. D'après le terme général d'une suite géométrique, avec $p = 1$: $g_n = 5 \times 3^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Valeur. $g_4 = 5 \times 3^3 = 135$.

Exemple

Énoncé. Calcule $T = 5 + 20 + 80 + \cdots + 1280$.

Reconnaître. Chaque terme vaut le quadruple du précédent. On additionne donc les termes 5×4^k, pour k allant de 0 à 4, de la suite géométrique de premier terme 5 et de raison 4, car $1280 = 5 \times 4^4$. La somme compte 5 termes.

Somme. La raison 4 est différente de 1. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} T &= 5 \times \frac{1 - 4^5}{1 - 4} \\ &= 5 \times 341 \\ &= 1705. \end{aligned}$$

Attention : Le premier indice fixe l'exposant

Si le premier terme est $h_1 = 4$ et la raison $\frac{1}{2}$, alors $h_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. L'écriture $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ donnerait $h_1 = 2$, ce qui est faux. Contrôle toujours ta formule sur le premier terme.

Reconnaître une suite, calculer une somme

Méthode : arithmétique, géométrique, ou ni l'un ni l'autre ?

1. **Arithmétique** : calcule $u_{n+1} - u_n$. Si tu obtiens un réel r indépendant de n, la suite est arithmétique de raison r.
2. **Géométrique** : écris u_{n+1} sous la forme $q \times u_n$, avec un réel q indépendant de n.
3. **Pour dire non** : calcule trois termes consécutifs. Deux différences distinctes excluent « arithmétique ». Deux quotients distincts excluent « géométrique ».

Exemple

Énoncé. Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2\,u_n + 1$. Est-elle arithmétique ? géométrique ?

Trois termes. $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $u_2 = 11$.

Conclusion. $u_1 - u_0 = 3$ et $u_2 - u_1 = 6$: la suite n'est pas arithmétique. $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{11}{5}$: elle n'est pas géométrique.

Méthode : calculer une somme

1. **Identifie** la suite dont la somme réunit des termes consécutifs, et sa raison.
2. **Compte** les termes : de l'indice p à l'indice n, il y en a $n - p + 1$.
3. **Arithmétique** : multiplie ce nombre de termes par la moyenne du premier et du dernier terme.
4. **Géométrique**, de raison $q \neq 1$: multiplie le premier terme par $\dfrac{1 - q^N}{1 - q}$, où N est le nombre de termes.

Remarque : La somme des premiers entiers

La somme des premiers entiers est un cas particulier très utile. Par exemple, $1 + 2 + \cdots + 50 = \dfrac{50 \times 51}{2} = 1275$.

Se ramener à une suite géométrique

Méthode : utiliser une suite auxiliaire

Pour $u_{n+1} = a\,u_n + b$, avec $a \neq 1$, l'énoncé fournit en général la suite auxiliaire.

1. **Trouve** le réel α qui vérifie $\alpha = a\,\alpha + b$, soit $\alpha = \dfrac{b}{1 - a}$.
2. **Pose** $v_n = u_n - \alpha$. Calcule v_{n+1}, remplace u_{n+1}, puis factorise par a : tu obtiens $v_{n+1} = a\,v_n$.
3. **Conclus** : (v_n) est géométrique de raison a. D'après le terme général d'une suite géométrique, $v_n = v_{n_0} \times a^{n - n_0}$, soit $v_n = v_0 \times a^n$ si la suite commence au rang 0.
4. **Reviens** à $u_n = v_n + \alpha$, pour le sens de variation ou une somme.

Exemple

Énoncé. Soit $u_0 = 3$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 4\,u_n - 3$. On pose $v_n = u_n - 1$.

Suite géométrique. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= 4\,u_n - 3 - 1 \\ &= 4\,(u_n - 1) \\ &= 4\,v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = 2$.

Terme général. D'après le terme général d'une suite géométrique, $v_n = 2 \times 4^n$. Donc $u_n = 2 \times 4^n + 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

Contrôle. $u_1 = 4 \times 3 - 3 = 9$, et $2 \times 4 + 1 = 9$.

Remarque : Et si a vaut 1 ?

Si $a = 1$, la relation s'écrit $u_{n+1} = u_n + b$: la suite est arithmétique de raison b. Aucune suite auxiliaire n'est alors utile.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Calculer un terme** : remplacer n dans une formule explicite, ou avancer rang par rang.
- **Prouver qu'une suite est bornée** : encadrer directement, ou rédiger une récurrence.
- **Trouver le sens de variation** : signe de $u_{n+1} - u_n$, quotient comparé à 1, fonction associée, ou récurrence.
- **Reconnaître la nature** : différence ou quotient constant ; trois termes pour réfuter.
- **Exprimer u_n en fonction de n** : terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
- **Calculer une somme** : compter les termes, puis appliquer la formule adaptée.
- **Étudier $u_{n+1} = a\,u_n + b$** : passer par la suite auxiliaire géométrique $v_n = u_n - \alpha$.

Suite arithmétique de raison r

$$u_n = u_p + (n - p)\,r$$

Somme de termes consécutifs, cas arithmétique

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Somme des premiers entiers

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suite géométrique de raison q, avec n supérieur ou égal à p

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Somme de termes consécutifs, cas géométrique, avec q différent de 1

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Nombre de termes de l'indice p à l'indice n

$$n - p + 1$$

Suite auxiliaire, avec a différent de 1

$$\alpha = \frac{b}{1 - a}$$

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, nomme l'énoncé qui justifie chaque conclusion : « d'après le terme général d'une suite géométrique ». Une récurrence porte toujours ses trois titres : Initialisation, Hérédité, Conclusion. Dans l'hérédité, annonce chaque opération sur l'inégalité. Termine chaque question par une phrase de réponse.