BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un médicament dans l'organisme

Un patient reçoit chaque jour une injection de 3 mg d'un médicament. D'une injection à la suivante, l'organisme élimine une partie du produit : il n'en reste que les deux cinquièmes.

On note m_n la quantité de médicament, en mg, présente juste après l'injection du jour numéro n. Ainsi $m_0 = 3$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$m_{n+1} = 0{,}4\, m_n + 3.$$

1. 0,5 pts

Calculer m_1 et m_2.

INDICE

Outil : applique la relation de récurrence à partir de $m_0 = 3$.

2. 1,25 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq m_n \leq 5$.

INDICE

Hérédité : pars de $0 \leq m_n \leq 5$. Multiplie par $0{,}4$, en disant pourquoi le sens est conservé, puis ajoute 3.

3. 1 pts

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = m_n - 5$. Justifier que la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}4$, et préciser son premier terme.

INDICE

Début : écris $v_{n+1} = m_{n+1} - 5$, remplace m_{n+1}, puis factorise par $0{,}4$.

4. 1 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $m_n = 5 - 2 \times 0{,}4^n$.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique donne v_n ; reviens ensuite à $m_n = v_n + 5$.

5. 1,25 pts

Étudier le sens de variation de la suite (m_n). La quantité présente juste après une injection peut-elle atteindre 5 mg ?

INDICE

Outil : calcule $m_{n+1} - m_n$ avec l'expression de la question 4, puis factorise par $2 \times 0{,}4^n$. **Aide :** pour la dernière question, regarde le signe de $2 \times 0{,}4^n$. La question 2 donnait seulement $m_n \leq 5$; ici, on veut la comparaison stricte.

Exercice 2 5 pts

Une suite et l'inverse de ses termes

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2\,u_n}.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : remplace u_n par le terme précédent ; pour u_2, simplifie un quotient de deux fractions.

2. 1 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 0$.

INDICE

Hérédité : si $u_n > 0$, quel est le signe de $1 + 2\,u_n$? Que dire alors du signe de u_{n+1} ?

3. 1 pts

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n = \dfrac{1}{u_n}$. Justifier que la suite (w_n) est arithmétique de raison 2, et préciser son premier terme.

INDICE

Début : $w_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1 + 2\,u_n}{u_n}$; sépare cette fraction en deux.

4. 0,5 pts

En déduire l'expression de w_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite arithmétique, puis $u_n = \dfrac{1}{w_n}$.

5. 1,25 pts

Étudier le sens de variation de la suite (u_n), puis justifier qu'elle est bornée.

INDICE

Outil : compare $2n + 1$ et $2n + 3$, puis passe aux inverses. **Aide :** pour la borne supérieure, compare $2n + 1$ à 1.

6. 0,75 pts

Calculer la somme $\dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_{19}}$.

INDICE

Outil : cette somme vaut $w_0 + w_1 + \cdots + w_{19}$. Compte les termes, puis calcule le dernier.

Exercice 3 5 pts

Deux chaînes vidéo

Salma et son frère Karim lancent chacun une chaîne vidéo.

- Salma gagne 100 abonnés le premier mois, puis chaque mois 20 abonnés de plus que le mois précédent.
- Karim en gagne 10 le premier mois, puis chaque mois le double du mois précédent.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note s_n et k_n les nombres d'abonnés gagnés par Salma et par Karim le mois numéro n.

1. 0,5 pts

Calculer s_2, s_3, k_2 et k_3.

INDICE

Outil : traduis chaque règle de gain, à partir de $s_1 = 100$ et de $k_1 = 10$.

2. 1 pts

Préciser la nature de chacune des suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(k_n)_{n\geq 1}$, puis exprimer s_n et k_n en fonction de n.

INDICE

Outil : écris s_{n+1} en fonction de s_n, et k_{n+1} en fonction de k_n. Attention : le premier indice est 1.

3. 1,25 pts

Calculer le nombre total d'abonnés gagnés par chacun au bout de 12 mois.

INDICE

Outil : de l'indice 1 à l'indice 12, il y a 12 termes. Calcule d'abord s_{12}.

4. 0,75 pts

Calculer s_n et k_n pour $n = 4$, 5 et 6. En déduire le premier mois où Karim gagne plus d'abonnés que Salma.

INDICE

Outil : les expressions de la question 2. Compare les gains mois par mois, sans oublier les mois 1 à 3.

5. 1,5 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 6$, $k_n > s_n$. On pourra, dans l'hérédité, comparer $2\,s_n$ et s_{n+1}.

INDICE

Hérédité : multiplie l'inégalité $k_n > s_n$ par 2. **Aide :** vérifie ensuite que $2\,s_n - s_{n+1} = 20n + 60$, nombre strictement positif.

Exercice 4 5 pts

Une suite qui oscille autour de 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}\,u_n + 3.$$

1. 0,75 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle croissante ? décroissante ?

INDICE

Outil : applique la relation de récurrence à partir de $u_0 = 4$. Pour le sens de variation, compare u_0 et u_1, puis u_1 et u_2.

2. 1,25 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $1 \leq u_n \leq 4$.

INDICE

Hérédité : pars de $1 \leq u_n \leq 4$ et multiplie par $-\frac{1}{2}$. **Aide :** multiplier par un nombre strictement négatif change le sens des inégalités ; écris le nouvel encadrement dans le bon ordre, puis ajoute 3.

3. 0,75 pts

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = u_n - 2$. Justifier que la suite (v_n) est géométrique, puis donner sa raison et la valeur de v_0.

INDICE

Début : écris $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$, remplace u_{n+1}, puis factorise par $-\frac{1}{2}$.

4. 1 pts

Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'égalité $u_n = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, valable pour tout entier $n \geq 0$.

Pour quels entiers n a-t-on $u_n > 2$?

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique donne v_n ; reviens ensuite à $u_n = v_n + 2$. **Aide :** le signe de $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ dépend de la parité de n.

5. 1,25 pts

En déduire la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$.

INDICE

Outil : écris chaque terme $u_k = 2 + v_k$; S est la somme de six fois 2 et de $v_0 + v_1 + \cdots + v_5$. Calcule cette dernière somme avec la raison $-\frac{1}{2}$, différente de 1.

Exercice 5 5 pts

Deux réservoirs qui échangent leur eau

Deux réservoirs A et B contiennent ensemble 1000 litres d'eau : au départ, 900 litres dans A et 100 litres dans B. Chaque heure, on verse simultanément le cinquième du contenu de A dans B et le cinquième du contenu de B dans A.

On note a_n et b_n les volumes, en litres, contenus dans A et dans B au bout de n heures. Ainsi $a_0 = 900$, $b_0 = 100$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = 0{,}8\, a_n + 0{,}2\, b_n,$$
$$b_{n+1} = 0{,}2\, a_n + 0{,}8\, b_n.$$

1. 0,5 pts

Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

INDICE

Outil : applique les deux relations en même temps : a_1 et b_1 se calculent à partir de a_0 et b_0, puis a_2 et b_2 à partir de a_1 et b_1.

2. 1,25 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $b_n \leq a_n$. On pourra, dans l'hérédité, exprimer $a_{n+1} - b_{n+1}$ en fonction de $a_n - b_n$.

INDICE

Hérédité : calcule $a_{n+1} - b_{n+1}$ avec les deux relations et regroupe les termes en a_n et en b_n : tu dois obtenir $0{,}6\,(a_n - b_n)$.

3. 1 pts

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $s_n = a_n + b_n$ et $d_n = a_n - b_n$. Justifier que la suite (s_n) est constante, puis que la suite (d_n) est géométrique de raison $0{,}6$. Préciser s_0 et d_0.

INDICE

Début : calcule $s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$ avec les deux relations ; pour (d_n), reprends le calcul fait dans l'hérédité de la question 2.

4. 1 pts

En déduire l'expression de d_n en fonction de n, puis justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $a_n = 500 + 400 \times 0{,}6^n$ et $b_n = 500 - 400 \times 0{,}6^n$.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique donne d_n. **Aide :** ajoute membre à membre les égalités $a_n + b_n = 1000$ et $a_n - b_n = d_n$, puis divise par 2.

5. 1,25 pts

Étudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Au bout de combien d'heures l'écart entre les contenus des deux réservoirs devient-il inférieur à 50 litres ? On pourra s'aider de la calculatrice.

INDICE

Outil : calcule $a_{n+1} - a_n$ avec l'expression de la question 4, puis factorise par $400 \times 0{,}6^n$. Pour l'écart d_n, justifie qu'il diminue d'une heure à la suivante, puis dresse un tableau de valeurs à la calculatrice.