BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un médicament dans l'organisme

Un patient reçoit chaque jour une injection de 3 mg d'un médicament. D'une injection à la suivante, l'organisme élimine une partie du produit : il n'en reste que les deux cinquièmes.

On note m_n la quantité de médicament, en mg, présente juste après l'injection du jour numéro n. Ainsi $m_0 = 3$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$m_{n+1} = 0{,}4\, m_n + 3.$$

1. 0,5 pts

Calculer m_1 et m_2.

INDICE

Outil : applique la relation de récurrence à partir de $m_0 = 3$.

CORRIGÉ

On applique la relation de récurrence à partir de $m_0 = 3$:

- $m_1 = 0{,}4 \times 3 + 3 = 4{,}2$;
- $m_2 = 0{,}4 \times 4{,}2 + 3 = 1{,}68 + 3 = 4{,}68$.

Ainsi $m_1 = 4{,}2$ mg et $m_2 = 4{,}68$ mg.

2. 1,25 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq m_n \leq 5$.

INDICE

Hérédité : pars de $0 \leq m_n \leq 5$. Multiplie par $0{,}4$, en disant pourquoi le sens est conservé, puis ajoute 3.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P(n)$ la propriété « $0 \leq m_n \leq 5$ ».

Initialisation. $m_0 = 3$ et $0 \leq 3 \leq 5$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$, c'est-à-dire $0 \leq m_n \leq 5$.

On multiplie par $0{,}4 > 0$, les inégalités gardent leur sens : $0 \leq 0{,}4\, m_n \leq 2$.

On ajoute 3 : $3 \leq 0{,}4\, m_n + 3 \leq 5$, c'est-à-dire $3 \leq m_{n+1} \leq 5$. Comme $0 \leq 3$, on obtient $0 \leq m_{n+1} \leq 5$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété P est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq m_n \leq 5$.

3. 1 pts

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = m_n - 5$. Justifier que la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}4$, et préciser son premier terme.

INDICE

Début : écris $v_{n+1} = m_{n+1} - 5$, remplace m_{n+1}, puis factorise par $0{,}4$.

CORRIGÉ

Soit n un entier, $n \geq 0$. On part de $v_{n+1} = m_{n+1} - 5$ et l'on remplace m_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0{,}4\, m_n + 3 - 5 \\ &= 0{,}4\, m_n - 2 \\ &= 0{,}4\,(m_n - 5) \\ &= 0{,}4\, v_n. \end{aligned}$$

Le coefficient $0{,}4$ ne dépend pas de n. Le premier terme est $v_0 = m_0 - 5$, soit $v_0 = 3 - 5 = -2$.

Conclusion. Par définition, (v_n) est géométrique, de raison $0{,}4$ et de premier terme $v_0 = -2$.

4. 1 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $m_n = 5 - 2 \times 0{,}4^n$.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique donne v_n ; reviens ensuite à $m_n = v_n + 5$.

CORRIGÉ

D'après la question 3 et le terme général d'une suite géométrique, pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_n = -2 \times 0{,}4^n.$$

Par définition de v_n, on a $m_n = v_n + 5$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $m_n = 5 - 2 \times 0{,}4^n$.

5. 1,25 pts

Étudier le sens de variation de la suite (m_n). La quantité présente juste après une injection peut-elle atteindre 5 mg ?

INDICE

Outil : calcule $m_{n+1} - m_n$ avec l'expression de la question 4, puis factorise par $2 \times 0{,}4^n$. **Aide :** pour la dernière question, regarde le signe de $2 \times 0{,}4^n$. La question 2 donnait seulement $m_n \leq 5$; ici, on veut la comparaison stricte.

CORRIGÉ

Différence. Soit n un entier, $n \geq 0$. D'après la question 4, les deux termes 5 s'éliminent :

$$\begin{aligned} & m_{n+1} - m_n \\ & = -2 \times 0{,}4^{n+1} + 2 \times 0{,}4^n \\ & = 2 \times 0{,}4^n \times (1 - 0{,}4) \\ & = 1{,}2 \times 0{,}4^n. \end{aligned}$$

Sens de variation. Comme $0{,}4 > 0$, $0{,}4^n > 0$, donc $m_{n+1} - m_n > 0$. Par définition, la suite (m_n) est strictement croissante.

Valeur 5. Pour tout entier $n \geq 0$, $2 \times 0{,}4^n > 0$, donc $m_n = 5 - 2 \times 0{,}4^n < 5$.

Conclusion. La quantité présente juste après une injection augmente d'un jour à l'autre, mais reste strictement inférieure à 5 mg : elle n'atteint jamais 5 mg.

Exercice 2 5 pts

Une suite et l'inverse de ses termes

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2\,u_n}.$$

1. 0,5 pts

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : remplace u_n par le terme précédent ; pour u_2, simplifie un quotient de deux fractions.

CORRIGÉ

On applique la relation de récurrence à partir de $u_0 = 1$:

$$u_1 = \frac{1}{1 + 2 \times 1} = \frac{1}{3}.$$

Pour u_2, le dénominateur vaut $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; diviser par $\frac{5}{3}$, c'est multiplier par $\frac{3}{5}$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{3} \div \frac{5}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

2. 1 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 0$.

INDICE

Hérédité : si $u_n > 0$, quel est le signe de $1 + 2\,u_n$? Que dire alors du signe de u_{n+1} ?

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P(n)$ la propriété « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ est bien défini et $1 > 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: u_n est bien défini et $u_n > 0$.

On multiplie par $2 > 0$, l'inégalité garde son sens : $2\,u_n > 0$. On ajoute 1 : $1 + 2\,u_n > 1 > 0$.

Le dénominateur $1 + 2\,u_n$ n'est donc pas nul : u_{n+1} est bien défini. C'est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $u_{n+1} > 0$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété P est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

3. 1 pts

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n = \dfrac{1}{u_n}$. Justifier que la suite (w_n) est arithmétique de raison 2, et préciser son premier terme.

INDICE

Début : $w_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1+2\,u_n}{u_n}$; sépare cette fraction en deux.

CORRIGÉ

Existence. D'après la question 2, $u_n > 0$, donc $u_n \neq 0$: w_n est bien défini pour tout entier $n \geq 0$.

Relation. Soit n un entier, $n \geq 0$. L'inverse de $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2\,u_n}$ est $\dfrac{1+2\,u_n}{u_n}$, donc :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{1+2\,u_n}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n} + \frac{2\,u_n}{u_n} \\ &= w_n + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Par définition, (w_n) est arithmétique de raison 2, de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$.

4. 0,5 pts

En déduire l'expression de w_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite arithmétique, puis $u_n = \dfrac{1}{w_n}$.

CORRIGÉ

Expression de w_n. Avec la formule du terme général d'une suite arithmétique, on obtient, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n = w_0 + 2n = 1 + 2n$.

Expression de u_n. Comme $w_n = \dfrac{1}{u_n}$ et $w_n \neq 0$, on a $u_n = \dfrac{1}{w_n}$, d'où $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

Contrôle. Pour $n = 2$, $\dfrac{1}{2 \times 2 + 1} = \dfrac{1}{5}$: c'est bien u_2.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $w_n = 2n + 1$ et $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

5. 1,25 pts

Étudier le sens de variation de la suite (u_n), puis justifier qu'elle est bornée.

INDICE

Outil : compare $2n+1$ et $2n+3$, puis passe aux inverses. **Aide :** pour la borne supérieure, compare $2n+1$ à 1.

CORRIGÉ

Sens de variation. Soit n un entier, $n \geq 0$. D'après la question 4, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)+1} = \dfrac{1}{2n+3}$. Or $0 < 2n+1 < 2n+3$; en passant aux inverses de nombres strictement positifs, l'inégalité change de sens :

$$\frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}.$$

Ainsi $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

Bornes. On a $2n+1 \geq 1 > 0$; en passant aux inverses, l'inégalité change de sens : $u_n = \dfrac{1}{2n+1} \leq 1$. De plus, $u_n > 0$ d'après la question 2.

Conclusion. La suite (u_n) est strictement décroissante et, pour tout entier $n \geq 0$, $0 < u_n \leq 1$: elle est bornée.

6. 0,75 pts

Calculer la somme $\dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_{19}}$.

INDICE

Outil : cette somme vaut $w_0 + w_1 + \cdots + w_{19}$. Compte les termes, puis calcule le dernier.

CORRIGÉ

Lien avec (w_n). Par définition, $\dfrac{1}{u_k} = w_k$ pour tout entier $k \geq 0$. La somme cherchée est donc $w_0 + w_1 + \cdots + w_{19}$.

Nombre de termes. Elle compte $19 - 0 + 1 = 20$ termes, et son dernier terme est $w_{19} = 2 \times 19 + 1 = 39$.

Calcul. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} & w_0 + w_1 + \cdots + w_{19} \\ &= 20 \times \frac{1+39}{2} \\ &= 20 \times 20 = 400. \end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_{19}} = 400$.

Exercice 3 5 pts

Deux chaînes vidéo

Salma et son frère Karim lancent chacun une chaîne vidéo.

- Salma gagne 100 abonnés le premier mois, puis chaque mois 20 abonnés de plus que le mois précédent.
- Karim en gagne 10 le premier mois, puis chaque mois le double du mois précédent.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note s_n et k_n les nombres d'abonnés gagnés par Salma et par Karim le mois numéro n.

1. 0,5 pts

Calculer s_2, s_3, k_2 et k_3.

INDICE

Outil : traduis chaque règle de gain, à partir de $s_1 = 100$ et de $k_1 = 10$.

CORRIGÉ

On traduit les deux règles de gain, à partir de $s_1 = 100$ et de $k_1 = 10$:

- Salma : $s_2 = 100 + 20 = 120$ et $s_3 = 120 + 20 = 140$;
- Karim : $k_2 = 2 \times 10 = 20$ et $k_3 = 2 \times 20 = 40$.

2. 1 pts

Préciser la nature de chacune des suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(k_n)_{n\geq 1}$, puis exprimer s_n et k_n en fonction de n.

INDICE

Outil : écris s_{n+1} en fonction de s_n, et k_{n+1} en fonction de k_n. Attention : le premier indice est 1.

CORRIGÉ

Salma. Pour tout entier $n \geq 1$, $s_{n+1} = s_n + 20$: la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique de raison 20, de premier terme $s_1 = 100$. Avec la formule du terme général d'une suite arithmétique, on obtient, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} s_n &= 100 + 20\,(n-1) \\ &= 20n + 80. \end{aligned}$$

Karim. Pour tout entier $n \geq 1$, $k_{n+1} = 2\,k_n$: la suite $(k_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison 2, de premier terme $k_1 = 10$. Avec la formule du terme général d'une suite géométrique, on obtient, pour tout entier $n \geq 1$:

$$k_n = 10 \times 2^{n-1}.$$

3. 1,25 pts

Calculer le nombre total d'abonnés gagnés par chacun au bout de 12 mois.

INDICE

Outil : de l'indice 1 à l'indice 12, il y a 12 termes. Calcule d'abord s_{12}.

CORRIGÉ

Salma. D'après la question 2, $s_{12} = 20 \times 12 + 80 = 320$. De l'indice 1 à l'indice 12, la somme compte 12 termes. On applique la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} &s_1 + s_2 + \cdots + s_{12} \\ &= 12 \times \frac{100 + 320}{2} \\ &= 12 \times 210 \\ &= 2520. \end{aligned}$$

Karim. La somme compte aussi 12 termes, de premier terme $k_1 = 10$, et la raison 2 est différente de 1. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} &k_1 + k_2 + \cdots + k_{12} \\ &= 10 \times \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} \\ &= 10 \times 4095 \\ &= 40\,950. \end{aligned}$$

Conclusion. En 12 mois, Salma gagne $s_1 + s_2 + \cdots + s_{12} = 2520$ abonnés et Karim $k_1 + k_2 + \cdots + k_{12} = 40\,950$ abonnés.

4. 0,75 pts

Calculer s_n et k_n pour $n = 4$, 5 et 6. En déduire le premier mois où Karim gagne plus d'abonnés que Salma.

INDICE

Outil : les expressions de la question 2. Compare les gains mois par mois, sans oublier les mois 1 à 3.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $s_n = 20n + 80$ et $k_n = 10 \times 2^{n-1}$. On complète le tableau jusqu'au mois 6 :

n	1	2	3	4	5	6
s_n	100	120	140	160	180	200
k_n	10	20	40	80	160	320

Comparaison. Du mois 1 au mois 5, on a $k_n < s_n$. Au mois 6, $k_6 = 320 > 200 = s_6$.

Conclusion. Le mois numéro 6 est le premier où Karim gagne plus d'abonnés que Salma.

5. 1,5 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 6$, $k_n > s_n$. On pourra, dans l'hérédité, comparer $2\,s_n$ et s_{n+1}.

INDICE

Hérédité : multiplie l'inégalité $k_n > s_n$ par 2. **Aide :** vérifie ensuite que $2\,s_n - s_{n+1} = 20n + 60$, nombre strictement positif.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 6$, on note $P(n)$ la propriété « $k_n > s_n$ ».

Initialisation. D'après la question 4, $k_6 = 320$ et $s_6 = 200$, donc $k_6 > s_6$: $P(6)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 6$, c'est-à-dire $k_n > s_n$.

On multiplie par $2 > 0$, l'inégalité garde son sens : $2\,k_n > 2\,s_n$, c'est-à-dire $k_{n+1} > 2\,s_n$.

On compare ensuite $2\,s_n$ et $s_{n+1} = 20(n+1) + 80 = 20n + 100$:

$$\begin{aligned} &2\,s_n - s_{n+1} \\ &= 2(20n + 80) - (20n + 100) \\ &= 40n + 160 - 20n - 100 \\ &= 20n + 60. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 6$, $20n + 60 > 0$, donc $2\,s_n > s_{n+1}$. Ainsi $k_{n+1} > 2\,s_n > s_{n+1}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété P est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 6$, $k_n > s_n$: à partir du mois numéro 6, Karim gagne chaque mois plus d'abonnés que Salma.

Exercice 4 5 pts

Une suite qui oscille autour de 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}\,u_n + 3.$$

1. 0,75 pts

Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle croissante ? décroissante ?

INDICE

Outil : applique la relation de récurrence à partir de $u_0 = 4$. Pour le sens de variation, compare u_0 et u_1, puis u_1 et u_2.

CORRIGÉ

Termes. On applique la relation de récurrence à partir de $u_0 = 4$:

- $u_1 = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 = 1$;
- $u_2 = -\frac{1}{2} \times 1 + 3 = 2{,}5$;
- $u_3 = -\frac{1}{2} \times 2{,}5 + 3 = -1{,}25 + 3 = 1{,}75$.

Monotonie. On a $u_1 < u_0$: la suite n'est pas croissante. On a $u_2 > u_1$: elle n'est pas décroissante.

Conclusion. La suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante : elle n'est pas monotone.

2. 1,25 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $1 \leq u_n \leq 4$.

INDICE

Hérédité : pars de $1 \leq u_n \leq 4$ et multiplie par $-\frac{1}{2}$. **Aide :** multiplier par un nombre strictement négatif change le sens des inégalités ; écris le nouvel encadrement dans le bon ordre, puis ajoute 3.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P(n)$ la propriété « $1 \leq u_n \leq 4$ ».

Initialisation. $u_0 = 4$ et $1 \leq 4 \leq 4$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq 4$.

On multiplie par $-\frac{1}{2} < 0$, les inégalités changent de sens. Écrit dans l'ordre croissant, cela donne :

$$-2 \leq -\frac{1}{2}\,u_n \leq -\frac{1}{2}.$$

On ajoute 3 : $1 \leq -\frac{1}{2}\,u_n + 3 \leq 2{,}5$, c'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 2{,}5$. Comme $2{,}5 \leq 4$, on obtient $1 \leq u_{n+1} \leq 4$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété P est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $1 \leq u_n \leq 4$: la suite (u_n) est bornée.

3. 0,75 pts

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = u_n - 2$. Justifier que la suite (v_n) est géométrique, puis donner sa raison et la valeur de v_0.

INDICE

Début : écris $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$, remplace u_{n+1}, puis factorise par $-\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Soit n un entier, $n \geq 0$. On part de $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ et l'on remplace u_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -\frac{1}{2}\,u_n + 3 - 2 \\ &= -\frac{1}{2}\,u_n + 1 \\ &= -\frac{1}{2}\,(u_n - 2) \\ &= -\frac{1}{2}\,v_n. \end{aligned}$$

Le coefficient $-\dfrac{1}{2}$ ne dépend pas de n. Le premier terme est $v_0 = u_0 - 2$, soit $v_0 = 4 - 2 = 2$.

Conclusion. Par définition, (v_n) est géométrique, de raison $-\dfrac{1}{2}$, et $v_0 = 2$.

4. 1 pts

Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'égalité $u_n = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, valable pour tout entier $n \geq 0$. Pour quels entiers n a-t-on $u_n > 2$?

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique donne v_n ; reviens ensuite à $u_n = v_n + 2$. **Aide :** le signe de $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ dépend de la parité de n.

CORRIGÉ

Expression de v_n. Avec la formule du terme général d'une suite géométrique, on obtient, pour tout entier $n \geq 0$:

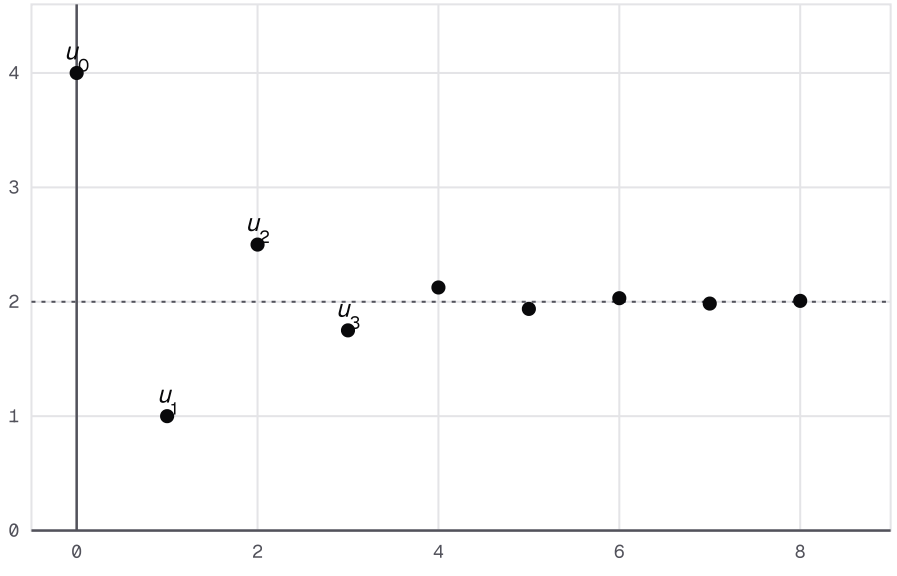
$$v_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Expression de u_n. Comme $u_n = v_n + 2$, on obtient, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Contrôle. Pour $n = 3$: $2 + 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = 2 - 0{,}25 = 1{,}75$, valeur trouvée à la question 1.

Signe. $u_n > 2$ équivaut à $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n > 0$, soit $\left(-\frac{1}{2}\right)^n > 0$. Une puissance d'un nombre strictement négatif est strictement positive si l'exposant est pair, strictement négative s'il est impair.

Conclusion. On a $u_n > 2$ exactement pour les entiers n pairs, et $u_n < 2$ pour n impair : les termes se placent alternativement au-dessus et au-dessous de 2.



Les neuf premiers termes de la suite définie par u_0 = 4 et u_(n+1) = -u_n/2 + 3 : un terme sur deux est au-dessus de la droite d'équation y = 2, l'autre au-dessous, et l'écart à 2 est divisé par deux à chaque rang.

5. 1,25 pts

En déduire la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$.

INDICE

Outil : écris chaque terme $u_k = 2 + v_k$; S est la somme de six fois 2 et de $v_0 + v_1 + \cdots + v_5$. Calcule cette dernière somme avec la raison $-\dfrac{1}{2}$, différente de 1.

CORRIGÉ

Décomposition. Pour tout entier $k \geq 0$, $u_k = 2 + v_k$. La somme S compte 6 termes, donc :

$$\begin{aligned} S &= 6 \times 2 \\ &\quad + (v_0 + v_1 + \cdots + v_5). \end{aligned}$$

Somme géométrique. La raison $-\dfrac{1}{2}$ est différente de 1, et $v_0 = 2$. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} &v_0 + v_1 + \cdots + v_5 \\ &= 2 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= 2 \times \frac{\frac{63}{64}}{\frac{3}{2}} \\ &= 2 \times \frac{63}{64} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{21}{16}. \end{aligned}$$

Calcul de S. $S = 12 + \dfrac{21}{16} = \dfrac{213}{16} = 13{,}3125$.

Contrôle. Avec $u_4 = 2{,}125$ et $u_5 = 1{,}9375$, on retrouve $4 + 1 + 2{,}5 + 1{,}75 + 2{,}125 + 1{,}9375 = 13{,}3125$.

Conclusion. $S = \dfrac{213}{16} = 13{,}3125$.

Exercice 5 5 pts

Deux réservoirs qui échangent leur eau

Deux réservoirs A et B contiennent ensemble 1000 litres d'eau : au départ, 900 litres dans A et 100 litres dans B. Chaque heure, on verse simultanément le cinquième du contenu de A dans B et le cinquième du contenu de B dans A.

On note a_n et b_n les volumes, en litres, contenus dans A et dans B au bout de n heures. Ainsi $a_0 = 900$, $b_0 = 100$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = 0{,}8\, a_n + 0{,}2\, b_n,$$
$$b_{n+1} = 0{,}2\, a_n + 0{,}8\, b_n.$$

1. 0,5 pts

Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.

INDICE

Outil : applique les deux relations en même temps : a_1 et b_1 se calculent à partir de a_0 et b_0, puis a_2 et b_2 à partir de a_1 et b_1.

CORRIGÉ

Les deux relations s'appliquent en même temps : les volumes d'une heure se calculent à partir de ceux de l'heure précédente.

Au bout d'une heure.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}8 \times 900 + 0{,}2 \times 100 \\ &= 720 + 20 = 740. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} b_1 &= 0{,}2 \times 900 + 0{,}8 \times 100 \\ &= 180 + 80 = 260. \end{aligned}$$

Au bout de deux heures.

$$\begin{aligned} a_2 &= 0{,}8 \times 740 + 0{,}2 \times 260 \\ &= 592 + 52 = 644. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} b_2 &= 0{,}2 \times 740 + 0{,}8 \times 260 \\ &= 148 + 208 = 356. \end{aligned}$$

Conclusion. $a_1 = 740$, $b_1 = 260$, $a_2 = 644$ et $b_2 = 356$, en litres.

2. 1,25 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $b_n \leq a_n$. On pourra, dans l'hérédité, exprimer $a_{n+1} - b_{n+1}$ en fonction de $a_n - b_n$.

INDICE

Hérédité : calcule $a_{n+1} - b_{n+1}$ avec les deux relations et regroupe les termes en a_n et en b_n : tu dois obtenir $0{,}6\,(a_n - b_n)$.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P(n)$ la propriété « $b_n \leq a_n$ ».

Initialisation. $b_0 = 100$ et $a_0 = 900$, donc $b_0 \leq a_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $b_n \leq a_n$, c'est-à-dire $a_n - b_n \geq 0$. Avec les deux relations de récurrence :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= 0{,}8\,a_n + 0{,}2\,b_n \\ &\quad - 0{,}2\,a_n - 0{,}8\,b_n \\ &= 0{,}6\,a_n - 0{,}6\,b_n \\ &= 0{,}6\,(a_n - b_n). \end{aligned}$$

On multiplie l'inégalité $a_n - b_n \geq 0$ par $0{,}6 > 0$, l'inégalité garde son sens : $0{,}6\,(a_n - b_n) \geq 0$. Ainsi $a_{n+1} - b_{n+1} \geq 0$, soit $b_{n+1} \leq a_{n+1}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété P est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $b_n \leq a_n$: le réservoir A contient toujours au moins autant d'eau que le réservoir B.

3. 1 pts

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $s_n = a_n + b_n$ et $d_n = a_n - b_n$. Justifier que la suite (s_n) est constante, puis que la suite (d_n) est géométrique de raison $0{,}6$. Préciser s_0 et d_0.

INDICE

Début : calcule $s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$ avec les deux relations ; pour (d_n), reprends le calcul fait dans l'hérédité de la question 2.

CORRIGÉ

La suite (s_n). Soit n un entier, $n \geq 0$. On ajoute les deux relations de récurrence :

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 0{,}8\, a_n + 0{,}2\, b_n \\ &\quad + 0{,}2\, a_n + 0{,}8\, b_n \\ &= a_n + b_n = s_n. \end{aligned}$$

La suite (s_n) est donc constante, égale à $s_0 = 900 + 100 = 1000$: le volume total ne change pas.

La suite (d_n). D'après le calcul fait dans l'hérédité de la question 2 :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= 0{,}6\,(a_n - b_n) \\ &= 0{,}6\, d_n. \end{aligned}$$

Le coefficient $0{,}6$ ne dépend pas de n : par définition, (d_n) est géométrique de raison $0{,}6$. Son premier terme est $d_0 = 900 - 100 = 800$.

Conclusion. La suite (s_n) est constante, avec $s_0 = 1000$, et la suite (d_n) est géométrique de raison $0{,}6$, avec $d_0 = 800$.

4. 1 pts

En déduire l'expression de d_n en fonction de n, puis justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $a_n = 500 + 400 \times 0{,}6^n$ et $b_n = 500 - 400 \times 0{,}6^n$.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique donne d_n. **Aide :** ajoute membre à membre les égalités $a_n + b_n = 1000$ et $a_n - b_n = d_n$, puis divise par 2.

CORRIGÉ

Expression de d_n. Avec la formule du terme général d'une suite géométrique, on obtient, pour tout entier $n \geq 0$, $d_n = 800 \times 0{,}6^n$.

Expressions de a_n et b_n. Soit n un entier, $n \geq 0$. D'après la question 3 :

- $a_n + b_n = 1000$;
- $a_n - b_n = 800 \times 0{,}6^n$.

En ajoutant ces deux égalités membre à membre, $2\,a_n = 1000 + 800 \times 0{,}6^n$. On divise par 2 :

$$a_n = 500 + 400 \times 0{,}6^n.$$

Puis $b_n = 1000 - a_n = 500 - 400 \times 0{,}6^n$.

Contrôle. Pour $n = 1$: $500 + 400 \times 0{,}6 = 740$ et $500 - 400 \times 0{,}6 = 260$, comme à la question 1.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $d_n = 800 \times 0{,}6^n$, $a_n = 500 + 400 \times 0{,}6^n$ et $b_n = 500 - 400 \times 0{,}6^n$.

5. 1,25 pts

Étudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Au bout de combien d'heures l'écart entre les contenus des deux réservoirs devient-il inférieur à 50 litres ? On pourra s'aider de la calculatrice.

INDICE

Outil : calcule $a_{n+1} - a_n$ avec l'expression de la question 4, puis factorise par $400 \times 0{,}6^n$. Pour l'écart d_n, justifie qu'il diminue d'une heure à la suivante, puis dresse un tableau de valeurs à la calculatrice.

CORRIGÉ

La suite (a_n). Soit n un entier, $n \geq 0$. D'après la question 4, les termes 500 s'éliminent :

$$\begin{aligned} &a_{n+1} - a_n \\ &= 400 \times 0{,}6^{n+1} \\ &\quad - 400 \times 0{,}6^n \\ &= 400 \times 0{,}6^n \times (0{,}6 - 1) \\ &= -160 \times 0{,}6^n. \end{aligned}$$

Comme $0{,}6 > 0$, $0{,}6^n > 0$, donc $-160 \times 0{,}6^n < 0$. Par définition, la suite (a_n) est strictement décroissante.

La suite (b_n). De la même façon :

$$\begin{aligned} &b_{n+1} - b_n \\ &= 400 \times 0{,}6^n \times (1 - 0{,}6) \\ &= 160 \times 0{,}6^n. \end{aligned}$$

Ce nombre est strictement positif : la suite (b_n) est strictement croissante.

L'écart. L'écart entre les deux contenus est $a_n - b_n = d_n = 800 \times 0{,}6^n$, positif d'après la question 2. Pour tout entier $n \geq 0$, $d_{n+1} - d_n = 800 \times 0{,}6^n \times (0{,}6 - 1)$, soit $d_{n+1} - d_n = -320 \times 0{,}6^n < 0$: la suite (d_n) est strictement décroissante. À la calculatrice :

n	4	5	6
d_n	$103{,}68$	$62{,}208$	$37{,}3248$

On a $d_5 > 50$ et $d_6 < 50$. Comme (d_n) est décroissante, $d_n \geq d_5 > 50$ pour tout entier $n \leq 5$, et $d_n \leq d_6 < 50$ pour tout entier $n \geq 6$.

Conclusion. L'écart entre les contenus des deux réservoirs devient inférieur à 50 litres au bout de 6 heures.