BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Une suite qui reste entre 0 et 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$.

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : remplace u_n par la valeur du terme précédent, puis calcule avec des fractions.

2.

Vérifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $1 - u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

INDICE

Début : développe $(1 - u_n)^2$, puis compare avec $1 - u_n\,(2 - u_n)$.

3.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.

INDICE

Hérédité : pars de $0 \leq u_n \leq 1$ et encadre d'abord $1 - u_n$. La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$; termine avec la question 2.

4.

Calculer $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Outil : factorise $u_{n+1} - u_n$ par u_n ; la question 3 donne le signe de chaque facteur.

Exercice 2

Croissante, puis bornée, par récurrence

Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $w_{n+1} = \frac{2}{3}\, w_n + 2$.

1.

Calculer w_1 et w_2.

INDICE

Outil : remplace w_n par le terme précédent, puis réduis au même dénominateur.

2.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n \leq w_{n+1}$. Que peut-on en déduire ?

INDICE

Hérédité : pars de $w_n \leq w_{n+1}$. Multiplie par $\frac{2}{3}$, en disant pourquoi le sens est conservé, puis ajoute 2.

3.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $1 \leq w_n \leq 6$. La suite (w_n) est-elle bornée ?

INDICE

Hérédité : même démarche qu'à la question 2, à partir de $1 \leq w_n \leq 6$; remarque que $\frac{2}{3} \times 6 + 2 = 6$. Compare enfin le minorant obtenu avec 1.

Exercice 3

Le quotient de deux termes consécutifs

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $r_n = \dfrac{n \times 2^n}{3^n}$.

1.

Calculer r_1, r_2, r_3 et r_4.

INDICE

Outil : la suite est explicite ; simplifie chaque fraction obtenue.

2.

Justifier que tous les termes sont strictement positifs, puis que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{2(n+1)}{3n}$.

INDICE

Début : diviser par r_n, c'est multiplier par $\dfrac{3^n}{n \times 2^n}$. Simplifie ensuite les puissances de 2 et de 3.

3.

Justifier que $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} \leq 1$ pour tout entier $n \geq 2$, et en déduire le sens de variation de la suite $(r_n)_{n\geq 2}$. La suite $(r_n)_{n\geq 1}$ est-elle décroissante ?

INDICE

Outil : comme $3n > 0$, le quotient est inférieur ou égal à 1 dès que $2n + 2 \leq 3n$. Pour la dernière question, compare r_1 et r_2.

Exercice 4

Le sens de variation par une fonction associée

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $q_n = 5 - \dfrac{6}{n+2}$. On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 5 - \dfrac{6}{x+2}$.

1.

Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : prends deux réels $0 \leq a < b$. Compare $a+2$ et $b+2$, puis leurs inverses, puis $g(a)$ et $g(b)$.

2.

En déduire le sens de variation de la suite (q_n).

INDICE

Outil : on a $q_n = g(n)$; utilise l'énoncé « sens de variation d'une suite définie de façon explicite ».

3.

Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $2 \leq q_n < 5$. La suite (q_n) est-elle bornée ?

INDICE

Outil : g est croissante sur $[0, +\infty[$ et $0 \leq n$: compare $g(0)$ et $g(n)$. Pour le majorant, regarde le signe de $\dfrac{6}{n+2}$.

Exercice 5

Des poissons dans un lac

Dans un lac, on compte 2000 poissons au début d'une étude. D'une année à la suivante, la population est multipliée par $1{,}2$, puis on prélève 300 poissons.

On note p_n le nombre de poissons après n années. Ainsi $p_0 = 2000$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$p_{n+1} = 1{,}2\,p_n - 300.$$

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = p_n - 1500$.

1.

Calculer p_1 et p_2.

INDICE

Outil : applique la relation de récurrence, à partir de $p_0 = 2000$.

2.

Justifier que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Début : écris $v_{n+1} = p_{n+1} - 1500$, remplace p_{n+1}, puis factorise par $1{,}2$.

3.

En déduire l'expression de p_n en fonction de n, puis le sens de variation de la suite (p_n).

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique, puis $p_n = v_n + 1500$. Pour le sens de variation, calcule $p_{n+1} - p_n$.

4.

À la calculatrice, donner le nombre de poissons après 5 années, arrondi à l'unité.

INDICE

Outil : l'expression de p_n trouvée à la question 3, avec $n = 5$.

Exercice 6

Des sommes à reconnaître

Les questions 1 et 2 d'une part, la question 3 d'autre part, sont indépendantes.

1.

Calculer la somme $A = 2 + 5 + 8 + \cdots + 98$, où chaque terme dépasse le précédent de 3.

INDICE

Outil : les termes de A sont les nombres $i_k = 3k + 2$. Trouve l'indice k tel que $i_k = 98$, puis compte les termes.

2.

Plus généralement, exprimer $2 + 5 + \cdots + (3n - 1)$ en fonction de l'entier $n \geq 1$.

INDICE

Outil : même méthode ; $3n - 1 = i_{n-1}$, donc la somme compte n termes.

3.

Soit $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $t_0 = 5$ et de raison -2. Calculer $B = t_2 + t_3 + \cdots + t_6$, puis vérifier le résultat en écrivant les cinq termes.

INDICE

Outil : le premier terme de la somme est t_2, et non t_0. Compte les termes de t_2 à t_6.

Exercice 7

Trois contrats de salaire

Une entreprise propose trois contrats de dix ans. Dans les trois cas, le salaire de la première année est $60\,000$ dirhams.

- Contrat A : le salaire annuel augmente de 1800 dirhams d'une année à la suivante.
- Contrat B : le salaire annuel est multiplié par $1{,}03$ d'une année à la suivante.
- Contrat C : les salaires des trois premières années sont $60\,000$, $62\,000$ et $65\,000$ dirhams.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n et b_n les salaires de l'année numéro n dans les contrats A et B.

1.

Préciser la nature des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$, puis exprimer a_n et b_n en fonction de n.

INDICE

Outil : « augmente de » se traduit par une suite arithmétique, « est multiplié par » par une suite géométrique. Attention : le premier indice est 1.

2.

Les salaires du contrat C peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ? d'une suite géométrique ?

INDICE

Outil : trois termes consécutifs suffisent pour réfuter. Compare deux différences, puis deux quotients.

3.

Calculer le total des salaires perçus en dix ans avec le contrat A. À la calculatrice, faire de même avec le contrat B, arrondi au dirham. Quel contrat rapporte le plus ?

INDICE

Outil : de a_1 à a_{10}, il y a 10 termes. Pour le contrat B, le premier terme de la somme est b_1.