BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Une suite qui reste entre 0 et 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$.

1.

Calculer u_1 et u_2.

INDICE

Outil : remplace u_n par la valeur du terme précédent, puis calcule avec des fractions.

CORRIGÉ

On applique la relation de récurrence à partir de $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{4} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{16}. \\ u_2 &= \frac{7}{16} \times \left(2 - \frac{7}{16}\right) \\ &= \frac{7}{16} \times \frac{25}{16} \\ &= \frac{175}{256}. \end{aligned}$$

Conclusion. $u_1 = \dfrac{7}{16}$ et $u_2 = \dfrac{175}{256}$.

2.

Vérifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $1 - u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

INDICE

Début : développe $(1 - u_n)^2$, puis compare avec $1 - u_n\,(2 - u_n)$.

CORRIGÉ

Soit n un entier, $n \geq 0$. On développe séparément les deux membres.

Premier membre. Par définition de la suite :

$$\begin{aligned} 1 - u_{n+1} &= 1 - u_n\,(2 - u_n) \\ &= 1 - 2u_n + u_n^2. \end{aligned}$$

Second membre. D'après l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$(1 - u_n)^2 = 1 - 2u_n + u_n^2.$$

Conclusion. Les deux développements coïncident : pour tout entier $n \geq 0$, $1 - u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

3.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.

INDICE

Hérédité : pars de $0 \leq u_n \leq 1$ et encadre d'abord $1 - u_n$. La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$; termine avec la question 2.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $0 \leq \dfrac{1}{4} \leq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 1$. On encadre d'abord $1 - u_n$, puis son carré.

On multiplie par $-1 < 0$, les inégalités changent de sens : $-1 \leq -u_n \leq 0$. On ajoute 1 : $0 \leq 1 - u_n \leq 1$.

Ces nombres sont positifs et la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$: les inégalités gardent leur sens, et $0 \leq (1 - u_n)^2 \leq 1$. D'après la question 2, cela s'écrit $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq 1$.

On multiplie par $-1 < 0$, les inégalités changent de sens : $-1 \leq u_{n+1} - 1 \leq 0$. On ajoute 1 : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété P est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$. En particulier, la suite (u_n) est bornée.

4.

Calculer $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

INDICE

Outil : factorise $u_{n+1} - u_n$ par u_n ; la question 3 donne le signe de chaque facteur.

CORRIGÉ

Différence. Soit n un entier, $n \geq 0$. Par définition de la suite :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ & = 2u_n - u_n^2 - u_n \\ & = u_n - u_n^2 \\ & = u_n\,(1 - u_n). \end{aligned}$$

Signe. D'après la question 3, $u_n \geq 0$ et $1 - u_n \geq 0$. Un produit de deux nombres positifs est positif : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$: par définition, la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2

Croissante, puis bornée, par récurrence

Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $w_{n+1} = \dfrac{2}{3}\, w_n + 2$.

1.

Calculer w_1 et w_2.

INDICE

Outil : remplace w_n par le terme précédent, puis réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

On applique la relation de récurrence à partir de $w_0 = 1$.

$$w_1 = \frac{2}{3} \times 1 + 2 = \frac{8}{3}.$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{2}{3} \times \frac{8}{3} + 2 \\ &= \frac{16}{9} + \frac{18}{9} = \frac{34}{9}. \end{aligned}$$

Conclusion. $w_1 = \dfrac{8}{3}$ et $w_2 = \dfrac{34}{9}$.

2.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n \leq w_{n+1}$. Que peut-on en déduire ?

INDICE

Hérédité : pars de $w_n \leq w_{n+1}$. Multiplie par $\dfrac{2}{3}$, en disant pourquoi le sens est conservé, puis ajoute 2.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P(n)$ la propriété « $w_n \leq w_{n+1}$ ».

Initialisation. $w_0 = 1$ et $w_1 = \dfrac{8}{3}$. Comme $1 \leq \dfrac{8}{3}$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$, c'est-à-dire $w_n \leq w_{n+1}$.

On multiplie par $\dfrac{2}{3} > 0$, l'inégalité garde son sens : $\dfrac{2}{3}\, w_n \leq \dfrac{2}{3}\, w_{n+1}$. On ajoute 2 aux deux membres :

$$\frac{2}{3}\, w_n + 2 \leq \frac{2}{3}\, w_{n+1} + 2.$$

Par définition de la suite, le membre de gauche est w_{n+1} et celui de droite est w_{n+2}. Ainsi $w_{n+1} \leq w_{n+2}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété P est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n \leq w_{n+1}$. Par définition, la suite (w_n) est donc croissante.

3.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $1 \leq w_n \leq 6$. La suite (w_n) est-elle bornée ?

INDICE

Hérédité : même démarche qu'à la question 2, à partir de $1 \leq w_n \leq 6$; remarque que $\frac{2}{3} \times 6 + 2 = 6$. Compare enfin le minorant obtenu avec 1.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $P(n)$ la propriété « $1 \leq w_n \leq 6$ ».

Initialisation. $w_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 6$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$, c'est-à-dire $1 \leq w_n \leq 6$.

On multiplie par $\frac{2}{3} > 0$, les inégalités gardent leur sens : $\frac{2}{3} \leq \frac{2}{3} w_n \leq 4$.

On ajoute 2 : $\frac{8}{3} \leq \frac{2}{3} w_n + 2 \leq 6$, soit, par définition de la suite :

$$\frac{8}{3} \leq w_{n+1} \leq 6.$$

Comme $1 \leq \frac{8}{3}$, on en déduit $1 \leq w_{n+1} \leq 6$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété P est initialisée et héréditaire. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, $1 \leq w_n \leq 6$. La suite (w_n) est minorée par 1 et majorée par 6 : par définition, elle est bornée.

Exercice 3

Le quotient de deux termes consécutifs

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $r_n = \dfrac{n \times 2^n}{3^n}$.

1.

Calculer r_1, r_2, r_3 et r_4.

INDICE

Outil : la suite est explicite ; simplifie chaque fraction obtenue.

CORRIGÉ

La suite est explicite : on remplace n par 1, 2, 3 et 4 dans $\dfrac{n \times 2^n}{3^n}$, puis on simplifie.

- $r_1 = \dfrac{1 \times 2}{3} = \dfrac{2}{3}$;
- $r_2 = \dfrac{2 \times 4}{9} = \dfrac{8}{9}$;
- $r_3 = \dfrac{3 \times 8}{27} = \dfrac{8}{9}$;
- $r_4 = \dfrac{4 \times 16}{81} = \dfrac{64}{81}$.

2.

Justifier que tous les termes sont strictement positifs, puis que, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{2(n+1)}{3n}$.

INDICE

Début : diviser par r_n, c'est multiplier par $\dfrac{3^n}{n \times 2^n}$. Simplifie ensuite les puissances de 2 et de 3.

CORRIGÉ

Signe des termes. Soit n un entier, $n \geq 1$. Les nombres n, 2^n et 3^n sont strictement positifs, donc leur combinaison $r_n = \dfrac{n \times 2^n}{3^n}$ l'est aussi : $r_n > 0$.

Quotient. Comme $r_n \neq 0$, on peut diviser par r_n. On regroupe les facteurs de même nature :

$$\begin{aligned}\frac{r_{n+1}}{r_n} &= \frac{n+1}{n} \times \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{n} \times 2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2(n+1)}{3n}.\end{aligned}$$

Conclusion. Tous les termes sont strictement positifs et, pour tout entier $n \geq 1$, $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{2(n+1)}{3n}$.

3.

Justifier que $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} \leq 1$ pour tout entier $n \geq 2$, et en déduire le sens de variation de la suite $(r_n)_{n\geq 2}$. La suite $(r_n)_{n\geq 1}$ est-elle décroissante ?

INDICE

Outil : comme $3n > 0$, le quotient est inférieur ou égal à 1 dès que $2n + 2 \leq 3n$. Pour la dernière question, compare r_1 et r_2.

CORRIGÉ

Comparaison du quotient à 1. Soit n un entier, $n \geq 2$. On a $3n - (2n + 2) = n - 2 \geq 0$, donc $2n + 2 \leq 3n$. On divise par $3n > 0$, l'inégalité garde son sens :

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{2n+2}{3n} \leq 1.$$

Sens de variation. Les termes sont strictement positifs, et le quotient de deux termes consécutifs est inférieur ou égal à 1 à partir du rang 2. D'après la propriété du quotient de deux termes consécutifs, la suite $(r_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

Cas du rang 1. $r_1 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9} < \dfrac{8}{9} = r_2$: le premier terme est plus petit que le deuxième.

Conclusion. La suite $(r_n)_{n\geq 2}$ est décroissante, mais la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ ne l'est pas, car $r_1 < r_2$.

Exercice 4

Le sens de variation par une fonction associée

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $q_n = 5 - \dfrac{6}{n+2}$. On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 5 - \dfrac{6}{x+2}$.

1.

Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : prends deux réels $0 \leq a < b$. Compare $a+2$ et $b+2$, puis leurs inverses, puis $g(a)$ et $g(b)$.

CORRIGÉ

Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$. On compare $g(a)$ et $g(b)$ en reprenant, étape par étape, la construction de g.

- On ajoute 2 : $2 \leq a+2 < b+2$.
- Ces nombres sont strictement positifs ; en passant aux inverses, l'inégalité change de sens : $\dfrac{1}{a+2} > \dfrac{1}{b+2}$.
- On multiplie par $-6 < 0$, l'inégalité change de sens : $-\dfrac{6}{a+2} < -\dfrac{6}{b+2}$.
- On ajoute 5 : $g(a) < g(b)$.

Conclusion. Pour tous réels a et b de $[0, +\infty[$ tels que $a < b$, on a $g(a) < g(b)$: la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2.

En déduire le sens de variation de la suite (q_n).

INDICE

Outil : on a $q_n = g(n)$; utilise l'énoncé « sens de variation d'une suite définie de façon explicite ».

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 0$, $q_n = g(n)$: la suite (q_n) est associée à la fonction g. D'après la question 1, g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

D'après l'énoncé « sens de variation d'une suite définie de façon explicite », une fonction associée strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donne une suite strictement croissante.

Conclusion. La suite (q_n) est strictement croissante.

3.

Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $2 \leq q_n < 5$. La suite (q_n) est-elle bornée ?

INDICE

Outil : g est croissante sur $[0, +\infty[$ et $0 \leq n$: compare $g(0)$ et $g(n)$. Pour le majorant, regarde le signe de $\dfrac{6}{n+2}$.

CORRIGÉ

Minorant. Soit n un entier, $n \geq 0$. Les réels 0 et n appartiennent à $[0, +\infty[$, avec $0 \leq n$. D'après la question 1, g est croissante sur cet intervalle, donc $g(0) \leq g(n)$, c'est-à-dire $q_n \geq q_0 = 5 - 3 = 2$.

Majorant. Comme $n + 2 > 0$, $\dfrac{6}{n+2} > 0$. On retranche à 5 un nombre strictement positif : $q_n < 5$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $2 \leq q_n < 5$. La suite (q_n) est minorée et majorée : elle est bornée.

Exercice 5

Des poissons dans un lac

Dans un lac, on compte 2000 poissons au début d'une étude. D'une année à la suivante, la population est multipliée par $1{,}2$, puis on prélève 300 poissons.

On note p_n le nombre de poissons après n années. Ainsi $p_0 = 2000$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$p_{n+1} = 1{,}2\,p_n - 300.$$

On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = p_n - 1500$.

1.

Calculer p_1 et p_2.

INDICE

Outil : applique la relation de récurrence, à partir de $p_0 = 2000$.

CORRIGÉ

On applique la relation de récurrence à partir de $p_0 = 2000$:

- $p_1 = 1{,}2 \times 2000 - 300 = 2100$;
- $p_2 = 1{,}2 \times 2100 - 300 = 2220$.

Après deux années, le lac compte 2220 poissons.

2.

Justifier que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Début : écris $v_{n+1} = p_{n+1} - 1500$, remplace p_{n+1}, puis factorise par $1{,}2$.

CORRIGÉ

Soit n un entier, $n \geq 0$. On part de $v_{n+1} = p_{n+1} - 1500$ et l'on remplace p_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1{,}2\,p_n - 300 - 1500 \\ &= 1{,}2\,p_n - 1800 \\ &= 1{,}2\,(p_n - 1500) \\ &= 1{,}2\,v_n. \end{aligned}$$

Le coefficient $1{,}2$ ne dépend pas de n. Le premier terme est $v_0 = p_0 - 1500 = 500$.

Conclusion. Par définition, (v_n) est géométrique, de raison $1{,}2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

3.

En déduire l'expression de p_n en fonction de n, puis le sens de variation de la suite (p_n).

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique, puis $p_n = v_n + 1500$. Pour le sens de variation, calcule $p_{n+1} - p_n$.

CORRIGÉ

Expression de p_n. Avec la formule du terme général d'une suite géométrique, on obtient, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n = 500 \times 1{,}2^n$. Comme $p_n = v_n + 1500$:

$$p_n = 500 \times 1{,}2^n + 1500.$$

Sens de variation. Soit n un entier, $n \geq 0$. Dans la différence, les deux termes 1500 s'éliminent ; on factorise ensuite par $500 \times 1{,}2^n$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= 500 \times 1{,}2^{n+1} \\ &\quad - 500 \times 1{,}2^n \\ &= 500 \times 1{,}2^n \times (1{,}2 - 1) \\ &= 100 \times 1{,}2^n. \end{aligned}$$

Comme $1{,}2^n > 0$, on a $p_{n+1} - p_n > 0$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $p_n = 500 \times 1{,}2^n + 1500$. Par définition, la suite (p_n) est strictement croissante : la population augmente d'une année à l'autre.

4.

À la calculatrice, donner le nombre de poissons après 5 années, arrondi à l'unité.

INDICE

Outil : l'expression de p_n trouvée à la question 3, avec $n = 5$.

CORRIGÉ

D'après la question 3, avec $n = 5$:

$$\begin{aligned} p_5 &= 500 \times 1{,}2^5 + 1500 \\ &= 500 \times 2{,}48832 + 1500 \\ &= 1244{,}16 + 1500 \\ &= 2744{,}16. \end{aligned}$$

Conclusion. Après 5 années, le lac compte environ 2744 poissons.

Exercice 6

Des sommes à reconnaître

Les questions 1 et 2 d'une part, la question 3 d'autre part, sont indépendantes.

1.

Calculer la somme $A = 2 + 5 + 8 + \cdots + 98$, où chaque terme dépasse le précédent de 3.

INDICE

Outil : les termes de A sont les nombres $i_k = 3k + 2$. Trouve l'indice k tel que $i_k = 98$, puis compte les termes.

CORRIGÉ

Suite. On considère la suite $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $i_k = 3k + 2$. Pour tout entier $k \geq 0$, $i_{k+1} - i_k = 3$: elle est arithmétique de raison 3, de premier terme $i_0 = 2$.

Nombre de termes. $98 = 3 \times 32 + 2$, donc $98 = i_{32}$. La somme va de i_0 à i_{32} : elle compte $32 - 0 + 1 = 33$ termes.

Calcul. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} A &= 33 \times \frac{2 + 98}{2} \\ &= 33 \times 50 = 1650. \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 1650$.

2.

Plus généralement, exprimer $2 + 5 + \cdots + (3n - 1)$ en fonction de l'entier $n \geq 1$.

INDICE

Outil : même méthode ; $3n - 1 = i_{n-1}$, donc la somme compte n termes.

CORRIGÉ

Nombre de termes. $3n - 1 = 3(n - 1) + 2$, donc $3n - 1 = i_{n-1}$. La somme va de i_0 à i_{n-1} : elle compte n termes.

Calcul. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} &2 + 5 + \cdots + (3n - 1) \\ &= n \times \frac{2 + (3n - 1)}{2} \\ &= \frac{n(3n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour $n = 33$, on retrouve $A = \dfrac{33 \times 100}{2} = 1650$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $2 + 5 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$.

3.

Soit $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $t_0 = 5$ et de raison -2. Calculer $B = t_2 + t_3 + \cdots + t_6$, puis vérifier le résultat en écrivant les cinq termes.

INDICE

Outil : le premier terme de la somme est t_2, et non t_0. Compte les termes de t_2 à t_6.

CORRIGÉ

Premier terme et nombre de termes. D'après le terme général d'une suite géométrique, $t_2 = 5 \times (-2)^2 = 20$. De t_2 à t_6, la somme compte $6 - 2 + 1 = 5$ termes.

Calcul. La raison -2 est différente de 1. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} B &= 20 \times \frac{1 - (-2)^5}{1 - (-2)} \\ &= 20 \times \frac{33}{3} \\ &= 220. \end{aligned}$$

Vérification. Les cinq termes sont 20, -40, 80, -160 et 320, donc $B = 20 - 40 + 80 - 160 + 320 = 220$.

Conclusion. $B = 220$.

Exercice 7

Trois contrats de salaire

Une entreprise propose trois contrats de dix ans. Dans les trois cas, le salaire de la première année est $60\,000$ dirhams.

- Contrat A : le salaire annuel augmente de 1800 dirhams d'une année à la suivante.
- Contrat B : le salaire annuel est multiplié par $1{,}03$ d'une année à la suivante.
- Contrat C : les salaires des trois premières années sont $60\,000$, $62\,000$ et $65\,000$ dirhams.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n et b_n les salaires de l'année numéro n dans les contrats A et B.

1.

Préciser la nature des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$, puis exprimer a_n et b_n en fonction de n.

INDICE

Outil : « augmente de » se traduit par une suite arithmétique, « est multiplié par » par une suite géométrique. Attention : le premier indice est 1.

CORRIGÉ

Contrat A. Pour tout entier $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 1800$: la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique de raison 1800, de premier terme $a_1 = 60\,000$. Avec la formule du terme général d'une suite arithmétique, on obtient, pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_n = 60\,000 + 1800\,(n-1).$$

Contrat B. Pour tout entier $n \geq 1$, $b_{n+1} = 1{,}03\,b_n$: la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $1{,}03$, de premier terme $b_1 = 60\,000$. Avec la formule du terme général d'une suite géométrique, on obtient, pour tout entier $n \geq 1$:

$$b_n = 60\,000 \times 1{,}03^{n-1}.$$

2.

Les salaires du contrat C peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ? d'une suite géométrique ?

INDICE

Outil : trois termes consécutifs suffisent pour réfuter. Compare deux différences, puis deux quotients.

CORRIGÉ

Suite arithmétique ? Les différences de deux salaires consécutifs valent $62\,000 - 60\,000 = 2000$ et $65\,000 - 62\,000 = 3000$. Elles ne sont pas égales : ces salaires ne sont pas les premiers termes d'une suite arithmétique.

Suite géométrique ? Les quotients valent $\dfrac{62\,000}{60\,000} = \dfrac{31}{30}$ et $\dfrac{65\,000}{62\,000} = \dfrac{65}{62}$. On compare les produits en croix : $31 \times 62 = 1922$ et $30 \times 65 = 1950$. Ils diffèrent, donc $\dfrac{31}{30} \neq \dfrac{65}{62}$.

Conclusion. Les salaires du contrat C ne sont les premiers termes ni d'une suite arithmétique, ni d'une suite géométrique.

3.

Calculer le total des salaires perçus en dix ans avec le contrat A. À la calculatrice, faire de même avec le contrat B, arrondi au dirham. Quel contrat rapporte le plus ?

INDICE

Outil : de a_1 à a_{10}, il y a 10 termes. Pour le contrat B, le premier terme de la somme est b_1.

CORRIGÉ

Contrat A. D'après la question 1, $a_{10} = 60\,000 + 1800 \times 9 = 76\,200$. La somme $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ compte 10 termes. On applique la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \\ &= 10 \times \frac{60\,000 + 76\,200}{2} \\ &= 681\,000. \end{aligned}$$

Contrat B. La somme $b_1 + b_2 + \cdots + b_{10}$ compte 10 termes, et son premier terme est $b_1 = 60\,000$. La raison $1{,}03$ est différente de 1. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} &b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} \\ &= 60\,000 \times \frac{1 - 1{,}03^{10}}{1 - 1{,}03} \\ &= 2\,000\,000 \times (1{,}03^{10} - 1). \end{aligned}$$

La calculatrice donne cette somme arrondie au dirham, soit environ $687\,833$ dirhams.

Conclusion. Sur dix ans, le contrat A rapporte $681\,000$ dirhams et le contrat B rapporte le plus : environ 6833 dirhams de plus que le contrat A.