BURHAN

Suites numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	9

Exercice 1

Les termes d'une suite explicite

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier $n \geq 0$, par $a_n = 2^n - n$.

1.

Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

INDICE

Outil : la suite est explicite ; remplace n par chaque indice. N'oublie pas que $2^0 = 1$.

2.

Calculer a_{10} sans calculer les termes précédents.

INDICE

Outil : remplace n par 10 ; rappelle-toi que $2^{10} = 1024$.

Exercice 2

Calculer rang après rang

Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = -1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $b_{n+1} = b_n^2 + b_n + 1$.

1.

Calculer b_1, b_2, b_3 et b_4, puis présenter les résultats dans un tableau.

INDICE

Outil : chaque terme se calcule à partir du précédent. Commence par $b_1 = (-1)^2 + (-1) + 1$.

2.

La relation de récurrence permet-elle de calculer b_{10} directement, comme le terme d'une suite explicite ? Expliquer.

INDICE

Outil : relis la relation de récurrence. De quel terme a-t-on besoin pour obtenir b_{10} ?

Exercice 3

Terme suivant, terme d'indice double

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \dfrac{n}{n+4}$.

1.

Exprimer c_{n+1} en fonction de n.

INDICE

Outil : remplace n par $n+1$ au numérateur **et** au dénominateur.

2.

Exprimer $c_n + 1$ en fonction de n. Comparer c_1 et $c_0 + 1$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur, en écrivant $1 = \dfrac{n+4}{n+4}$.

3.

Exprimer c_{2n} en fonction de n, puis calculer c_6 de deux façons.

INDICE

Outil : remplace n par $2n$, puis simplifie par 2. Pour c_6, prends $n = 3$ dans l'expression de c_{2n}.

Exercice 4

Majorer et minorer sans récurrence

Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_n = 2 + \dfrac{5}{n+3}$.

1.

Justifier que la suite (d_n) est minorée par 2.

INDICE

Outil : quel est le signe de $\dfrac{5}{n+3}$?

2.

Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $\dfrac{5}{n+3} \leq \dfrac{5}{3}$. En déduire que la suite (d_n) est majorée par $\dfrac{11}{3}$.

INDICE

Outil : pars de $n+3 \geq 3$. Passe aux inverses de nombres strictement positifs, puis multiplie par 5.

3.

La suite (d_n) est-elle bornée ?

INDICE

Outil : la définition d'une suite bornée.

Exercice 5

Le signe de la différence de deux termes

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $e_n = 2^n - 3n$.

1.

Calculer e_0, e_1, e_2 et e_3. La suite (e_n) est-elle monotone ?

INDICE

Outil : une suite monotone est croissante ou décroissante ; quelques termes suffisent pour **réfuter**.

2.

Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $e_{n+1} - e_n = 2^n - 3$.

INDICE

Début : écris $e_{n+1} = 2^{n+1} - 3(n+1)$, puis utilise $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

3.

En déduire que la suite $(e_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

INDICE

Outil : pour $n \geq 2$, compare 2^n à $2^2 = 4$.

Exercice 6

Arithmétique ou non ?

On considère les suites (f_n) et (g_n) définies, pour tout entier $n \geq 0$, par $f_n = \dfrac{4n-3}{2}$ et $g_n = n(n+1)$.

1.

Justifier que la suite (f_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Outil : calcule $f_{n+1} - f_n$ et vérifie que le résultat ne dépend pas de n.

2.

Calculer g_0, g_1 et g_2. La suite (g_n) est-elle arithmétique ?

INDICE

Outil : trois termes consécutifs suffisent pour réfuter ; compare deux différences.

Exercice 7

Une balle qui rebondit

On lâche une balle d'une hauteur de 250 cm. Après chaque rebond, elle remonte aux quatre cinquièmes de la hauteur précédente. On note $h_0 = 250$, et h_n la hauteur, en cm, atteinte après le rebond numéro n.

1.

Calculer h_1 et h_2.

INDICE

Outil : prendre les quatre cinquièmes d'une hauteur, c'est la multiplier par $\frac{4}{5}$.

2.

Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n. En déduire la nature de la suite (h_n).

INDICE

Outil : la définition d'une suite géométrique ; le coefficient multiplicateur dépend-il de n ?

3.

Exprimer h_n en fonction de n, puis calculer h_3.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique, à partir du premier terme h_0.

Exercice 8

Les rangées d'un amphithéâtre

Dans un amphithéâtre, la première rangée compte 18 sièges. Chaque rangée compte 2 sièges de plus que la précédente. Pour tout entier $n \geq 1$, on note s_n le nombre de sièges de la rangée numéro n ; ainsi $s_1 = 18$.

1.

Justifier que la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique, et donner sa raison.

INDICE

Outil : traduis « 2 sièges de plus » par une relation entre s_{n+1} et s_n.

2.

Exprimer s_n en fonction de n, puis calculer s_{20}.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite arithmétique, avec $p = 1$: ici, le premier indice est 1.

3.

Quelle rangée compte 50 sièges ?

INDICE

Outil : résous l'équation $2n + 16 = 50$, d'inconnue l'entier $n \geq 1$.

Exercice 9

Deux sommes de termes consécutifs

On considère les deux sommes :

$$S = 7 + 11 + 15 + \cdots + 87,$$

$$T = 3 + 6 + 12 + \cdots + 384.$$

1.

Quelle suite arithmétique fournit les termes de S ? Donner sa raison. Combien de termes la somme S compte-t-elle ? Calculer S.

INDICE

Outil : chaque terme vaut le précédent plus 4. Écris $87 = 7 + 4k$: trouve k, puis compte les termes.

2.

Même travail pour T, avec une suite géométrique.

INDICE

Outil : chaque terme est le double du précédent. Écris 384 sous la forme 3×2^k.