BURHAN

Suites numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	9

Exercice 1

Les termes d'une suite explicite

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier $n \geq 0$, par $a_n = 2^n - n$.

1.

Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.

INDICE

Outil : la suite est explicite ; remplace n par chaque indice. N'oublie pas que $2^0 = 1$.

CORRIGÉ

La suite est explicite : chaque terme s'obtient en remplaçant n par son indice dans $2^n - n$.

- $a_0 = 2^0 - 0 = 1$;
- $a_1 = 2^1 - 1 = 1$;
- $a_2 = 2^2 - 2 = 2$;
- $a_3 = 2^3 - 3 = 5$.

2.

Calculer a_{10} sans calculer les termes précédents.

INDICE

Outil : remplace n par 10 ; rappelle-toi que $2^{10} = 1024$.

CORRIGÉ

On remplace n par 10 dans l'expression de a_n, avec $2^{10} = 1024$:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2^{10} - 10 \\ &= 1024 - 10 = 1014. \end{aligned}$$

Conclusion. $a_{10} = 1014$. La suite étant explicite, aucun terme intermédiaire n'a servi.

Exercice 2

Calculer rang après rang

Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = -1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $b_{n+1} = b_n^2 + b_n + 1$.

1.

Calculer b_1, b_2, b_3 et b_4, puis présenter les résultats dans un tableau.

INDICE

Outil : chaque terme se calcule à partir du précédent. Commence par $b_1 = (-1)^2 + (-1) + 1$.

CORRIGÉ

La suite est définie par récurrence : on avance d'un rang à la fois, chaque terme servant au calcul du suivant.

- $b_1 = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$;
- $b_2 = 1^2 + 1 + 1 = 3$;
- $b_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$;
- $b_4 = 13^2 + 13 + 1 = 183$.

n	0	1	2	3	4
b_n	-1	1	3	13	183

2.

La relation de récurrence permet-elle de calculer b_{10} directement, comme le terme d'une suite explicite ? Expliquer.

INDICE

Outil : relis la relation de récurrence. De quel terme a-t-on besoin pour obtenir b_{10} ?

CORRIGÉ

La relation $b_{n+1} = b_n^2 + b_n + 1$ exprime un terme à l'aide du seul terme qui le précède, et non à l'aide de son indice.

Pour obtenir b_{10}, il faut connaître b_9 ; pour b_9, il faut b_8 ; et ainsi de suite jusqu'à b_0.

Conclusion. Non : avec cette relation, on ne calcule pas b_{10} directement. Il faut d'abord calculer $b_1, b_2, \ldots, b_9$, dans cet ordre.

Exercice 3

Terme suivant, terme d'indice double

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \dfrac{n}{n+4}$.

1.

Exprimer c_{n+1} en fonction de n.

INDICE

Outil : remplace n par $n+1$ au numérateur **et** au dénominateur.

CORRIGÉ

On remplace n par $n+1$ au numérateur et au dénominateur. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$c_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+4} = \frac{n+1}{n+5}.$$

2.

Exprimer $c_n + 1$ en fonction de n. Comparer c_1 et $c_0 + 1$.

INDICE

Outil : réduis au même dénominateur, en écrivant $1 = \dfrac{n+4}{n+4}$.

CORRIGÉ

Calcul de $c_n + 1$. On écrit $1 = \dfrac{n+4}{n+4}$ pour réduire au même dénominateur. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} c_n + 1 &= \frac{n}{n+4} + \frac{n+4}{n+4} \\ &= \frac{2n+4}{n+4}. \end{aligned}$$

Comparaison. D'une part $c_1 = \dfrac{1}{1+4} = \dfrac{1}{5}$; d'autre part $c_0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Conclusion. $c_1 \neq c_0 + 1$: le terme suivant c_{n+1} ne s'obtient pas en ajoutant 1 au terme c_n.

3.

Exprimer c_{2n} en fonction de n, puis calculer c_6 de deux façons.

INDICE

Outil : remplace n par $2n$, puis simplifie par 2. Pour c_6, prends $n = 3$ dans l'expression de c_{2n}.

CORRIGÉ

Expression de c_{2n}. On remplace n par $2n$, puis on simplifie par 2. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{2n}{2n+4} = \frac{2n}{2(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Calcul de c_6. Directement : $c_6 = \dfrac{6}{6+4} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$. Avec $n = 3$ dans l'expression de c_{2n} : $c_6 = \dfrac{3}{3+2} = \dfrac{3}{5}$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $c_{2n} = \dfrac{n}{n+2}$, et les deux calculs donnent $c_6 = \dfrac{3}{5}$.

Exercice 4

Majorer et minorer sans récurrence

Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_n = 2 + \dfrac{5}{n+3}$.

1.

Justifier que la suite (d_n) est minorée par 2.

INDICE

Outil : quel est le signe de $\dfrac{5}{n+3}$?

CORRIGÉ

Soit n un entier, $n \geq 0$. Comme $n+3 > 0$, le quotient $\dfrac{5}{n+3}$ est strictement positif.

On ajoute à 2 un nombre strictement positif, donc $d_n > 2$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $d_n \geq 2$: par définition, 2 est un minorant de (d_n), et la suite est minorée par 2.

2.

Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $\dfrac{5}{n+3} \leq \dfrac{5}{3}$. En déduire que la suite (d_n) est majorée par $\dfrac{11}{3}$.

INDICE

Outil : pars de $n+3 \geq 3$. Passe aux inverses de nombres strictement positifs, puis multiplie par 5.

CORRIGÉ

Majoration du quotient. Soit n un entier, $n \geq 0$. On a $n+3 \geq 3 > 0$. En passant aux inverses de deux nombres strictement positifs, l'inégalité change de sens : $\dfrac{1}{n+3} \leq \dfrac{1}{3}$.

On multiplie par $5 > 0$, l'inégalité garde son sens : $\dfrac{5}{n+3} \leq \dfrac{5}{3}$.

Majoration de d_n. On ajoute 2 aux deux membres : $d_n \leq 2 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{11}{3}$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $d_n \leq \dfrac{11}{3}$: la suite (d_n) est majorée par $\dfrac{11}{3}$.

3.

La suite (d_n) est-elle bornée ?

INDICE

Outil : la définition d'une suite bornée.

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, pour tout entier $n \geq 0$:

$$2 < d_n \leq \frac{11}{3}.$$

Conclusion. La suite (d_n) est à la fois minorée et majorée : par définition, elle est bornée.

Exercice 5

Le signe de la différence de deux termes

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $e_n = 2^n - 3n$.

1.

Calculer e_0, e_1, e_2 et e_3. La suite (e_n) est-elle monotone ?

INDICE

Outil : une suite monotone est croissante ou décroissante ; quelques termes suffisent pour **réfuter**.

CORRIGÉ

Termes. On remplace n par chaque indice dans $2^n - 3n$: $2^0 - 0$, $2^1 - 3$, $2^2 - 6$ et $2^3 - 9$. On trouve $e_0 = 1$, $e_1 = -1$, $e_2 = -2$ et $e_3 = -1$.

Monotonie. On a $e_1 < e_0$: la suite n'est pas croissante. On a $e_3 > e_2$: elle n'est pas décroissante.

Conclusion. La suite (e_n) n'est pas monotone.

2.

Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, $e_{n+1} - e_n = 2^n - 3$.

INDICE

Début : écris $e_{n+1} = 2^{n+1} - 3(n+1)$, puis utilise $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

CORRIGÉ

Soit n un entier, $n \geq 0$. On écrit $e_{n+1} = 2^{n+1} - 3(n+1)$ et l'on utilise $2^{n+1} = 2 \times 2^n$:

$$\begin{aligned} & e_{n+1} - e_n \\ &= 2^{n+1} - 3n - 3 \\ &\quad - 2^n + 3n \\ &= 2 \times 2^n - 2^n - 3 \\ &= 2^n - 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$, $e_{n+1} - e_n = 2^n - 3$.

3.

En déduire que la suite $(e_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

INDICE

Outil : pour $n \geq 2$, compare 2^n à $2^2 = 4$.

CORRIGÉ

Soit n un entier, $n \geq 2$. Alors $2^n \geq 2^2 = 4$. D'après la question 2 :

$$e_{n+1} - e_n = 2^n - 3 \geq 1.$$

La différence de deux termes consécutifs est donc strictement positive.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 2$, $e_{n+1} > e_n$: par définition, la suite $(e_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

Exercice 6

Arithmétique ou non ?

On considère les suites (f_n) et (g_n) définies, pour tout entier $n \geq 0$, par $f_n = \dfrac{4n-3}{2}$ et $g_n = n(n+1)$.

1.

Justifier que la suite (f_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Outil : calcule $f_{n+1} - f_n$ et vérifie que le résultat ne dépend pas de n.

CORRIGÉ

Soit n un entier, $n \geq 0$. On calcule la différence de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} & f_{n+1} - f_n \\ &= \frac{4(n+1)-3}{2} - \frac{4n-3}{2} \\ &= \frac{4n+1-4n+3}{2} \\ &= \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Cette différence ne dépend pas de n : par définition, (f_n) est arithmétique de raison 2.

Conclusion. (f_n) est arithmétique, de raison 2 et de premier terme $f_0 = \dfrac{0-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

2.

Calculer g_0, g_1 et g_2. La suite (g_n) est-elle arithmétique ?

INDICE

Outil : trois termes consécutifs suffisent pour réfuter ; compare deux différences.

CORRIGÉ

Termes. $g_0 = 0 \times 1 = 0$, $g_1 = 1 \times 2 = 2$ et $g_2 = 2 \times 3 = 6$.

Différences. $g_1 - g_0 = 2$ et $g_2 - g_1 = 4$. Si la suite était arithmétique, ces deux différences seraient toutes deux égales à la raison.

Conclusion. Les différences 2 et 4 sont distinctes : la suite (g_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 7

Une balle qui rebondit

On lâche une balle d'une hauteur de 250 cm. Après chaque rebond, elle remonte aux quatre cinquièmes de la hauteur précédente. On note $h_0 = 250$, et h_n la hauteur, en cm, atteinte après le rebond numéro n.

1.

Calculer h_1 et h_2.

INDICE

Outil : prendre les quatre cinquièmes d'une hauteur, c'est la multiplier par $\dfrac{4}{5}$.

CORRIGÉ

Chaque rebond multiplie la hauteur par $\dfrac{4}{5}$:

- $h_1 = \dfrac{4}{5} \times 250 = 200$;
- $h_2 = \dfrac{4}{5} \times 200 = 160$.

Après deux rebonds, la balle remonte à 160 cm.

2.

Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n. En déduire la nature de la suite (h_n).

INDICE

Outil : la définition d'une suite géométrique ; le coefficient multiplicateur dépend-il de n ?

CORRIGÉ

Relation. Remonter aux quatre cinquièmes de la hauteur précédente se traduit, pour tout entier $n \geq 0$, par :

$$h_{n+1} = \frac{4}{5}\, h_n.$$

Nature. Le coefficient $\dfrac{4}{5}$ est le même à chaque rebond : il ne dépend pas de n.

Conclusion. Par définition, (h_n) est géométrique, de raison $\dfrac{4}{5}$ et de premier terme $h_0 = 250$.

3.

Exprimer h_n en fonction de n, puis calculer h_3.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite géométrique, à partir du premier terme h_0.

CORRIGÉ

Terme général. D'après le terme général d'une suite géométrique, écrit à partir de h_0, pour tout entier $n \geq 0$:

$$h_n = 250 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Calcul de h_3. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$, donc $h_3 = 250 \times \frac{64}{125} = 128$.

Conclusion. Après trois rebonds, la balle remonte à 128 cm.

Exercice 8

Les rangées d'un amphithéâtre

Dans un amphithéâtre, la première rangée compte 18 sièges. Chaque rangée compte 2 sièges de plus que la précédente. Pour tout entier $n \geq 1$, on note s_n le nombre de sièges de la rangée numéro n ; ainsi $s_1 = 18$.

1.

Justifier que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique, et donner sa raison.

INDICE

Outil : traduis « 2 sièges de plus » par une relation entre s_{n+1} et s_n.

CORRIGÉ

Chaque rangée compte 2 sièges de plus que la précédente. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$s_{n+1} = s_n + 2.$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre 2, qui ne dépend pas de n.

Conclusion. Par définition, $(s_n)_{n\geq 1}$ est arithmétique de raison 2.

2.

Exprimer s_n en fonction de n, puis calculer s_{20}.

INDICE

Outil : le terme général d'une suite arithmétique, avec $p = 1$: ici, le premier indice est 1.

CORRIGÉ

Terme général. Le premier indice est 1. D'après le terme général d'une suite arithmétique, avec $p = 1$, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} s_n &= s_1 + (n-1) \times 2 \\ &= 18 + 2n - 2 \\ &= 2n + 16. \end{aligned}$$

Calcul de s_{20}. $s_{20} = 2 \times 20 + 16 = 56$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $s_n = 2n + 16$, et la vingtième rangée compte 56 sièges.

3.

Quelle rangée compte 50 sièges ?

INDICE

Outil : résous l'équation $2n + 16 = 50$, d'inconnue l'entier $n \geq 1$.

CORRIGÉ

On cherche l'entier $n \geq 1$ tel que $s_n = 50$, c'est-à-dire $2n + 16 = 50$:

$$\begin{aligned} 2n + 16 = 50 &\Leftrightarrow 2n = 34 \\ &\Leftrightarrow n = 17. \end{aligned}$$

L'entier 17 convient, car $17 \geq 1$.

Conclusion. C'est la rangée numéro 17 qui compte 50 sièges.

Exercice 9

Deux sommes de termes consécutifs

On considère les deux sommes :

$$S = 7 + 11 + 15 + \cdots + 87,$$
$$T = 3 + 6 + 12 + \cdots + 384.$$

1.

Quelle suite arithmétique fournit les termes de S ? Donner sa raison. Combien de termes la somme S compte-t-elle ? Calculer S.

INDICE

Outil : chaque terme vaut le précédent plus 4. Écris $87 = 7 + 4k$: trouve k, puis compte les termes.

CORRIGÉ

Suite. Chaque terme de S s'obtient en ajoutant 4 au précédent. On additionne donc les termes $u_k = 7 + 4k$ de la suite arithmétique (u_k) de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 4.

Nombre de termes. $87 - 7 = 80 = 4 \times 20$, donc $87 = u_{20}$. La somme va de u_0 à u_{20} : elle compte $20 - 0 + 1 = 21$ termes.

Calcul. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, cette somme est le produit du nombre de termes et de la demi-somme des deux termes extrêmes :

$$\begin{aligned} S &= 21 \times \frac{7 + 87}{2} \\ &= 21 \times 47 = 987. \end{aligned}$$

Conclusion. $S = 987$.

2.

Même travail pour T, avec une suite géométrique.

INDICE

Outil : chaque terme est le double du précédent. Écris 384 sous la forme 3×2^k.

CORRIGÉ

Suite. Chaque terme de T est le double du précédent. On additionne donc les termes $v_k = 3 \times 2^k$ de la suite géométrique (v_k) de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 2.

Nombre de termes. $384 = 3 \times 128 = 3 \times 2^7$, donc $384 = v_7$. La somme va de v_0 à v_7 : elle compte 8 termes.

Calcul. La raison 2 est différente de 1. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} T &= 3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} \\ &= 3 \times \frac{-255}{-1} \\ &= 3 \times 255 = 765. \end{aligned}$$

Conclusion. $T = 765$.