BURHAN

Suites numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/cours

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Des nombres qui se suivent

Au départ, la tirelire de Yasmine contient 20 dirhams. Chaque samedi, elle y glisse 15 dirhams de plus.

Après un samedi, la tirelire contient 35 dirhams ; après deux samedis, 50 dirhams.

Ces montants forment une liste de nombres, rangés dans l'ordre des samedis.

Devine : Un montant lointain

Combien la tirelire contiendra-t-elle après 10 samedis ?

A. 150 dirhams

Faux.
C'est ce qu'elle ajoute en dix samedis : il manque les 20 dirhams du départ.

B. 185 dirhams

Faux.
Tu as compté onze ajouts ; après dix samedis, il y en a dix.

C. 170 dirhams

Juste.
Juste : 20 au départ, plus dix fois 15.

D. 350 dirhams

Faux.
Tu as multiplié par 10 le montant après un samedi ; or seuls les ajouts se répètent.

Correction
Après 10 samedis, Yasmine a ajouté dix fois 15 dirhams, soit 150 dirhams. Avec les 20 dirhams du départ, la tirelire contient $20 + 10 \times 15 = 170$ dirhams.

Nul besoin de calculer les neuf montants intermédiaires : une formule donne directement le montant.

Une telle liste numérotée est une **suite numérique**.

Dans ce chapitre, tu calcules des termes, par une formule ou de proche en proche. Tu cherches si une suite reste sous un plafond, et si elle monte ou descend.

Tu apprends aussi à rédiger une récurrence sur une suite. Enfin, tu étudies deux familles utiles, les suites arithmétiques et les suites géométriques, avec leurs sommes.

Suite numérique, indice, terme

Une liste numérotée

En clair. Note u_0 le montant de départ de la tirelire, u_1 le montant après un samedi, u_2 après deux samedis.

Le petit nombre écrit en bas est l'**indice** : il donne le rang dans la liste. Le nombre u_n lui-même est un **terme** : ici, un montant en dirhams.

Ainsi $u_0 = 20$, $u_1 = 35$ et $u_2 = 50$.

Devine : L'indice et le terme

Toujours pour la tirelire, combien vaut u_4 ?

A. 4

Faux.
4 est l'indice, le rang dans la liste ; le terme est un montant.

B. 60

Faux.
C'est 4×15 : il manque les 20 dirhams du départ.

C. 80

Juste.
Juste : $20 + 4 \times 15 = 80$.

D. 95

Faux.
C'est u_5 : la liste commence à u_0, pas à u_1.

Correction
Le terme u_4 est le montant après quatre samedis, en dirhams :

$$u_4 = 20 + 4 \times 15 = 80.$$

L'indice 4 dit seulement où se trouve ce terme dans la liste : après u_0, u_1, u_2 et u_3.

La définition

Définition : Suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite numérique** est une fonction qui, à chaque entier naturel $n \geq n_0$, associe un nombre réel noté u_n. On la note $(u_n)_{n \geq n_0}$, ou simplement (u_n).

Le réel u_n est le **terme d'indice** n de la suite, appelé aussi son **terme général** ; le **premier terme** est u_{n_0}. Lorsque $n_0 = 0$, on note aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple : calculer des termes

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = 3n - 2$. Son indice de départ est $n_0 = 1$: son premier terme est u_1.

- $u_1 = 3 \times 1 - 2 = 1$, $u_2 = 3 \times 2 - 2 = 4$ et $u_3 = 7$.
- Pour le terme d'indice 10, on remplace n par 10 : $u_{10} = 30 - 2 = 28$.
- Le terme u_0 n'existe pas : la suite commence au rang 1.

Lire les écritures. Avec la même suite, $u_n = 3n - 2$:

- u_{n+1} est le terme **suivant** : on remplace n par $n + 1$, donc $u_{n+1} = 3(n + 1) - 2 = 3n + 1$;
- u_{2n} est le terme d'indice double : $u_{2n} = 3 \times 2n - 2 = 6n - 2$;
- $u_n + 1$ est le terme augmenté de 1 : $u_n + 1 = 3n - 1$.

Trois écritures voisines, trois nombres différents.

Un piège, puis à toi

Attention : le terme suivant

✗ « Pour $u_n = n^2$, le terme suivant est $u_{n+1} = n^2 + 1$. »

✓ L'indice change le rang du terme. On remplace n par $n + 1$ dans **toute** la formule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 \\ &= n^2 + 2n + 1. \end{aligned}$$

Contrôle avec $n = 2$: $u_3 = 9$, alors que $u_2 + 1 = 5$.

Vérifie : Un indice double

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. À quoi est égal u_{2n} ?

A. $\dfrac{2}{n+1}$

Faux.

C'est $2\,u_n$: on double l'indice, pas le terme.

B. $\dfrac{1}{n+2}$

Faux.

C'est u_{n+1}, le terme suivant.

C. $\dfrac{1}{2n+1}$

Juste.

Juste : on remplace n par $2n$.

D. $\dfrac{1}{2n+2}$

Faux.

C'est $\dfrac{1}{2}\,u_n$: le 1 du dénominateur n'est pas doublé.

Correction

On remplace n par $2n$ dans toute la formule : $u_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$. Contrôle avec $n=1$: $u_2 = \dfrac{1}{3}$, et $\dfrac{1}{2\times 1+1} = \dfrac{1}{3}$.

À toi : La tirelire en formule

Pour la tirelire, justifie que $u_n = 20 + 15n$ pour tout entier $n \geq 0$. Calcule u_{12}, puis exprime u_{n+1} et $u_n + 1$ en fonction de n. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Après n samedis, combien de fois Yasmine a-t-elle ajouté 15 dirhams ?

Indice 2

Pour u_{n+1}, remplace n par $n+1$ dans toute la formule, puis réduis.

Indice 3

Point délicat : $u_n + 1$ garde l'indice n ; on ajoute 1 au terme lui-même.

Réponse

Après n samedis, Yasmine a ajouté n fois 15 dirhams aux 20 dirhams du départ. Donc, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_n = 20 + 15n.$$

En particulier, $u_{12} = 20 + 180 = 200$ dirhams.

Terme suivant. On remplace n par $n+1$ dans toute la formule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 20 + 15(n+1) \\ &= 35 + 15n. \end{aligned}$$

Terme augmenté de un. L'indice reste n : $u_n + 1 = 21 + 15n$.

Suite explicite, suite définie par récurrence

Directement ou de proche en proche

En clair. La tirelire se décrit de deux façons.

Une formule donne chaque montant directement : $u_n = 20 + 15n$.

Une règle de passage le donne aussi : chaque samedi, on ajoute 15 au montant précédent, soit $u_{n+1} = u_n + 15$.

La première calcule un terme **directement**. La seconde le calcule **de proche en proche**, à partir de $u_0 = 20$.

Devine : Un terme de proche en proche

Voici une autre suite : $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,u_n + 2$. Chaque terme est la moitié du précédent, augmentée de 2. Combien vaut u_2 ?

A. $\dfrac{9}{4}$

Faux.

Tu as pris la moitié de $u_1 + 2$; on prend la moitié de u_1, puis on ajoute 2.

B. $\dfrac{5}{2}$

Faux.

C'est u_1 ; il faut encore un pas.

C. $\dfrac{9}{2}$

Faux.

Tu as ajouté 2 à u_1 sans prendre sa moitié.

D. $\dfrac{13}{4}$

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{2} + 2 = \dfrac{13}{4}$.

Correction

On calcule d'abord u_1, puis u_2 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \times 1 + 2 = \frac{5}{2}, \\ u_2 &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + 2 \\ &= \frac{5}{4} + \frac{8}{4} \\ &= \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

Avec la seule relation de récurrence, on doit passer par u_1 pour atteindre u_2.

Deux modes de définition

Définition : Modes de définition d'une suite

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ peut être définie :

- **de façon explicite**, par une formule $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$: chaque terme se calcule directement à partir de son indice ;
- **par récurrence**, par la donnée de son premier terme u_{n_0} et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier $n \geq n_0$, où f est une fonction : chaque terme se calcule à partir du précédent.

Une définition par récurrence n'a de sens que si chaque terme u_n appartient à l'ensemble de définition de f.

Exemple : une suite explicite

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = n^2$. C'est une définition explicite : $u_n = f(n)$, avec la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0, +\infty[$.

Chaque terme se calcule seul : $u_5 = 25$ et $u_{12} = 144$, sans calculer les termes précédents.

Exemple : la suite fil rouge

La suite de l'activité est définie par récurrence : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 2$. On calcule ses termes l'un après l'autre :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{13}{4}$	$\dfrac{29}{8}$	$\dfrac{61}{16}$

Cette suite revient dans tout le chapitre : c'est la **suite fil rouge**.

La méthode, un blocage, puis à toi

Méthode : calculer des termes

1. **Repère** le mode de définition : une formule en n, ou un premier terme avec une relation entre u_{n+1} et u_n.
2. **Explicite** : remplace n par l'indice voulu, dans toute la formule.
3. **Récurrence** : pars du premier terme et applique la relation, un pas après l'autre.
4. **Vérifie** que chaque terme obtenu reste dans l'ensemble de définition de la fonction.

> **Vérifie : Quel mode ?**
>
> Laquelle de ces suites est définie par récurrence ?

A. $u_n = 3n - 2$, pour tout entier $n \geq 1$

Faux.

Une formule en n : la suite est explicite.

B. $t_0 = 20$ et $t_{n+1} = t_n + 15$, pour tout entier $n \geq 0$

Juste.

Juste : un premier terme et une relation de passage.

C. $v_n = \dfrac{1}{n+1}$, pour tout entier $n \geq 0$

Faux.

Une formule en n : la suite est explicite.

D. $a_n = 2^n$, pour tout entier $n \geq 0$

Faux.

Une formule en n : chaque terme se calcule seul.

Correction

La suite (t_n) est donnée par son premier terme $t_0 = 20$ et par une relation qui calcule t_{n+1} à partir de t_n : elle est définie par récurrence. C'est la tirelire. Les trois autres suites sont données par une formule en n : elles sont explicites.

Exemple **: Contre-exemple : une relation qui bloque**

Soit $z_0 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{z_n - 1}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ n'est pas définie en 1.

- $z_1 = \dfrac{1}{2-1} = 1$.
- z_2 exigerait $\dfrac{1}{1-1}$, une division par 0.

Cette relation ne définit donc pas de suite à partir de $z_0 = 2$. Chaque terme doit rester dans l'ensemble de définition.

À toi : Deux calculs de termes

Avec le tableau de la suite fil rouge, calcule u_5. Pour la tirelire, quelle écriture donne le plus vite le montant après 30 samedis ? Calcule ce montant. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour u_5, applique la relation à $u_4 = \dfrac{61}{16}$.

Indice 2

Prends la moitié de $\dfrac{61}{16}$, puis ajoute 2 écrit avec le dénominateur 32.

Indice 3

Point délicat : $2 = \dfrac{64}{32}$, et non $\dfrac{2}{32}$.

Réponse

Suite fil rouge. On applique la relation à $u_4 = \dfrac{61}{16}$:

$$\begin{aligned} u_5 &= \frac{1}{2} \times \frac{61}{16} + 2 \\ &= \frac{61}{32} + \frac{64}{32} \\ &= \frac{125}{32}. \end{aligned}$$

Tirelire. La formule explicite $u_n = 20 + 15n$ évite trente pas de calcul : $u_{30} = 20 + 450 = 470$ dirhams.

Suites majorées, minorées, bornées

Un même plafond

En clair. Relis le tableau de la suite fil rouge : 1, $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{13}{4}$, $\dfrac{29}{8}$, $\dfrac{61}{16}$.

Les termes augmentent, mais un même nombre semble rester au-dessus de tous.

Or « tous les termes », c'est une infinité de termes. Un tableau ne suffit donc pas : il faudra une preuve.

Devine : Un plafond commun

D'après le tableau, quel réel semble être un plafond pour **tous** les termes de la suite fil rouge ?

A. 1

Faux.

C'est le premier terme ; les suivants le dépassent.

B. $\dfrac{61}{16}$

Faux.

C'est le plus grand terme du tableau, mais $u_5 = \dfrac{125}{32}$ le dépasse.

C. 4

Juste.

Juste : tous les termes calculés restent sous 4 ; une récurrence le prouvera.

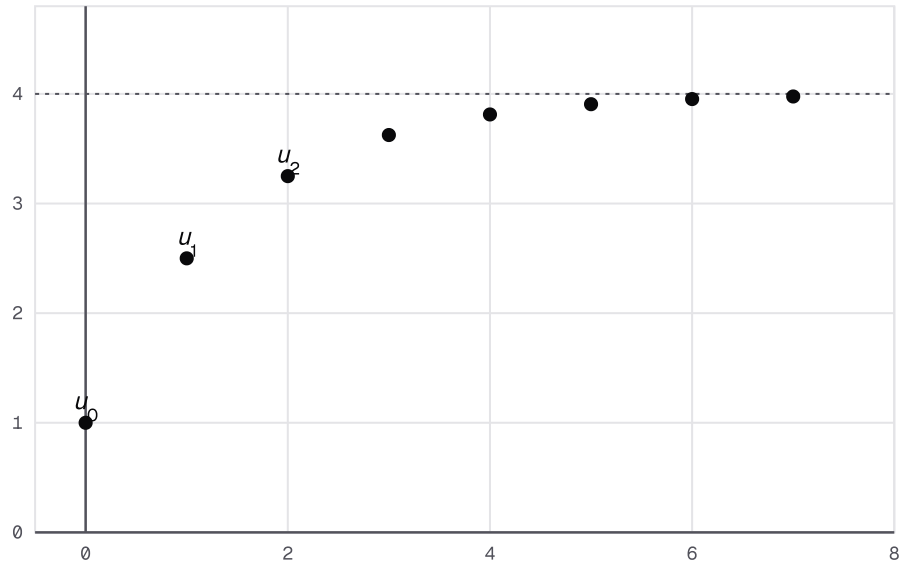
D. $n + 1$

Faux.

Ce nombre dépend de n : ce n'est pas un plafond commun.

Correction

Les termes calculés, jusqu'à $u_5 = \dfrac{125}{32}$, restent sous 4. Le nombre $\dfrac{61}{16}$ ne convient pas, car u_5 est plus grand. Pour l'instant, 4 n'est qu'une conjecture : la suite de la section la démontre.



Les huit premiers termes de la suite fil rouge, placés aux points (n, u_n) : ils montent de moins en moins, et tous restent sous la droite d'équation y = 4. Ce dessin appuie la conjecture, la récurrence la démontrera.

Majorant, minorant

Définition : Suites majorées, minorées, bornées

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$; le réel M est un **majorant** de la suite.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq m$; le réel m est un **minorant** de la suite.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Un majorant, ou un minorant, est un réel fixé : il est le même pour tous les termes et ne dépend pas de n.

Exemple : une suite bornée

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, et soit $n \geq 0$ un entier.

Minorant. Comme $n+1 > 0$, on a $\dfrac{1}{n+1} > 0$.

Majorant. On a $n+1 \geq 1$, et la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$: donc $\dfrac{1}{n+1} \leq 1$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq 1.$$

- 0 est un minorant et 1 un majorant : la suite est bornée.
- Tout réel plus grand que 1, comme 2, est aussi un majorant : un majorant n'est pas unique.

Attention : un majorant ne dépend pas de n

✗ « Pour tout entier $n \geq 1$, $3n - 2 \leq 3n$; donc la suite définie par $u_n = 3n - 2$ est majorée. »

✓ Le nombre $3n$ change avec n : ce n'est pas un majorant. Un majorant est un réel fixé, le même pour tous les termes. Ici, aucun réel ne convient : $u_{100} = 298$, $u_{1000} = 2998$, et les termes dépassent tout réel choisi à l'avance.

Rappel : la récurrence

Rappel du chapitre de logique. Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on raisonne par récurrence, en trois temps.

- **Initialisation** : on vérifie $P(n_0)$.
- **Hérédité** : on suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$, et on démontre $P(n+1)$.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Pour une suite définie par récurrence, c'est l'outil naturel : la relation relie justement u_{n+1} à u_n.

Méthode : démontrer une inégalité par récurrence

1. **Écris** la propriété $P(n)$, par exemple « $u_n \leq 4$ ».
2. **Initialise** : vérifie l'inégalité sur le premier terme.
3. **Hérédité** : suppose $P(n)$ vraie ; transforme l'inégalité pas à pas, en nommant chaque opération, jusqu'à faire apparaître u_{n+1}.
4. **Conclus** par la phrase : « d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ ».

Un exemple rédigé

Exemple : Exemple rédigé : un majorant par récurrence

Montrons que, pour tout entier $n \geq 0$, la suite fil rouge vérifie $u_n \leq 4$. On note $P(n)$ la propriété « $u_n \leq 4$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 \leq 4$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $u_n \leq 4$.

On multiplie par $\frac{1}{2} > 0$, l'inégalité garde son sens :

$$\frac{1}{2}\,u_n \leq 2.$$

On ajoute 2 aux deux membres :

$$\frac{1}{2}\,u_n + 2 \leq 4.$$

D'après la relation de récurrence, le premier membre est u_{n+1} : donc $u_{n+1} \leq 4$, et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$: la suite fil rouge est majorée par 4.

Vérifie : Une opération de l'hérédité

Dans l'hérédité, quelle opération fait passer de $u_n \leq 4$ à $\frac{1}{2}\,u_n \leq 2$?

A. On ajoute 2 aux deux membres.

Faux.

Cette opération vient ensuite, pour faire apparaître u_{n+1}.

B. On multiplie par $\frac{1}{2}$, réel strictement positif.

Juste.

Juste : multiplier par un réel strictement positif garde le sens.

C. On applique la relation de récurrence.

Faux.

La relation sert au dernier pas, pour reconnaître u_{n+1}.

D. On multiplie par $\frac{1}{2}$ et on change le sens.

Faux.

On change le sens seulement en multipliant par un réel strictement négatif.

Correction

On part de $u_n \leq 4$. On multiplie par $\frac{1}{2}$, réel strictement positif : l'inégalité garde son sens, $\frac{1}{2}\,u_n \leq 2$. On ajoute ensuite 2 : $\frac{1}{2}\,u_n + 2 \leq 4$. La relation de récurrence permet enfin de lire $u_{n+1} \leq 4$.

Un minorant, puis à toi

Exemple : un minorant sans récurrence

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 4n$. On reconnaît le début d'un carré : pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = (n-2)^2 - 4.$$

Un carré est positif, donc $u_n \geq -4$ pour tout entier $n \geq 0$.

La suite est minorée par -4, et ce minorant est atteint : $u_2 = -4$.

À toi : Un minorant par récurrence

Démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, la suite fil rouge vérifie $u_n \geq 1$. Que peux-tu en conclure, avec le majorant 4 ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $P(n)$: « $u_n \geq 1$ », puis vérifie $P(0)$.
Indice 2
Dans l'hérédité, multiplie $u_n \geq 1$ par $\frac{1}{2}$, puis ajoute 2.
Indice 3
Point délicat : tu n'obtiens pas exactement $u_{n+1} \geq 1$; compare le minorant obtenu avec le nombre 1.

Réponse
On note $P(n)$ la propriété « $u_n \geq 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 \geq 1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $u_n \geq 1$.

On multiplie par $\frac{1}{2} > 0$, l'inégalité garde son sens : $\frac{1}{2}\,u_n \geq \frac{1}{2}$. On ajoute 2 aux deux membres :

$$\frac{1}{2}\,u_n + 2 \geq \frac{5}{2}.$$

D'après la relation de récurrence, cela s'écrit $u_{n+1} \geq \frac{5}{2}$. Comme $\frac{5}{2} \geq 1$, on obtient $u_{n+1} \geq 1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $u_n \geq 1$ pour tout entier $n \geq 0$. Avec le majorant 4, la suite fil rouge est bornée : pour tout entier $n \geq 0$,

$$1 \leq u_n \leq 4.$$

Sens de variation d'une suite

Des termes qui montent

En clair. Dans la tirelire, chaque montant dépasse le précédent : $u_{n+1} - u_n = 15$, un nombre positif. Les termes de la suite fil rouge montent aussi, dans le tableau.

Une suite qui monte est **croissante** ; une suite qui descend est **décroissante**.

Comparer deux termes voisins, c'est étudier le signe de leur différence.

Devine : Monter ou descendre

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Comment évoluent ses termes ?

A. Ils diminuent à chaque rang.

Juste.

Juste : le dénominateur augmente, la fraction diminue.

B. Ils augmentent à chaque rang.

Faux.

Le dénominateur augmente : la fraction diminue.

C. Ils augmentent, puis diminuent.

Faux.

Calcule u_0, u_1, u_2 : $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$.

D. Ils restent tous égaux.

Faux.

$u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}$: ils diffèrent.

Correction

Les premiers termes sont $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$. Le dénominateur $n+1$ augmente avec n, donc la fraction diminue. La définition qui suit permet de le démontrer pour tous les rangs.

Croissante, décroissante

Définition : Sens de variation d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$; elle est **strictement croissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$; elle est **strictement décroissante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} < u_n$.
- (u_n) est **constante** si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Le sens de variation de (u_n) se lit donc sur le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple : le signe de la différence

Première suite. Soit $u_n = 3n - 2$, pour tout entier $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (3n+1) - (3n-2) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ce nombre est strictement positif : d'après la définition du sens de variation, la suite est strictement croissante.

Seconde suite. Soit $v_n = \dfrac{1}{n+1}$, pour tout entier $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{-1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Ce nombre est strictement négatif : la suite est strictement décroissante.

Attention : quelques termes ne suffisent pas

✗ « Pour $u_n = n^2 - 4n$: $u_0 = 0$, $u_1 = -3$, $u_2 = -4$. Les termes diminuent, donc la suite est décroissante. »

✓ Trois termes ne disent rien des suivants : $u_3 = -3$ et $u_4 = 0$ remontent. Un sens de variation se démontre pour **tout** entier n. En revanche, ces termes prouvent que la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

Passer par une fonction

En clair. Pour $u_n = n^2$, chaque terme est une valeur de la fonction $x \mapsto x^2$, prise en un entier. Cette fonction est croissante sur $[0, +\infty[$: ses valeurs aux entiers montent donc aussi.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux entiers consécutifs n et $n+1$ sont deux réels de l'intervalle, rangés dans l'ordre. La définition d'une fonction croissante s'applique à eux.

Propriété : Sens de variation d'une suite définie de façon explicite

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

De même, si f est strictement croissante (ou strictement décroissante) sur $[n_0, +\infty[$, alors (u_n) est strictement croissante (ou strictement décroissante).

Démonstration

Étape 1. Supposons f croissante sur $[n_0, +\infty[$. Soit n un entier tel que $n \geq n_0$. Les réels n et $n+1$ appartiennent à l'intervalle $[n_0, +\infty[$, et $n \leq n+1$.

Étape 2. Par définition d'une fonction croissante sur un intervalle, on en déduit $f(n) \leq f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$.

Étape 3. Cette inégalité est vraie pour tout entier $n \geq n_0$: par définition du sens de variation d'une suite, (u_n) est croissante. Si f est décroissante, la même démarche donne $f(n) \geq f(n+1)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$: (u_n) est décroissante. Pour les cas stricts, on part de $n < n+1$; la définition d'une fonction strictement croissante (ou strictement décroissante) donne $u_n < u_{n+1}$ (ou $u_n > u_{n+1}$).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve applique la définition d'une fonction croissante à deux réels bien choisis : n et $n+1$. Ils sont dans $[n_0, +\infty[$ et vérifient $n \leq n+1$. On obtient $f(n) \leq f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout entier $n \geq n_0$.

Vérifie : Le cœur de la preuve

Dans la preuve, pourquoi peut-on écrire $f(n) \leq f(n+1)$?

A. Parce que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Faux.
C'est ce qu'on veut démontrer : on ne peut pas s'en servir.

B. Parce que f n'est définie qu'aux entiers.
Faux.
f est définie sur tout l'intervalle $[n_0, +\infty[$.

C. Parce que l'entier n est positif.
Faux.
Le signe de n ne range pas $f(n)$ et $f(n+1)$.

D. Parce que $n \leq n+1$, sur un intervalle où f croît.
Juste.
Juste : c'est la définition d'une fonction croissante.

Correction
Les réels n et $n+1$ appartiennent à $[n_0, +\infty[$, et $n \leq n+1$. Comme f est croissante sur cet intervalle, la définition d'une fonction croissante donne $f(n) \leq f(n+1)$. Or $f(n) = u_n$ et $f(n+1) = u_{n+1}$.

La réciproque, puis à toi

Exemple : Contre-exemple : la réciproque est fausse

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = 4n^2 - 3n$. Pour tout entier $n \geq 0$, on développe et on réduit :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ & = 4(n+1)^2 - 4n^2 \\ & \quad - 3(n+1) + 3n \\ & = 8n + 1. \end{aligned}$$

Ce nombre est strictement positif : la suite est strictement croissante.

Pourtant, la fonction $x \mapsto 4x^2 - 3x$ n'est pas croissante sur $[0, +\infty[$: elle vaut 0 en 0, et $-\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$.

Une suite croissante ne vient donc pas toujours d'une fonction croissante. L'énoncé ne marche que dans un sens.

À toi : Deux façons pour une même suite

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = n^2$. Étudie son sens de variation de deux façons : par la différence $u_{n+1} - u_n$, puis par une fonction associée. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Développe $(n+1)^2 - n^2$.
Indice 2
Pour la seconde façon, cherche une fonction f telle que $u_n = f(n)$, et son sens de variation sur $[0, +\infty[$.
Indice 3
Point délicat : la fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$; seul compte l'intervalle $[0, +\infty[$.

Réponse
Par la différence. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ & = (n+1)^2 - n^2 \\ & = 2n + 1. \end{aligned}$$

Comme $2n + 1 > 0$, d'après la définition du sens de variation, la suite est strictement croissante.

Par une fonction. On a $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto x^2$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$. D'après le sens de variation d'une suite définie de façon explicite, (u_n) est strictement croissante.

Quotient et récurrence

Comparer un quotient à 1

En clair. Pour une suite faite de puissances, la différence $u_{n+1} - u_n$ se lit mal. Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est plus simple : si les termes sont strictement positifs, il suffit de le comparer à 1.

Pourquoi est-ce vrai ? On factorise la différence par u_n ; le signe d'un produit se lit sur ses facteurs.

Devine : Un quotient de puissances

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n = 3^n$. À quoi est égal le quotient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$?

A. 3^n

Faux.
En divisant 3^{n+1} par 3^n, les exposants se soustraient : il reste 3^1.

B. 3

Juste.
Juste : $3^{n+1} = 3 \times 3^n$.

C. $\dfrac{1}{3}$

Faux.
C'est l'inverse, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

D. $n+1$

Faux.
Le quotient de deux puissances n'est pas leur exposant.

Correction
Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3.$$

Ce quotient vaut $3 \geq 1$, et les termes sont strictement positifs : chaque terme est le triple du précédent, donc la suite monte.

Propriété : Sens de variation et quotient de deux termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite dont tous les termes sont **strictement positifs**.

- (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
- (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Démonstration

Étape 1. Soit n un entier tel que $n \geq n_0$. Comme $u_n \neq 0$, on peut écrire $u_{n+1} - u_n = u_n \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right)$.

Étape 2. Or $u_n > 0$ par hypothèse : ce produit a le signe de son second facteur. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, et $u_{n+1} - u_n \leq 0$ si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Étape 3. Ces équivalences sont vraies pour tout entier $n \geq n_0$. Par définition du sens de variation d'une suite, on obtient les deux équivalences de l'énoncé.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé est une factorisation, permise car $u_n \neq 0$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right).$$

Le facteur u_n est strictement positif. Le produit a donc le signe de la parenthèse : comparer le quotient à 1 revient à étudier la différence.

Vérifie : Le rôle de l'hypothèse

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « tous les termes sont strictement positifs » ?

A. À pouvoir calculer $u_{n+1} - u_n$.
Faux.
Une différence se calcule toujours.

B. À garantir que la suite est croissante.
Faux.
L'hypothèse ne dit rien du sens de variation.

C. À rendre le quotient égal à 1.
Faux.
Le quotient peut prendre bien d'autres valeurs.

D. À donner au produit le signe de sa parenthèse.
Juste.
Juste : un facteur $u_n > 0$ ne change pas le signe.

Correction
Dans $u_n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right)$, le facteur u_n est strictement positif. Le produit a donc le signe de la parenthèse. Si u_n était négatif, les signes s'inverseraient, et l'équivalence serait fausse.

Une hypothèse nécessaire

Exemple **: Contre-exemple : des termes négatifs**

Soit $(c_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $c_n = -3^n$. Ses premiers termes sont -1, -3, -9, -27.

- Le quotient vaut $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{-3^{n+1}}{-3^n} = 3$, et $3 \geq 1$.
- Pourtant $c_{n+1} - c_n = -3^{n+1} + 3^n = -2 \times 3^n$, strictement négatif : la suite est strictement décroissante.

Sans l'hypothèse « termes strictement positifs », comparer le quotient à 1 ne prouve rien.

Exemple : une suite de puissances

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$. Pour tout entier $n \geq 0$, $2^n > 0$ et $n+1 > 0$: ses termes sont strictement positifs.

Quotient. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2}.\end{aligned}$$

Comparaison à un. Comme $n+2 > 0$, on compare $2(n+1)$ à $n+2$: leur différence vaut $n \geq 0$. Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Conclusion. D'après le sens de variation et le quotient de deux termes consécutifs, la suite est croissante.

Le sens de variation par récurrence

Méthode : étudier un sens de variation

1. **Calcule** $u_{n+1} - u_n$ et étudie son signe, pour tout entier $n \geq n_0$.
2. **Compare** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si les termes sont strictement positifs et faits de produits ou de puissances.
3. **Associe** une fonction si $u_n = f(n)$: étudie son sens de variation sur $[n_0, +\infty[$.
4. **Raisonne** par récurrence si la suite est définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple : Exemple rédigé : la suite fil rouge est croissante

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$. On note $P(n)$ la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5}{2}$, donc $u_0 \leq u_1$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$: $u_n \leq u_{n+1}$.

On multiplie par $\dfrac{1}{2} > 0$, l'inégalité garde son sens :

$$\frac{1}{2}\,u_n \leq \frac{1}{2}\,u_{n+1}.$$

On ajoute 2 aux deux membres :

$$\frac{1}{2}\,u_n + 2 \leq \frac{1}{2}\,u_{n+1} + 2.$$

D'après la relation de récurrence aux rangs n et $n+1$, cela s'écrit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 0$: la suite fil rouge est croissante.

À toi : Une seconde preuve

Pour la suite fil rouge, exprime $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Utilise ensuite le majorant 4, démontré plus haut, pour retrouver le sens de variation. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Remplace u_{n+1} par $\frac{1}{2}\,u_n + 2$.
Indice 2
Regroupe les termes en u_n et mets un facteur commun, de façon à faire apparaître le nombre 4.
Indice 3
Point délicat : que dit l'inégalité $u_n \leq 4$ sur le signe de $4 - u_n$?

Réponse
Pour tout entier $n \geq 0$, on remplace u_{n+1} par son expression :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{2}\,u_n + 2 - u_n \\ &= 2 - \frac{1}{2}\,u_n \\ &= \frac{1}{2}(4 - u_n). \end{aligned}$$

D'après l'exemple rédigé sur le majorant, $u_n \leq 4$, donc $4 - u_n \geq 0$.

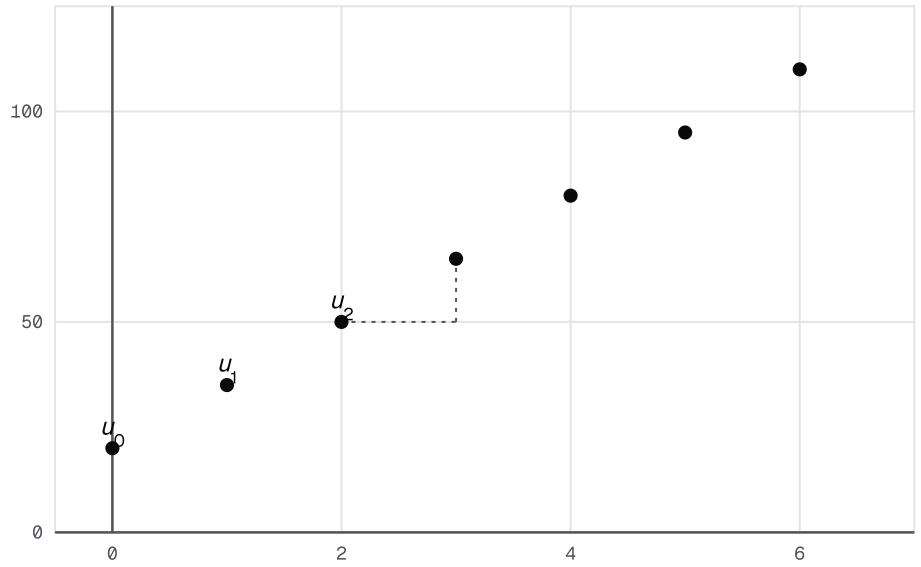
Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$: d'après la définition du sens de variation, la suite fil rouge est croissante.

Suites arithmétiques

Ajouter toujours le même nombre

En clair. Dans la tirelire, on passe d'un montant au suivant en ajoutant toujours 15 : $u_{n+1} = u_n + 15$.

Le nombre ajouté ne dépend pas de la semaine. Les suites qui avancent ainsi, d'un pas constant, forment une famille à part.



Le montant de la tirelire au fil des samedis : les points (n, u_n), avec u_n = 20 + 15n, sont alignés. D'un samedi au suivant, on avance d'une unité vers la droite et on monte toujours de 15 dirhams.

Devine : Un pas constant

Laquelle de ces suites ajoute toujours le même nombre, d'un terme au suivant ?

A. $u_n = n^2$

Faux.

Ses termes 0, 1, 4, 9 avancent de 1, puis 3, puis 5.

B. la suite fil rouge

Faux.

Elle avance de $\frac{3}{2}$, puis de $\frac{3}{4}$: le pas change.

C. $u_n = \frac{1}{n+1}$

Faux.

Elle recule de $\frac{1}{2}$, puis de $\frac{1}{6}$.

D. $u_n = 3n - 2$

Juste.

Juste : elle avance toujours de 3.

Correction

Pour $u_n = 3n - 2$, la différence $u_{n+1} - u_n$ vaut 3 à chaque rang. Pour les trois autres suites, deux pas consécutifs diffèrent déjà.

Définition : Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est la **raison** de la suite. Autrement dit, (u_n) est arithmétique lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ est la même pour tout entier $n \geq n_0$; cette différence est la raison.

Exemple : reconnaître une suite arithmétique

- La tirelire : $u_{n+1} = u_n + 15$ pour tout entier $n \geq 0$. D'après la définition, (u_n) est arithmétique de raison 15, de premier terme $u_0 = 20$.
- La suite définie par $v_n = 3n - 2$, pour $n \geq 1$: $v_{n+1} - v_n = 3$ ne dépend pas de n. Elle est arithmétique de raison 3, de premier terme $v_1 = 1$.

Le terme général

En clair. Partant de u_0, on ajoute r une fois pour obtenir u_1, deux fois pour u_2, et n fois pour u_n. On s'attend donc à $u_n = u_0 + n\,r$.

Pourquoi est-ce vrai ? Une récurrence le confirme : chaque pas ajoute un r de plus.

Propriété : Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r. Pour tous entiers naturels n et p supérieurs ou égaux à n_0,

$$u_n = u_p + (n - p)\,r.$$

En particulier, si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 + n\,r$ pour tout entier naturel n.

Démonstration

Étape 1. Fixons un entier $p \geq n_0$. On note $P(n)$ la propriété « $u_n = u_p + (n - p)\,r$ ». Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

Initialisation. Pour $n = p$: $u_p + (p - p)\,r = u_p$. $P(p)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq p$. Par définition d'une suite arithmétique, $u_{n+1} = u_n + r$; d'après $P(n)$, $u_{n+1} = u_p + (n - p)\,r + r = u_p + (n + 1 - p)\,r$. $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

Étape 2. Si $n < p$, l'étape 1, appliquée en échangeant les rôles de n et de p, donne $u_p = u_n + (p - n)\,r$, donc encore $u_n = u_p + (n - p)\,r$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La récurrence suit la définition pas à pas. Dans l'hérédité, $u_{n+1} = u_n + r$ ajoute un r : le coefficient $n - p$ devient $n + 1 - p$. L'initialisation tient en une ligne, car $(p - p)\, r = 0$.

Vérifie : Le pas de l'hérédité

Dans l'hérédité, quelle égalité fait passer du rang n au rang $n + 1$?

A. $u_{n+1} = u_n + r$
Juste.
Juste : c'est la définition d'une suite arithmétique.

B. $u_{n+1} = u_n + (n + 1)\, r$
Faux.
On ajoute r une seule fois par pas.

C. $u_{n+1} = u_p + n\, r$
Faux.
Au rang $n + 1$, le coefficient de r est $n + 1 - p$.

D. $u_{n+1} = r\, u_n$
Faux.
Cette relation multiplie au lieu d'ajouter.

Correction
Dans l'hérédité, on part de $u_n = u_p + (n - p)\, r$. La définition d'une suite arithmétique donne $u_{n+1} = u_n + r$. On remplace u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_p + (n - p)\, r + r \\ &= u_p + (n + 1 - p)\, r. \end{aligned}$$

Sens de variation, reconnaître, à toi

Exemple : terme général et sens de variation

- La tirelire : $u_n = u_0 + n\, r = 20 + 15n$. Après 52 samedis, $u_{52} = 20 + 780 = 800$ dirhams.
- Une suite arithmétique (w_n) de raison -4 vérifie $w_5 = 31$. D'après le terme général, $w_{12} = w_5 + (12 - 5) \times (-4) = 3$.
- Comme $u_{n+1} - u_n = r$, le sens de variation se lit sur la raison. Si $r > 0$, la suite est strictement croissante ; si $r < 0$, strictement décroissante ; si $r = 0$, constante. La tirelire croît ; (w_n) décroît.

Méthode : reconnaître une suite arithmétique

1. **Exprime** u_{n+1} en fonction de n, ou en fonction de u_n.

2. **Calcule** la différence $u_{n+1} - u_n$ et réduis-la.
3. **Conclus** si le résultat est un réel r qui ne dépend pas de n : la suite est arithmétique de raison r .
4. **Réfute** avec trois termes : pour $u_n = n^2$, $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 3$; la suite n'est pas arithmétique.

À toi : Un motif d'allumettes

Avec des allumettes, on forme une rangée de carrés accolés. Un carré demande 4 allumettes, deux carrés 7, trois carrés 10. On note a_n le nombre d'allumettes pour n carrés, avec $n \geq 1$. Exprime a_n en fonction de n, puis calcule a_{20}. Peut-on former une rangée complète avec exactement 100 allumettes ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Chaque carré ajouté partage un côté avec le précédent : combien d'allumettes demande-t-il ?
Indice 2
Écris a_{n+1} en fonction de a_n : de quelle famille de suites s'agit-il, et quel est son premier terme a_1 ?
Indice 3
Point délicat : le premier indice est 1 ; écris $a_n = a_1 + (n-1) \times 3$, et non $a_1 + 3n$.

Réponse
Relation. Chaque carré ajouté partage un côté avec le précédent : il demande 3 allumettes. Donc $a_{n+1} = a_n + 3$: la suite (a_n) est arithmétique de raison 3, de premier terme $a_1 = 4$.

Terme général. D'après le terme général d'une suite arithmétique, on a donc, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1) \times 3 \\ &= 3n + 1. \end{aligned}$$

Ainsi $a_{20} = 61$.

Cent allumettes. L'équation $3n + 1 = 100$ donne $n = 33$, un entier : 33 carrés utilisent exactement 100 allumettes.

Somme de termes d'une suite arithmétique

Une pile de gobelets

En clair. Une pile de gobelets a 1 gobelet en haut, 2 dans la rangée suivante, et ainsi de suite jusqu'à 10 à la base. On veut compter $S = 1 + 2 + \cdots + 10$.

Écris la somme à l'endroit, puis à l'envers, l'une sous l'autre. Chaque colonne donne 11 : $1 + 10$, $2 + 9$, et ainsi de suite. Avec 10 colonnes, $2S = 110$ et $S = 55$.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans une suite arithmétique, deux termes à égale distance des extrémités ont la même somme.

Devine : Une pile plus haute

Une pile plus haute compte 20 rangées : 1 gobelet en haut, 20 à la base. Combien de gobelets en tout ?

A. 210

Juste.
Juste : $20 \times \dfrac{1+20}{2} = 210$.

B. 400

Faux.
C'est 20×20 : chaque rangée n'a pas 20 gobelets.

C. 420

Faux.
C'est $2S$: il faut encore diviser par 2.

D. 200

Faux.
C'est $\dfrac{20 \times 20}{2}$: chaque colonne vaut 21, et non 20.

Correction
À l'endroit et à l'envers, chaque colonne vaut $1 + 20 = 21$. Il y a 20 colonnes :

$$2S = 20 \times 21 = 420.$$

Donc $S = 210$ gobelets.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$. La somme des termes consécutifs de u_p à u_n, qui compte $n - p + 1$ termes, vaut

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

Étape 1. Notons r la raison et S la somme. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n - p$. D'après le terme général d'une suite arithmétique, $u_{p+k} = u_p + k\,r$ et $u_{n-k} = u_n - k\,r$. Donc $u_{p+k} + u_{n-k} = u_p + u_n$.

Étape 2. On écrit S dans l'ordre croissant des indices, puis dans l'ordre décroissant, et on additionne les deux écritures terme à terme :

$$2S = (u_p + u_n) + (u_{p+1} + u_{n-1}) + \cdots + (u_n + u_p).$$

Étape 3. D'après l'étape 1, chacune des $n - p + 1$ parenthèses vaut $u_p + u_n$. Donc $2S = (n - p + 1)(u_p + u_n)$, d'où la formule.

Étape 4. Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ la suite définie par $a_k = k$. Pour tout entier $k \geq 1$, $a_{k+1} - a_k = 1$: elle est arithmétique de raison 1. Avec $p = 1$, on obtient $1 + 2 + \cdots + n = n \times \dfrac{1 + n}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve repose sur un **appariement** : on écrit la somme à l'endroit, puis à l'envers. D'après le terme général, $u_{p+k} + u_{n-k} = u_p + u_n$: toutes les colonnes ont la même somme. On compte $n - p + 1$ colonnes, puis on divise par 2.

Vérifie : Une somme à l'envers

Dans la preuve, pourquoi écrit-on la somme à l'envers ?

A. Pour changer la valeur de la somme.

Faux.

Retourner l'ordre des termes ne change pas la somme.

B. Pour former des paires qui ont toutes la même somme.

Juste.

Juste : chaque paire vaut $u_p + u_n$.

C. Pour compter plus vite le nombre de termes.

Faux.

Le nombre de termes, $n - p + 1$, ne demande pas cette astuce.

D. Parce que la suite est décroissante.

Faux.

La formule vaut pour toute suite arithmétique, croissante ou non.

Correction

À l'envers, le premier terme se place sous le dernier, le deuxième sous l'avant-dernier. Chaque paire vaut $u_p + u_n$, d'après le terme général d'une suite arithmétique. En additionnant les deux écritures, on obtient $2S = (n - p + 1)(u_p + u_n)$.

Calculer une somme, puis à toi

Exemple : une pile de nombres impairs

Une autre pile a 15 gobelets à la base ; chaque rangée en a 2 de moins que celle du dessous, jusqu'à 1 en haut. Du haut vers le bas, les rangées comptent 1, 3, 5, …, 15.

C'est la suite arithmétique $u_k = 2k - 1$, de raison 2, de $u_1 = 1$ à $u_8 = 15$: elle compte $8 - 1 + 1 = 8$ termes. Donc, d'après la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + 15 &= 8 \times \frac{1 + 15}{2} \\ &= 64. \end{aligned}$$

Attention : compter les termes

✗ « De u_5 à u_{20}, il y a $20 - 5 = 15$ termes. »

✓ De u_p à u_n, il y a $n - p + 1$ termes : on compte aussi le premier. Ici, $20 - 5 + 1 = 16$ termes. Contrôle sur un petit cas : de u_1 à u_3, il y a bien 3 termes, et non 2.

Méthode : calculer une somme de termes consécutifs

1. **Reconnais** la suite et sa raison.
2. **Compte** les termes : de u_p à u_n, il y en a $n - p + 1$.
3. **Calcule** le premier et le dernier terme, avec le terme général.
4. **Applique** la formule : $S = (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.

À toi : Deux sommes d'une même suite

Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $v_n = 3n - 2$. Calcule $v_1 + v_2 + \cdots + v_{20}$, puis $v_{11} + v_{12} + \cdots + v_{20}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La suite est arithmétique de raison 3 : calcule v_{20} et v_{11}.
Indice 2
Applique la formule : le nombre de termes, fois la moyenne du premier et du dernier.
Indice 3
Point délicat : de v_{11} à v_{20}, compte les termes avec $n - p + 1$.

Réponse
Pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = 3$: la suite est arithmétique de raison 3. On a $v_1 = 1$, $v_{11} = 31$ et $v_{20} = 58$.

La première somme compte 20 termes, la seconde $20 - 11 + 1 = 10$ termes.

Donc, d'après la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$
\begin{aligned}
&v_1 + \cdots + v_{20} \\
&= 20 \times \frac{1 + 58}{2} \\
&= 590,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_{11} + \cdots + v_{20} \\
&= 10 \times \frac{31 + 58}{2} \\
&= 445.
\end{aligned}
$$

Suites géométriques

Multiplier toujours par le même nombre

En clair. À 8 h, une culture contient 500 bactéries. Leur nombre double toutes les heures.

On note b_n le nombre de bactéries n heures après 8 h : $b_0 = 500$, $b_1 = 1000$, $b_2 = 2000$.

On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre : $b_{n+1} = 2\,b_n$.

Devine : Quatre doublements

Combien la culture contient-elle de bactéries à 12 h, quatre heures après 8 h ?

A. 4000

Faux.

C'est b_3 : à 12 h, le nombre a doublé quatre fois.

B. 2500

Faux.

Tu as ajouté 500 par heure ; or le nombre double.

C. 8000

Juste.

Juste : $500 \times 2^4 = 8000$.

D. $16\,000$

Faux.

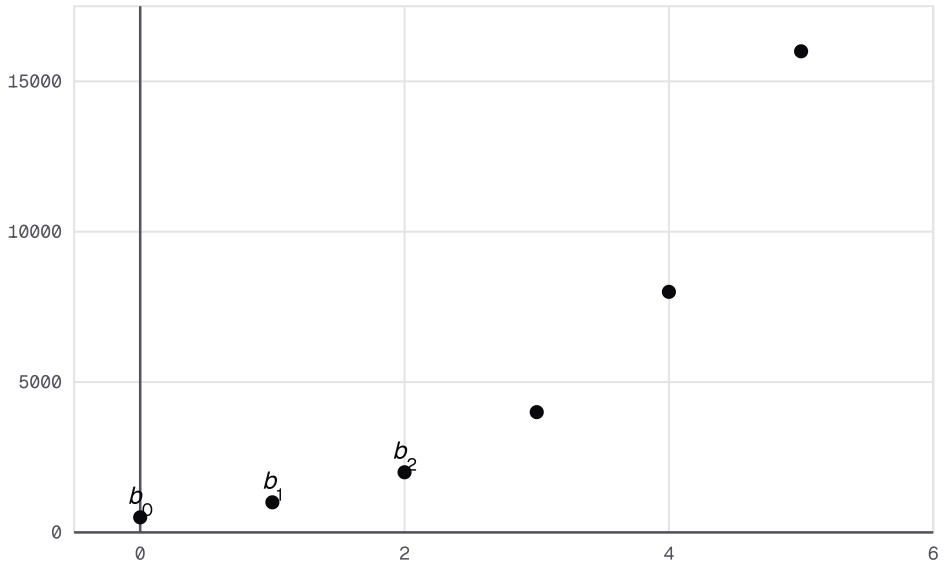
C'est b_5 : un doublement de trop.

Correction

Quatre heures, quatre doublements :

$$
\begin{aligned}
b_4 &= 500 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\
&= 500 \times 16 \\
&= 8000.
\end{aligned}
$$

À 12 h, la culture contient 8000 bactéries.



● Termes de la suite (b_n)

Le nombre de bactéries heure par heure, de 8 h à 13 h : les points (n, b_n), avec b_0 = 500 et b_(n+1) = 2 b_n, ne sont pas alignés. Chaque hauteur est le double de la précédente, si bien que les écarts grandissent de plus en plus vite.

Définition : Suites géométriques

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$u_{n+1} = q\,u_n.$$

Le réel q est la **raison** de la suite. Lorsqu'aucun terme n'est nul, (u_n) est géométrique si et seulement si le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est le même pour tout entier $n \geq n_0$; ce quotient est la raison.

Exemple : géométrique ou non

- Les bactéries : $b_{n+1} = 2\,b_n$ pour tout entier $n \geq 0$. D'après la définition, (b_n) est géométrique de raison 2, de premier terme $b_0 = 500$.
- La suite fil rouge n'est pas géométrique. Trois termes suffisent : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{13}{10}$, deux quotients différents.

Le terme général

En clair. Partant de b_0, on multiplie par 2 une fois pour obtenir b_1, deux fois pour b_2, et n fois pour b_n. On s'attend à $b_n = 500 \times 2^n$.

Pourquoi est-ce vrai ? La récurrence est celle des suites arithmétiques, avec un produit à la place d'une somme.

Propriété : Terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q. Pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geq p \geq n_0$,

$$u_n = u_p \times q^{n-p},$$

avec la convention $q^0 = 1$. En particulier, si le premier terme est u_0, alors $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout entier naturel n.

Démonstration

Fixons un entier $p \geq n_0$. On note $P(n)$ la propriété « $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ». Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

Initialisation. Pour $n = p$: $u_p \times q^0 = u_p$, avec la convention $q^0 = 1$. $P(p)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq p$. Par définition d'une suite géométrique, $u_{n+1} = q\,u_n$; d'après $P(n)$, $u_{n+1} = q \times u_p \times q^{n-p} = u_p \times q^{n+1-p}$. $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq p$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque pas de l'hérédité multiplie par q : $q \times q^{n-p} = q^{n+1-p}$, d'après les règles sur les puissances. L'exposant augmente de 1 à chaque rang. L'initialisation repose sur la convention $q^0 = 1$.

Vérifie : L'initialisation

Dans l'initialisation, pourquoi a-t-on $u_p \times q^0 = u_p$?

A. Parce que la raison q vaut 1.

Faux.

La raison q est quelconque.

B. Parce que l'indice p vaut 0.

Faux.

L'indice p est quelconque.

C. Parce que le terme u_p est nul.

Faux.

Le terme u_p est quelconque.

D. Par la convention $q^0 = 1$.

Juste.

Juste : elle vaut même pour $q = 0$.

Correction

Au rang p, l'exposant vaut $p - p = 0$. Avec la convention $q^0 = 1$, on obtient $u_p \times q^0 = u_p \times 1 = u_p$: l'égalité est vraie au rang p.

Sens de variation, un piège, à toi

Exemple : terme général et sens de variation

- Les bactéries : $b_n = b_0 \times q^n = 500 \times 2^n$. À 18 h, dix heures après 8 h : $b_{10} = 500 \times 1024 = 512\,000$.
- Pour tout entier $n \geq 0$, $2^n > 0$, donc $b_n = 500 \times 2^n > 0$; et $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 2 \geq 1$. D'après le sens de variation et le quotient de deux termes consécutifs, (b_n) est croissante.
- De même, une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $q > 0$ a, d'après le terme général, tous ses termes strictement positifs. Elle est croissante si $q \geq 1$, décroissante si $0 < q \leq 1$; elle est constante si $q = 1$.

Attention : l'exposant dépend du premier indice

✗ « On compte les heures à partir de la première : $c_1 = 1000$. Donc $c_n = 1000 \times 2^n$. »

✓ Si le premier terme est c_1, le terme général s'écrit $c_n = c_1 \times q^{n-1}$. Ici, $c_n = 1000 \times 2^{n-1}$.

Contrôle avec $n = 1$: $1000 \times 2^0 = 1000$. La formule fautive donnerait 2000.

À toi : Une suite qui se divise par deux

Une suite géométrique $(w_n)_{n \geq 1}$ a pour premier terme $w_1 = 48$ et pour raison $\dfrac{1}{2}$. Exprime w_n en fonction de n, calcule w_5, puis étudie son sens de variation. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique le terme général d'une suite géométrique à partir de w_1.
Indice 2
Les termes sont strictement positifs : compare $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ à 1.
Indice 3
Point délicat : le premier indice est 1 ; l'exposant est $n - 1$.

Réponse
Terme général. Le premier indice est 1. D'après le terme général d'une suite géométrique, on a donc, pour tout entier $n \geq 1$:

$$w_n = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Donc $w_5 = 48 \times \dfrac{1}{16} = 3$.

Sens de variation. Comme $48 > 0$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$, les termes sont strictement positifs, et $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{1}{2} \leq 1$. D'après le sens de variation et le quotient de deux termes consécutifs, (w_n) est décroissante.

Somme de termes d'une suite géométrique

Une somme qui se replie

En clair. Soit $S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^9$. Multiplie par 2 :

$$2S = 2 + 4 + \cdots + 2^{10}.$$

Les deux sommes ont presque tous leurs termes en commun. En soustrayant, il ne reste que les extrémités : $2S - S = 2^{10} - 1$, donc $S = 1023$.

Pourquoi est-ce vrai ? Multiplier par la raison décale chaque terme d'un rang ; la soustraction efface les termes communs.

Devine : Une somme de puissances de 3

Combien vaut $1 + 3 + 9 + 27 + 81$?

A. 242

Faux.

C'est $3S - S = 2S$: il faut encore diviser par 2.

B. 121

Juste.

Juste : $\dfrac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121$.

C. 243

Faux.

C'est 3^5, le terme qui suivrait 81.

D. 120

Faux.

Il manque le premier terme, 1.

Correction

Soit $S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$. Alors

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243.$$

En soustrayant, $3S - S = 243 - 1$, soit $2S = 242$ et $S = 121$.

Contrôle direct : $1+3+9+27+81=121$.

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit q un réel tel que $q \neq 1$. Pour tout entier naturel n,

$$1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Plus généralement, si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et si $n_0 \leq p \leq n$, alors

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=u_p\times\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Si $q=1$, la suite est constante et cette somme vaut $(n-p+1)\,u_p$.

Démonstration

Étape 1. Notons $S=1+q+q^2+\cdots+q^n$. En multipliant par q, on obtient $qS=q+q^2+\cdots+q^{n+1}$.

Étape 2. Chaque puissance q^k, pour $1\leq k\leq n$, figure dans S et dans qS. En soustrayant, il reste $S-qS=1-q^{n+1}$, c'est-à-dire $(1-q)\,S=1-q^{n+1}$. Comme $q\neq 1$, le réel $1-q$ n'est pas nul ; on divise par $1-q$: $S=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Étape 3. D'après le terme général d'une suite géométrique, $u_{p+k}=u_p\times q^k$ pour tout entier k tel que $0\leq k\leq n-p$. Donc $u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=u_p\,(1+q+\cdots+q^{n-p})$, et l'étape 2, appliquée à l'entier $n-p$, donne la formule.

Étape 4. Si $q=1$, le terme général d'une suite géométrique donne $u_{p+k}=u_p\times 1^k=u_p$ pour tout entier k tel que $0\leq k\leq n-p$: les $n-p+1$ termes sont tous égaux à u_p, et la somme vaut $(n-p+1)\,u_p$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé est la soustraction $S-qS$. Les termes communs disparaissent ; il reste $1-q^{n+1}$. On obtient $(1-q)\,S=1-q^{n+1}$, puis on divise par $1-q$, qui n'est pas nul car $q\neq 1$.

Vérifie : Une condition sur la raison

Pourquoi l'énoncé exige-t-il $q\neq 1$?

A. Pour pouvoir diviser par $1-q$.

Juste.

Juste : $1-q=0$ lorsque $q=1$.

B. Pour que $S-qS$ soit nul.

Faux.
$S - qS$ vaut $1 - q^{n+1}$, qui n'est pas nul en général.

C. Pour que les termes soient positifs.

Faux.
L'énoncé n'exige rien sur le signe des termes.

D. Parce que 1^{n+1} n'existe pas.

Faux.
$1^{n+1} = 1$ existe bien.

Correction
La preuve aboutit à $(1-q)\,S = 1 - q^{n+1}$. Pour isoler S, on divise par $1 - q$. Si $q = 1$, ce nombre est nul et la division est impossible : ce cas se traite à part.

Calculer, un cas à part

Exemple : deux sommes géométriques

Raison deux. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. De u_0 à u_5, il y a 6 termes, et la raison 2 est différente de 1. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} &u_0 + u_1 + \cdots + u_5 \\ &= 3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} \\ &= 3 \times 63 = 189. \end{aligned}$$

Raison un demi. Avec six termes et la raison $\dfrac{1}{2}$, différente de 1 :

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1 - \frac{1}{64}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{32}. \end{aligned}$$

Exemple : Contre-exemple : le cas q = 1

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 1 : tous ses termes valent 5.

La formule donnerait $5 \times \dfrac{1 - 1^6}{1 - 1}$, un quotient par 0, sans aucun sens.

On compte directement : $u_0 + u_1 + \cdots + u_5 = 6 \times 5 = 30$.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une somme de triples

Calcule $S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 486$, sachant que chaque terme est le triple du précédent. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris chaque terme sous la forme 2×3^k : que vaut k pour 486 ?
Indice 2
Applique la formule avec le premier terme 2 et la raison 3.
Indice 3
Point délicat : compte les termes en comprenant le premier, quand k part de 0.

Réponse
Les termes sont 2×3^k, pour k allant de 0 à 5, car $486 = 2 \times 243 = 2 \times 3^5$. C'est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3, différente de 1, avec 6 termes.

D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} \\ &= 2 \times \frac{-728}{-2} \\ &= 728. \end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : terme général, puis somme

En devoir, une question sur une suite géométrique se traite en deux temps : le terme général, puis la somme. Nomme l'énoncé employé à chaque étape.

Avec la suite (w_n) de la section précédente, écris par exemple : « (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_1 = 48$. D'après le terme général d'une suite géométrique, $w_n = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. La somme $w_1 + \cdots + w_5$ compte 5 termes et la raison $\frac{1}{2}$ est différente de 1 : d'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, elle vaut 93. »

Le calcul de cette somme :

$$48 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = 93.$$

Une suite auxiliaire pour une relation affine

Se ramener à une suite connue

En clair. La suite fil rouge n'est ni arithmétique, ni géométrique. Regarde pourtant son écart à 4 : $4 - u_0 = 3, 4 - u_1 = \frac{3}{2}, 4 - u_2 = \frac{3}{4}, 4 - u_3 = \frac{3}{8}$.

Cet écart est divisé par 2 à chaque rang : il forme une suite géométrique. L'idée est de passer par cette suite connue.

Devine : L'écart suivant

D'après ces écarts, que vaut $4 - u_5$?

A. $\dfrac{3}{16}$
Faux.
C'est $4 - u_4$: un rang de moins.

B. $\dfrac{1}{32}$
Faux.
Il manque le facteur 3 de l'écart de départ.

C. $\dfrac{3}{32}$
Juste.
Juste : l'écart est divisé par 2 à chaque rang.

D. $\dfrac{3}{10}$
Faux.
L'écart est divisé par 2 à chaque rang, pas par le rang.

Correction

L'écart est divisé par 2 à chaque rang : $\dfrac{3}{8}$, puis $\dfrac{3}{16}$, puis $\dfrac{3}{32}$.

Contrôle avec $u_5 = \dfrac{125}{32}$:

$$4 - \frac{125}{32} = \frac{128 - 125}{32} = \frac{3}{32}.$$

Méthode : utiliser une suite auxiliaire

Pour une suite définie par $u_{n+1} = a\,u_n + b$, avec $a \neq 1$:

1. **Cherche** le réel α tel que $\alpha = a\,\alpha + b$.
2. **Pose** $v_n = u_n - \alpha$ et montre que $v_{n+1} = a\,v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison a.
3. **Exprime** v_n en fonction de n, puis $u_n = v_n + \alpha$.
4. **Réinvestis** cette expression : sens de variation, somme de termes.

Un exemple guidé

Exemple : Exemple guidé : la suite auxiliaire

Pour la suite fil rouge, $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 2$.

Le réel α. Il vérifie $\alpha = \dfrac{1}{2}\,\alpha + 2$, donc $\dfrac{1}{2}\,\alpha = 2$ et $\alpha = 4$.

La suite (v_n). On pose $v_n = u_n - 4$ pour tout entier $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= \frac{1}{2}\,u_n + 2 - 4 \\ &= \frac{1}{2}\,u_n - 2 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 4) \\ &= \frac{1}{2}\,v_n. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition, (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -3$.

Exemple : Exemple guidé : terme général et sens de variation

Terme général. D'après le terme général d'une suite géométrique, on obtient $v_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier $n \geq 0$. Donc

$$u_n = 4 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Contrôle : $u_2 = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$, comme dans le tableau.

Sens de variation. Pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} &u_{n+1} - u_n \\ &= -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &\quad + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

car $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Ce nombre est strictement positif. D'après la définition du sens de variation, la suite est strictement croissante : on retrouve le résultat de la récurrence, en plus précis.

Exemple : Exemple guidé : une somme

Pour tout entier $n \geq 0$, soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Comme $u_k = v_k + 4$ pour tout entier $k \geq 0$, on calcule deux sommes.

Somme des termes de (v_n). La raison $\frac{1}{2}$ est différente de 1. D'après la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} & v_0 + \cdots + v_n \\ &= -3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= -6 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= -6 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Termes constants. Les $n+1$ termes égaux à 4 donnent $4(n+1)$.

Total. On additionne les deux résultats :

$$S_n = 4n - 2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Contrôle : $S_1 = 1 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{7}{2}$, et $4 - 2 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Vérifie : Le choix du réel

Pourquoi choisit-on $\alpha = 4$ pour la suite fil rouge ?

A. Parce que $u_0 + 3 = 4$.

Faux.

Le premier terme ne sert pas à trouver α.

B. Parce que 4 est un majorant de la suite.

Faux.

Ce fait est vrai, mais ce n'est pas lui qui fait marcher la méthode.

C. Parce que $4 = \dfrac{1}{2} \times 4 + 2$.

Juste.

Juste : la constante 2 disparaît alors de v_{n+1}.

D. Parce que $\dfrac{1}{2} \times 8 = 4$.

Faux.

Ce calcul n'a aucun lien avec la relation.

Correction

Avec $\alpha = 4$, on a $4 = \dfrac{1}{2} \times 4 + 2$. On retranche cette égalité à $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,u_n + 2$: le 2 disparaît, et

$$u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(u_n - 4).$$

C'est ce qui rend (v_n) géométrique. Avec un autre réel, il resterait une constante.

Coin devoir, puis à toi

Remarque : Coin devoir : un exercice guidé

En devoir, l'énoncé fournit la suite auxiliaire : « On pose $v_n = u_n - 4$. Montrer que (v_n) est géométrique. »

Pars de v_{n+1} : écris $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$, remplace u_{n+1} par la relation, puis factorise. Conclus en nommant la raison et le premier terme.

Les questions suivantes s'enchaînent : v_n, puis u_n, puis le sens de variation ou une somme. Chaque réponse sert à la suivante.

À toi : Une autre suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 3\,u_n - 4$. Trouve le réel α, montre que la suite $(u_n - \alpha)$ est géométrique, puis exprime u_n en fonction de n. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Résous l'équation $\alpha = 3\,\alpha - 4$.
Indice 2
Pose $v_n = u_n - \alpha$ avec la valeur trouvée, calcule v_{n+1} et factorise par 3.
Indice 3
Point délicat : le premier terme de (v_n) est $u_0 - \alpha$, et non u_0.

Réponse
Le réel α. L'équation $\alpha = 3\,\alpha - 4$ donne $\alpha = 2$.

Suite géométrique. On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout entier $n \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= 3\,u_n - 4 - 2 \\ &= 3(u_n - 2) \\ &= 3\,v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3, de premier terme $v_0 = 1$.

Terme général. D'après le terme général d'une suite géométrique, $v_n = 3^n$, donc $u_n = 3^n + 2$ pour tout entier $n \geq 0$.

Contrôle : $u_1 = 3 \times 3 - 4 = 5$ et $3^1 + 2 = 5$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Calculer un terme** : remplace n dans la formule, ou avance pas à pas depuis le premier terme.

- **Majorant, minorant** : encadre directement une formule ; pour une suite récurrente, rédige une récurrence en trois temps.
- **Sens de variation** : signe de $u_{n+1} - u_n$; quotient comparé à 1 si les termes sont strictement positifs ; fonction associée ; ou récurrence.
- **Nature** : $u_{n+1} - u_n$ constant pour une suite arithmétique ; $u_{n+1} = q\,u_n$ pour une suite géométrique ; trois termes pour réfuter.
- **Somme** : compte les termes, puis applique la formule de la famille.
- **Relation** $u_{n+1} = a\,u_n + b$: passe par la suite auxiliaire $v_n = u_n - \alpha$.

Le mot du prof. Une suite se travaille toujours de la même façon. Calcule quelques termes pour te faire une idée, puis démontre pour tous les rangs. Les termes guident, la preuve conclut.

Soigne tes récurrences : trois temps titrés, une opération nommée à chaque ligne.

En 2BAC SE, l'étude des suites se poursuit, avec ces mêmes outils.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Suites numériques » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)