BURHAN

Résumé : La rotation dans le plan

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/rotation-dans-le-plan/resume

Chapitre	Semestre
La rotation dans le plan	Semestre 2

Définir une rotation

> **À retenir : Tourner autour d'un point**
>
> Plante la pointe d'un compas en Ω et pose la mine sur M. Fais pivoter le compas d'un angle θ : la mine arrive en M', l'image de M.
>
> L'écartement ne change pas, donc $\Omega M' = \Omega M$.
>
> Une mesure principale positive fait tourner dans le sens direct, celui du cercle trigonométrique.

Définition : Rotation de centre et d'angle donnés

Le plan est orienté. Soit Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est la transformation R du plan qui associe à tout point M le point $M' = R(M)$ défini ainsi :

- si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$;
- si $M \neq \Omega$, alors $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Le point M' s'appelle l'**image** de M par la rotation R. L'**image d'une figure** $\mathcal{F}$ est l'ensemble des images des points de $\mathcal{F}$.

Méthode : construire l'image d'un point

1. **Trace** le cercle de centre Ω qui passe par M.
2. **Reporte** l'angle à partir de la demi-droite $[\Omega M)$, avec la mesure principale α de θ : dans le sens direct si $\alpha > 0$, dans l'autre sens si $\alpha < 0$.
3. **Marque** M' là où le second côté de l'angle coupe le cercle.
4. **Vérifie** les deux conditions de la définition : la distance au centre, puis l'angle orienté.

Méthode : prouver qu'un point est l'image d'un autre

1. **Compare** ΩA et ΩB : ces deux longueurs doivent être égales.
2. **Détermine** une mesure de $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$, en allant du point A vers son image B.

3. **Conclus** si cette mesure vaut θ à 2π près : « d'après la définition d'une rotation, $B = R(A)$ ».

Exemple

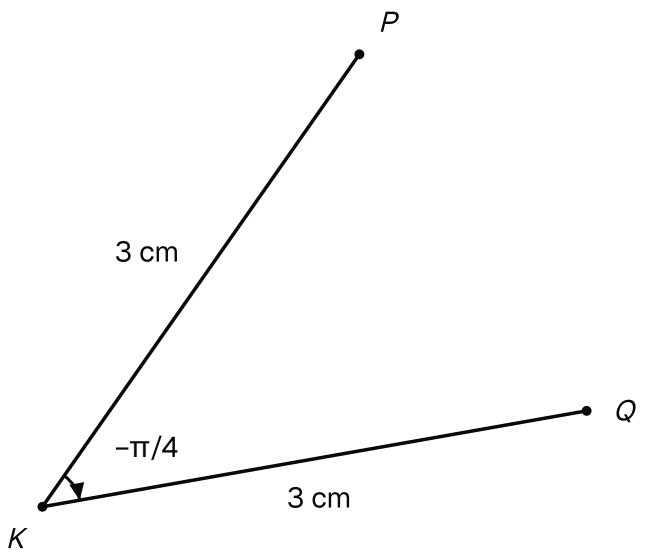
Énoncé. K, P et Q sont trois points tels que $KP = KQ = 3$ cm et $(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KQ}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Par quelle rotation Q est-il l'image de P ?

Distance. $KQ = KP$: le point Q est sur le cercle de centre K passant par P.

Angle. De P vers Q, l'angle orienté mesure $-\frac{\pi}{4}$:

$$(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KQ}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Conclusion. D'après la définition d'une rotation, Q est l'image de P par la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. On tourne dans le sens indirect.



KP = KQ = 3 cm, et l'arc fléché tourne de [KP) vers [KQ) dans le sens des aiguilles d'une montre : l'angle orienté de P vers Q vaut -π/4.

Attention : Du point vers son image

Dans l'exemple ci-dessus, écrire $(\overrightarrow{KQ}, \overrightarrow{KP}) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ est faux : cet angle mesure $\frac{\pi}{4}$.

Le premier vecteur va du centre au point de départ. Le second va du centre à l'image.

Attention : La distance seule ne suffit pas

Sur le cercle de centre K et de rayon 3 cm, une infinité de points N vérifient $KN = KP$. Un seul d'entre eux est l'image de P par la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Pour conclure, il te faut donc aussi l'angle orienté.

Cas particuliers et rotation réciproque

Propriété : Rotations d'angle nul et d'angle π

Soit Ω un point du plan.

- La rotation de centre Ω et d'angle 0 laisse chaque point à sa place : pour tout point M, $R(M) = M$.
- La rotation de centre Ω et d'angle π est la **symétrie centrale** de centre Ω : pour tout point M, $R(M)$ est le point M' tel que Ω soit le milieu du segment $[MM']$.

Propriété : Point invariant d'une rotation

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ, avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Alors Ω est le **seul** point M du plan tel que $R(M) = M$.

Propriété : Rotation réciproque

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ, et R' la rotation de centre Ω et d'angle $-\theta$. Pour tous points M et M' du plan :

$$M' = R(M) \Leftrightarrow M = R'(M').$$

Ainsi, tout point M' du plan est l'image par R d'un **unique** point, le point $R'(M')$. La rotation R' s'appelle la **rotation réciproque** de R.

Exemple

Énoncé. Reconnais les rotations de centre K d'angles 6π, -3π et $\frac{2\pi}{5}$.

Angle 6π. On a $6\pi = 3 \times 2\pi$, donc $6\pi \equiv 0\ [2\pi]$: chaque point reste à sa place.

Angle -3π. On a $-3\pi = \pi - 4\pi$, donc $-3\pi \equiv \pi\ [2\pi]$: c'est la symétrie centrale de centre K.

Angle $\frac{2\pi}{5}$. Cette mesure n'est pas un multiple de 2π : K est le seul point invariant.

Méthode : revenir au point de départ

1. **Identifie** le centre Ω et l'angle θ de la rotation R.
2. **Change** le signe de l'angle : la rotation réciproque a le même centre et l'angle $-\theta$.

3. **Applique**-la à l'image M' : tu retrouves l'unique point M tel que $R(M) = M'$.

Exemple

Énoncé. Reprends K, P et Q de la première section. Par quelle rotation de centre K le point P est-il l'image de Q ?

Réponse. La rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ envoie P sur Q. D'après la rotation réciproque, P est l'image de Q par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Contrôle. $KP = KQ$ et, par l'angle opposé :

$$(\overrightarrow{KQ}, \overrightarrow{KP}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

À retenir : Trouver le centre grâce au point invariant

Une rotation d'angle non nul à 2π près ne laisse qu'un point à sa place : son centre. Si elle laisse un point A invariant, alors A est son centre.

Pour une rotation d'angle nul, tous les points sont invariants : cette propriété ne s'applique pas.

Distances et angles conservés

Propriété : Conservation des distances

Soit R une rotation, A et B deux points du plan, $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. Alors

$$A'B' = AB.$$

On dit que la rotation **conserve les distances**.

Propriété : Angle d'un vecteur et de son image

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ, A et B deux points distincts, $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. Alors $A' \neq B'$ et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

En particulier, si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, les droites (AB) et $(A'B')$ sont **perpendiculaires**.

Propriété : Conservation des angles orientés

Soit R une rotation, A, B, C, D quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, et A', B', C', D' leurs images par R. Alors

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})\\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \ [2\pi].\end{aligned}$$

En particulier, lorsque B et C sont distincts de A :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})\\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ [2\pi].\end{aligned}$$

La rotation **conserve les angles orientés**.

Exemple

Énoncé. R est la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, P un point tel que $KP = 4$ cm, et $P' = R(P)$. Calcule PP'.

Le triangle. Par définition, $KP' = KP = 4$ cm et $(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KP'}) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$. Le triangle KPP' est donc rectangle et isocèle en K.

Pythagore. Dans ce triangle :

$$\begin{aligned}PP'^2 &= KP^2 + KP'^2\\ &= 4^2 + 4^2 = 32.\end{aligned}$$

Conclusion. $PP' = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm.

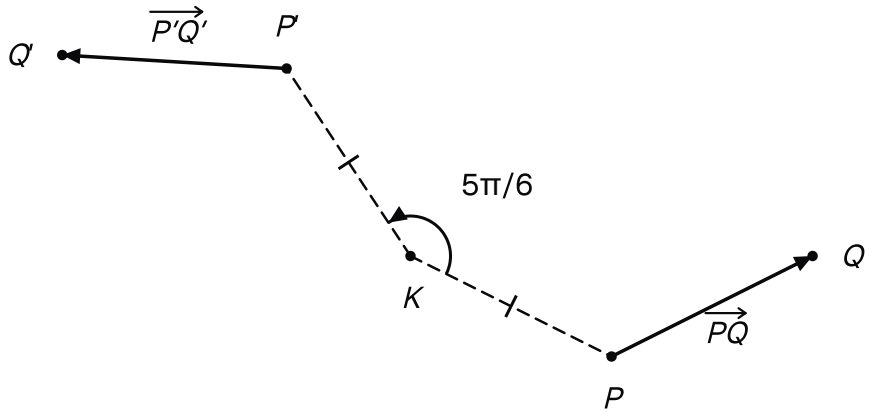
Exemple

Énoncé. R est la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$. Les points P et Q sont distincts, d'images P' et Q'.

Angle. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{P'Q'}) \equiv \frac{5\pi}{6} \ [2\pi].$$

Droites. À 2π près, cette mesure ne vaut ni 0, ni π, ni $\dfrac{\pi}{2}$, ni $-\dfrac{\pi}{2}$. Les droites (PQ) et $(P'Q')$ ne sont donc ni parallèles ni perpendiculaires.



La rotation de centre K et d'angle 5π/6 fait passer P en P' et Q en Q' : la flèche P'Q' est la flèche PQ tournée de 5π/6.

Exemple

Énoncé. P, Q et S sont trois points tels que $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}) \equiv -\dfrac{2\pi}{7}\ [2\pi]$. Une rotation les envoie sur P', Q' et S'.

Conclusion. D'après la conservation des angles orientés, quel que soit l'angle de la rotation :

$$(\overrightarrow{P'Q'}, \overrightarrow{P'S'}) \equiv -\frac{2\pi}{7}\ [2\pi].$$

La figure tourne sans changer ses angles ni son sens.

À retenir **: Deux angles à ne pas confondre**

L'angle d'un vecteur et de son image compare $\overrightarrow{PQ}$ à $\overrightarrow{P'Q'}$: il vaut l'angle de la rotation.

La conservation des angles orientés compare deux vecteurs de la figure, puis leurs images : l'angle reste le même.

Le premier résultat sert pour une perpendicularité. Le second sert à retrouver un angle de la figure.

Attention **: Une droite et son image se coupent en général**

Pour une rotation d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$, la droite (PQ) et son image ne sont pas parallèles. Elles ne le sont que si l'angle est un multiple de π.

Pour un quart de tour, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$, elles sont perpendiculaires.

Milieu, alignement, images de figures

Propriété **: Conservation du barycentre**

Soit R une rotation, (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$. Alors

$$\begin{aligned} &R(G) \\ &= \mathrm{Bar}\{(A', a); (B', b)\}, \end{aligned}$$

où $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. Il en est de même pour trois points pondérés. En particulier :

- l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$;
- si trois points sont alignés, leurs images sont alignées.

Propriété : Image d'un segment, d'une droite, d'un cercle

Soit R une rotation, A et B deux points distincts, $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.

- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- Soit I un point et r un réel strictement positif. L'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre $I' = R(I)$ et de **même** rayon r.

Exemple

Énoncé. $G = \mathrm{Bar}\{(P, 2); (Q, 3)\}$, et une rotation envoie P, Q et G sur P', Q' et G'. Situe G'.

Barycentre. D'après la conservation du barycentre :

$$G' = \mathrm{Bar}\{(P', 2); (Q', 3)\}.$$

Position. Donc $\overrightarrow{P'G'} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{P'Q'}$: G' est sur $[P'Q']$, aux trois cinquièmes à partir de P', comme G sur $[PQ]$.

Méthode : image d'un segment, d'une droite, d'un cercle

- **Segment** : tourne ses deux extrémités, puis relie leurs images.
- **Droite** : tourne deux de ses points ; la droite image passe par leurs images. Une droite qui contient le centre a une image qui le contient aussi.
- **Cercle** : tourne seulement son centre, et garde le rayon.

Exemple

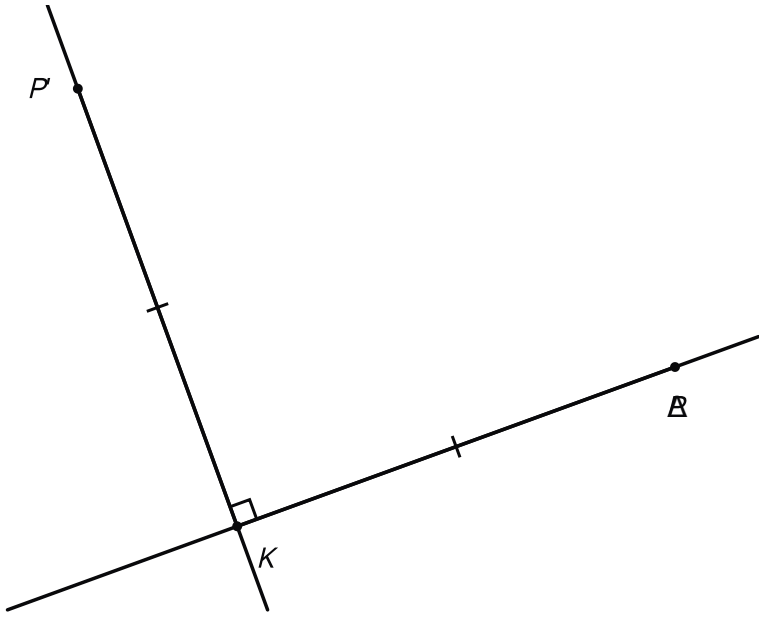
Énoncé. La droite Δ passe par K et par un point $P \neq K$. Détermine son image par la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Deux points. K est invariant et P a pour image P'. D'après l'image d'une droite, l'image de Δ est la droite (KP').

Position. Par définition :

$$(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KP'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. L'image de Δ est la perpendiculaire à Δ en K.



La droite Δ passe par le centre K ; son image par le quart de tour direct de centre K est la droite (KP'), perpendiculaire à Δ en K.

Attention : Le centre du cercle image

Pour l'image d'un cercle, ne garde pas le même centre : remplace le centre I par son image I'.

Si I n'est pas le centre de la rotation et si l'angle n'est pas nul à 2π près, alors $I' \neq I$. Le rayon, lui, ne change jamais.

Reconnaître une rotation dans une figure

Méthode : repérer une rotation

- **Triangle équilatéral direct** UVW : $UW = UV$ et $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Donc W est l'image de V par la rotation de centre U et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- **Carré direct** $UVXY$: $UY = UV$ et $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UY}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Donc la rotation de centre U et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie V sur Y.
- **Polygone régulier direct** à n côtés : la rotation de même centre et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ envoie chaque sommet sur le suivant.

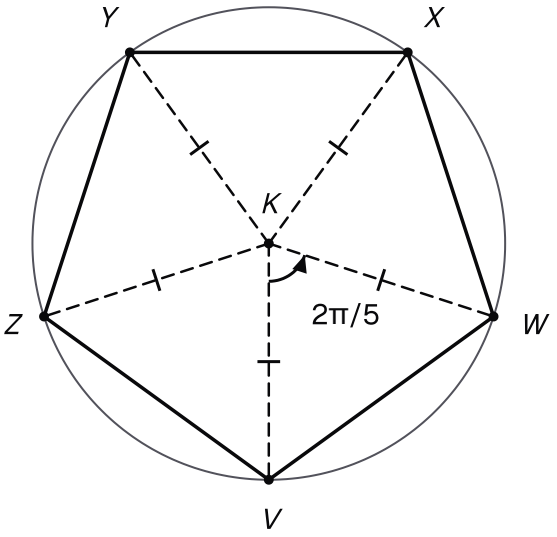
Exemple

Énoncé. $VWXYZ$ est un pentagone régulier direct de centre K. Ses sommets sont sur un cercle de centre K, et deux rayons consécutifs font un angle orienté de mesure $\frac{2\pi}{5}$. Quelle rotation envoie chaque sommet sur le suivant ?

Réponse. Soit R la rotation de centre K et d'angle $\frac{2\pi}{5}$. On a $KW = KV$ et :

$$(\overrightarrow{KV}, \overrightarrow{KW}) \equiv \frac{2\pi}{5}\ [2\pi].$$

Donc $R(V) = W$. De même, $R(W) = X$, $R(X) = Y$, $R(Y) = Z$ et $R(Z) = V$.



Le pentagone régulier direct VWXYZ, sommets posés sur le cercle de centre K : deux rayons voisins font un angle de 2π/5, et R fait passer chaque sommet au suivant.

Attention : Le sens de la figure

Si le triangle équilatéral UVW est indirect, alors $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. La rotation de centre U qui envoie V sur W a alors pour angle $-\frac{\pi}{3}$.

Avant de nommer l'angle, lis toujours le sens de la figure.

Démontrer avec une rotation

Méthode : démontrer avec une rotation

1. **Choisis** la rotation : son centre est un point commun à deux morceaux de la figure, son angle se lit sur la figure.

2. **Justifie** chaque image par la définition : une distance et un angle orienté.
3. **Transporte** la propriété : une longueur par la conservation des distances ; un angle ou une perpendicularité par l'angle d'un vecteur et de son image ; un milieu ou un alignement par la conservation du barycentre.
4. **Termine** par une phrase qui cite la propriété utilisée.

Exemple

Énoncé. Dans le pentagone $VWXYZ$ ci-dessus, compare les diagonales $[VX]$ et $[WY]$.

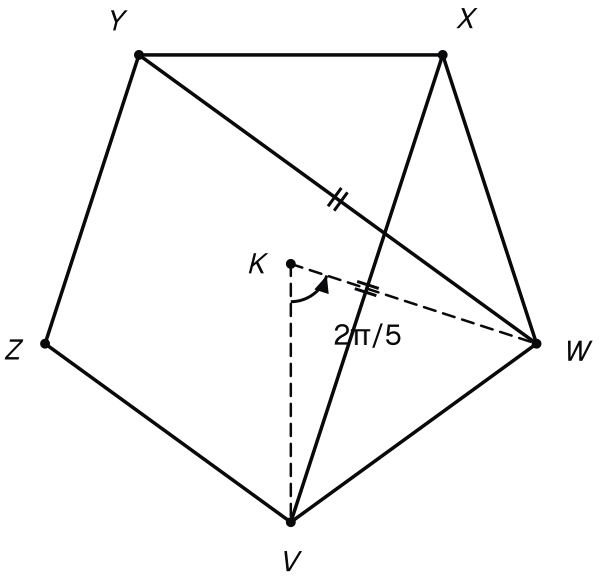
Images. La rotation R de centre K et d'angle $\frac{2\pi}{5}$ vérifie $R(V) = W$ et $R(X) = Y$.

Longueurs. D'après la conservation des distances, $WY = VX$.

Angle. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{VX}, \overrightarrow{WY}) \equiv \frac{2\pi}{5}\ [2\pi].$$

Ces deux diagonales ne sont donc pas parallèles.



Les diagonales [VX] et [WY] du pentagone se correspondent par R : elles ont la même longueur, et la seconde fait un angle de 2π/5 avec la première.

À retenir : Lire le centre et l'angle

Pour trouver la rotation, cherche un point d'où partent deux segments égaux. Ce point est le centre.

L'angle orienté de ces deux segments, lu du premier vers le second, est l'angle de la rotation.

Quelle propriété pour quelle question ?

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- **Prouver qu'un point est une image** : la définition, avec la distance et l'angle.
- **Retrouver un point de départ** : la rotation réciproque, d'angle opposé.
- **Trouver le centre** : le seul point invariant.
- **Comparer deux longueurs** : la conservation des distances.
- **Prouver une perpendicularité** : l'angle d'un vecteur et de son image, pour un quart de tour.
- **Retrouver un angle de la figure** : la conservation des angles orientés.
- **Prouver un milieu ou un alignement** : la conservation du barycentre.
- **Tracer l'image d'une figure** : les images de quelques points bien choisis.

Image d'un point M distinct du centre

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et}$$
$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi]$$

Rotation réciproque R' : même centre, angle opposé

$$M' = R(M) \Leftrightarrow M = R'(M')$$

Conservation des distances

$$A'B' = AB$$

Angle d'un vecteur et de son image, A et B distincts

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta \ [2\pi]$$

Conservation des angles orientés

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$$
$$\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \ [2\pi]$$

Conservation du barycentre, a + b non nul

$$R(\text{Bar}\{(A,a);(B,b)\})$$
$$= \text{Bar}\{(A',a);(B',b)\}$$

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme la rotation en entier : son centre et son angle. Pour chaque image, écris les deux conditions, distance et angle, dans le bon ordre.

Cite ensuite la propriété employée par son nom. Fais la figure sur ton cahier en respectant le sens direct : elle guide ton raisonnement.