BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Niveau examen	5

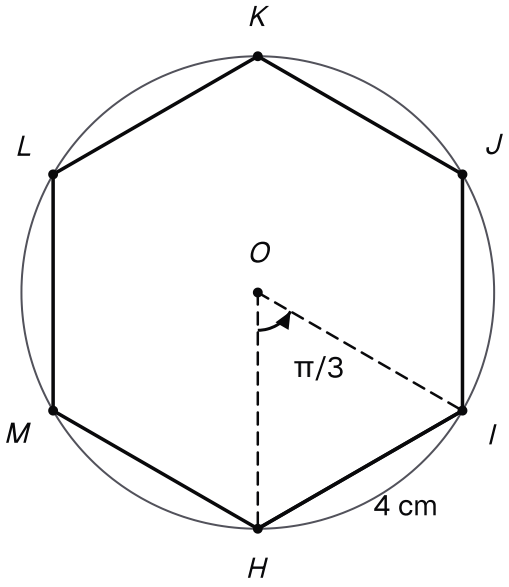
Exercice 1 5 pts

Les rotations d'un hexagone régulier

$HIJKLM$ est un hexagone régulier direct de centre O et de côté 4 cm. Ses six sommets sont sur le cercle de centre O et de rayon 4 cm, et l'angle orienté de deux rayons consécutifs mesure $\frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OI}) &\equiv (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})\\ &\equiv \dots\\ &\equiv (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OH})\\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



L'hexagone régulier direct HIJKLM de côté 4 cm, dont les sommets reposent sur le cercle de centre O de rayon 4 cm.

1. 1 pts

Justifier que $R(H) = I$. Donner ensuite, sans justification, les images de I, J, K, L et M par R.

INDICE

Outil : la définition d'une rotation : une distance et un angle orienté.

2. 0,75 pts

En déduire que $HJ = IK = JL$.

INDICE

Outil : la conservation des distances, appliquée au segment $[HJ]$, puis au segment $[IK]$.

3. 1,25 pts

Calculer la longueur HJ.

INDICE

Début : par la relation de Chasles, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. **Ensuite :** soit A le milieu de $[HJ]$; dans le triangle isocèle OHJ, la droite (OA) est hauteur et bissectrice.

4. 1 pts

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{IK})$. On admet que $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$: donner ensuite une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$.

INDICE

Début : l'angle d'un vecteur et de son image donne le premier angle. **Ensuite :** la conservation des angles orientés, avec $R(H) = I$, $R(I) = J$ et $R(J) = K$.

5. 1 pts

On note R_1 la rotation de centre O et d'angle π. Justifier que $R_1(H) = K$ et $R_1(J) = M$. En déduire que $KM = HJ$ et que les droites (HJ) et (KM) sont parallèles.

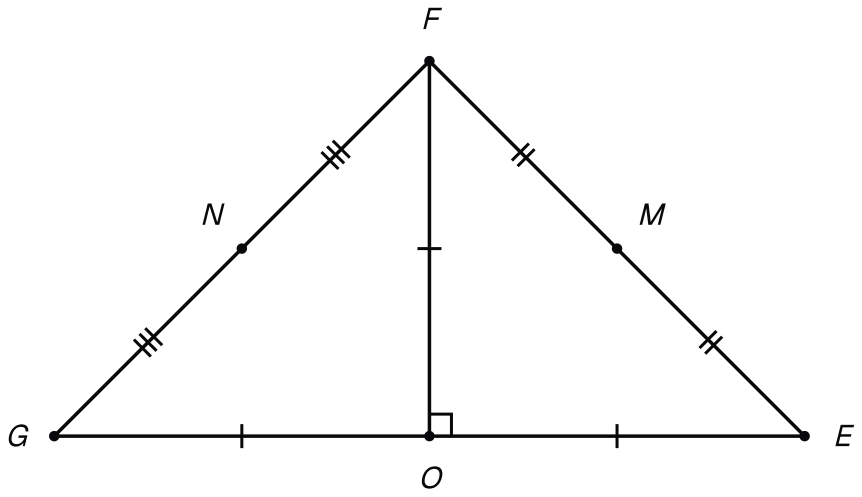
INDICE

Début : par la relation de Chasles, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) \equiv \pi\ [2\pi]$, et de même pour J et M. **Ensuite :** la conservation des distances et l'angle d'un vecteur et de son image, pour R_1.

Exercice 2 5 pts

Un triangle rectangle isocèle et ses milieux

OEF est un triangle rectangle isocèle en O, avec $OE = OF = 4$ cm et $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le point G est tel que O soit le milieu de $[EG]$. On note M le milieu de $[EF]$ et N le milieu de $[FG]$. Soit R la rotation de centre O qui envoie E sur F.



Le triangle OEF rectangle isocèle en O, le point G de l'autre côté de O, et les milieux M de [EF] et N de [FG].

1. 0,75 pts

Donner l'angle de R, en justifiant que la rotation de centre O et de cet angle envoie bien E sur F.

INDICE

Outil : la définition d'une rotation ; l'angle se lit du point vers son image.

2. 1 pts

Justifier que $R(F) = G$.

INDICE

Début : O est le milieu de $[EG]$, donc $OG = OE$ et $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}) \equiv \pi\ [2\pi]$. **Ensuite :** calcule $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG})$ par la relation de Chasles.

3. 1 pts

En déduire l'image du segment $[EF]$ par R. Justifier que $FG = EF$ et que les droites (EF) et (FG) sont perpendiculaires.

INDICE

Outil : l'image d'un segment, puis la conservation des distances et l'angle d'un vecteur et de son image.

4. 1 pts

Justifier que $R(M) = N$. En déduire que le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

INDICE

Outil : la conservation du barycentre (image d'un milieu) ; puis la définition de R appliquée à M.

5. 1,25 pts

Calculer EF, puis OM et MN.

INDICE

Début : le théorème de Pythagore dans OEF. **Ensuite :** dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets.

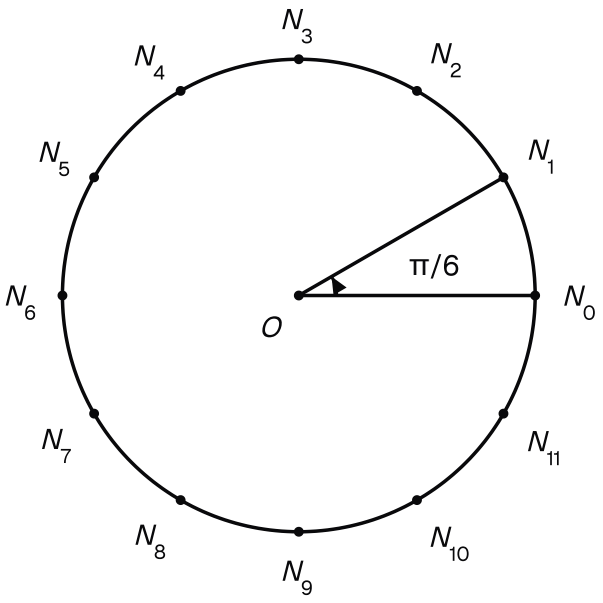
Exercice 3 — 5 pts

Les nacelles d'une grande roue

Une grande roue de centre O porte douze nacelles, représentées par les points N_0, N_1, …, N_{11} du cercle de centre O et de rayon 20 m. Elles sont régulièrement espacées dans le sens direct :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_1}) &\equiv (\overrightarrow{ON_1}, \overrightarrow{ON_2}) \\ &\equiv \dots \\ &\equiv (\overrightarrow{ON_{11}}, \overrightarrow{ON_0}) \\ &\equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et R_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



La grande roue : douze nacelles N0 à N11 régulièrement réparties sur le cercle de centre O et de rayon 20 m, un douzième de tour les sépare.

1. — 0,75 pts

Justifier que $R(N_0) = N_1$. Quelle est l'image de N_{11} par R ?

INDICE

Outil : la définition d'une rotation ; toutes les nacelles sont à 20 m de O.

2. — 1 pts

Justifier que $(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_3}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. En déduire que $R_2(N_0) = N_3$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, avec les nacelles intermédiaires N_1 et N_2.

3. 0,75 pts

Calculer la distance N_0N_3.

INDICE

Outil : le triangle ON_0N_3 est rectangle isocèle en O ; utilise le théorème de Pythagore.

4. 1 pts

Justifier que O est le milieu de $[N_0N_6]$ et de $[N_3N_9]$, puis que $R_2(N_6) = N_9$.

INDICE

Début : comme à la question 2, $(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_6}) \equiv 6 \times \dfrac{\pi}{6} = \pi\ [2\pi]$; la rotation d'angle π de centre O envoie un point sur le point tel que O soit le milieu. **Ensuite :** calcule $(\overrightarrow{ON_6}, \overrightarrow{ON_9})$.

5. 1,5 pts

En déduire que $N_3N_9 = N_0N_6$ et que les droites (N_0N_6) et (N_3N_9) sont perpendiculaires. Quelle est la nature du quadrilatère $N_0N_3N_6N_9$?

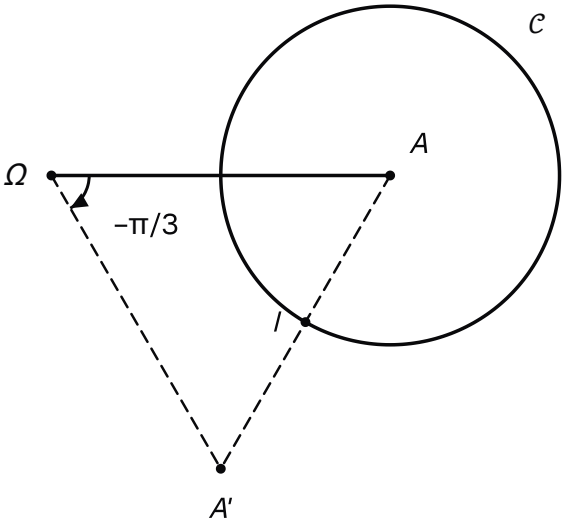
INDICE

Outil : la rotation R_2 envoie N_0 sur N_3 et N_6 sur N_9. **Ensuite :** un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu, la même longueur et sont perpendiculaires est un carré.

Exercice 4 — 5 pts

Deux cercles images l'un de l'autre et un angle droit

On donne deux points Ω et A tels que $\Omega A = 4$ cm, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 cm. On note R la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, $A' = R(A)$, $\mathcal{C}'$ l'image du cercle $\mathcal{C}$ par R, et I le milieu du segment $[AA']$. Autour de Ω, on tourne de A vers A' dans le sens indirect.



Les données : Ω et A à 4 cm, le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 cm, A' image de A par la rotation d'angle -π/3, et I milieu de [AA'].

1. — 0,75 pts

Justifier que le triangle $\Omega AA'$ est équilatéral, puis donner la longueur AA'.

INDICE

Outil : la définition d'une rotation donne une distance et un angle orienté ; un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure $\dfrac{\pi}{3}$ est équilatéral.

2. — 1 pts

Déterminer le cercle $\mathcal{C}'$. Justifier que le point I appartient à la fois à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$, et que c'est leur seul point commun.

INDICE

Outil : l'image d'un cercle : on suit son centre, le rayon ne change pas. **Ensuite :** calcule AI et $A'I$ avec la question 1.

3. 1 pts

Justifier que la droite (ΩI) est perpendiculaire à la droite (AA'), puis calculer la longueur ΩI.

INDICE

Début : $\Omega A = \Omega A'$, donc Ω est sur la médiatrice du segment $[AA']$. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle ΩIA.

4. 1,25 pts

On note R' la rotation réciproque de R, et $T = R'(I)$. Donner l'angle de R' et justifier que $R'(A') = A$. En déduire que T appartient au cercle $\mathcal{C}$, puis que le triangle ΩTA est rectangle en T.

INDICE

Début : la rotation réciproque a le même centre et l'angle opposé ; elle ramène chaque image sur son point de départ. **Ensuite :** la conservation des distances avec $R'(A') = A$ et $R'(I) = T$, puis la conservation des angles orientés, avec $R'(\Omega) = \Omega$.

5. 1 pts

Calculer ΩT et TI. Justifier ensuite que la droite (ΩA) est perpendiculaire à la droite (TI).

INDICE

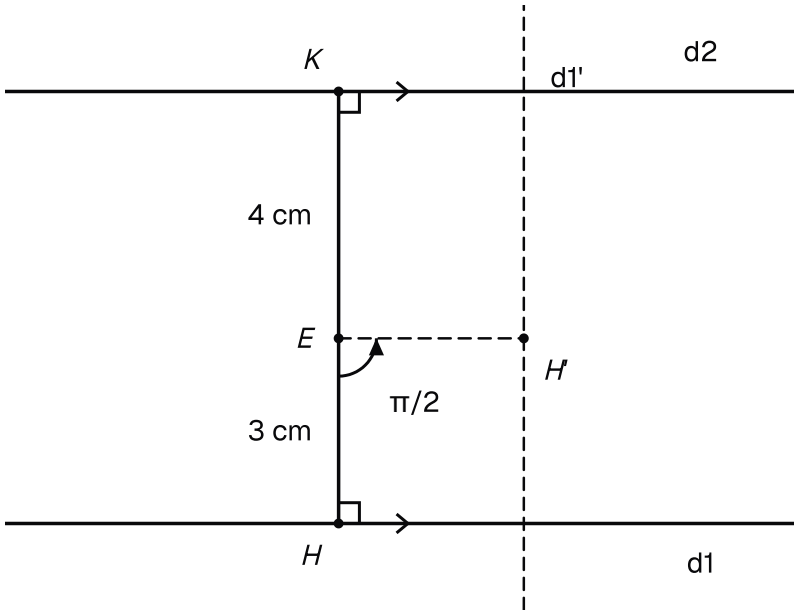
Début : $T = R'(I)$, avec R' d'angle $\frac{\pi}{3}$: regarde le triangle ΩIT. **Ensuite :** les points Ω et A sont chacun à égale distance de T et de I.

Exercice 5 — 5 pts

Un triangle rectangle isocèle entre deux droites parallèles

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Le point E est situé entre elles : la perpendiculaire à d_1 passant par E coupe d_1 en H et d_2 en K, avec $EH = 3$ cm, $EK = 4$ cm, et E entre H et K.

On cherche un point M de d_1 et un point N de d_2 tels que $EN = EM$ et $(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EN}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$: le triangle EMN est alors rectangle isocèle en E. On note R la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $H' = R(H)$, et d_1' l'image de la droite d_1 par R. On admet que d_1' est la droite qui passe par H' et qui est parallèle à la droite (EH).



Les données : d1 et d2 parallèles, E entre elles avec EH = 3 cm et EK = 4 cm, H' image de H par le quart de tour de centre E, et la droite d1' admise.

1. — 0,75 pts

On suppose que deux points M et N conviennent. Justifier que $N = R(M)$, puis que N appartient à la droite d_1'.

INDICE

Outil : la définition d'une rotation, puis la définition de l'image d'une figure.

2. — 1,25 pts

Justifier que les droites d_1' et d_2 se coupent en un seul point, noté N_0. Justifier que le quadrilatère EKN_0H' est un rectangle, puis calculer KN_0 et EN_0.

INDICE

Début : d_2 est perpendiculaire à (EH), comme d_1. **Ensuite :** compare les directions des côtés opposés de EKN_0H', regarde l'angle en K, puis applique le théorème de Pythagore dans le triangle EKN_0.

3. 1 pts

Soit M_0 le point tel que $R(M_0) = N_0$. Justifier que M_0 appartient à d_1, puis calculer EM_0 et HM_0. En déduire que les points M_0 et N_0 conviennent.

INDICE

Début : d'après la rotation réciproque, N_0 est l'image par R d'un seul point ; or N_0, point de d_1', est l'image d'un point de d_1. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle EHM_0, rectangle en H.

4. 1 pts

Calculer M_0N_0. Existe-t-il d'autres points M de d_1 et N de d_2 qui conviennent ?

INDICE

Début : le triangle EM_0N_0 est rectangle isocèle en E. **Ensuite :** reprends les questions 1 et 2 : sur quelles droites se trouve nécessairement un point N qui convient ?

5. 1 pts

On cherche maintenant M_1 sur d_1 et N_1 sur d_2 tels que $EN_1 = EM_1$ et $(\overrightarrow{EM_1}, \overrightarrow{EN_1}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note R' la rotation réciproque de R et $H_1 = R'(H)$; on admet de même que l'image de d_1 par R' est la droite Δ qui passe par H_1 et qui est parallèle à (EH). En raisonnant comme aux questions 1 à 4 avec R', justifier qu'il existe un seul tel couple, puis que K est le milieu de $[N_0N_1]$.

INDICE

Début : R' a le même centre que R et l'angle opposé ; un couple qui convient vérifie $N_1 = R'(M_1)$. **Ensuite :** les points H', E et H_1 sont alignés, avec $EH_1 = EH'$; compare $\overrightarrow{KN_1}$ et $\overrightarrow{KN_0}$ à l'aide des rectangles EKN_0H' et EKN_1H_1.