BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Niveau examen	5

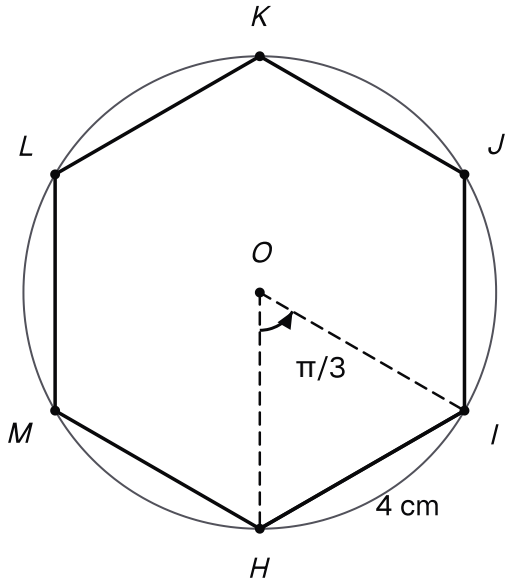
Exercice 1 5 pts

Les rotations d'un hexagone régulier

$HIJKLM$ est un hexagone régulier direct de centre O et de côté 4 cm. Ses six sommets sont sur le cercle de centre O et de rayon 4 cm, et l'angle orienté de deux rayons consécutifs mesure $\frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OI}) &\equiv (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})\\ &\equiv \dots\\ &\equiv (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OH})\\ &\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



L'hexagone régulier direct HIJKLM de côté 4 cm, dont les sommets reposent sur le cercle de centre O de rayon 4 cm.

1. 1 pts

Justifier que $R(H) = I$. Donner ensuite, sans justification, les images de I, J, K, L et M par R.

INDICE

Outil : la définition d'une rotation : une distance et un angle orienté.

CORRIGÉ

Image de H. Les sommets H et I sont sur le cercle de centre O et de rayon 4 cm : $OI = OH = 4$ cm. Par hypothèse, $(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OI}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. D'après la définition d'une rotation, $R(H) = I$.

Autres images. Le même raisonnement s'applique à chaque couple de sommets consécutifs.

Conclusion. $R(H) = I$, puis $R(I) = J$, $R(J) = K$, $R(K) = L$, $R(L) = M$ et $R(M) = H$.

2. 0,75 pts

En déduire que $HJ = IK = JL$.

INDICE

Outil : la conservation des distances, appliquée au segment $[HJ]$, puis au segment $[IK]$.

CORRIGÉ

Première égalité. R envoie H sur I et J sur K. D'après la conservation des distances, $IK = HJ$.

Seconde égalité. R envoie I sur J et K sur L. Pour la même raison, $JL = IK$.

Conclusion. $HJ = IK = JL$.

3. 1,25 pts

Calculer la longueur HJ.

INDICE

Début : par la relation de Chasles, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. **Ensuite :** soit A le milieu de $[HJ]$; dans le triangle isocèle OHJ, la droite (OA) est hauteur et bissectrice.

CORRIGÉ

Angle en O. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OJ}) &\equiv (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OI}) \\ &\quad + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \\ &\equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Le triangle OHJ est isocèle en O, car $OH = OJ = 4$ cm, et son angle au sommet mesure $\dfrac{2\pi}{3}$.

Demi-côté. Soit A le milieu de $[HJ]$. Dans ce triangle isocèle, la droite (OA) est hauteur et bissectrice : elle est perpendiculaire à (HJ), et l'angle $\widehat{HOA}$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Dans le triangle OAH, rectangle en A, on obtient $HA = 4 \times \sin\dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ cm.

Longueur HJ. Comme A est le milieu de $[HJ]$, $HJ = 2 \times HA = 4\sqrt{3}$ cm.

Conclusion. La longueur HJ vaut $4\sqrt{3}$ cm.

4. 1 pts

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{IK})$. On admet que $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$: donner ensuite une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$.

INDICE

Début : l'angle d'un vecteur et de son image donne le premier angle. **Ensuite :** la conservation des angles orientés, avec $R(H) = I$, $R(I) = J$ et $R(J) = K$.

CORRIGÉ

Premier angle. R envoie H sur I et J sur K, avec $H \neq J$. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{IK}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Second angle. R envoie H, I, J sur I, J, K, avec $I \neq H$ et $J \neq H$. D'après la conservation des angles orientés, l'angle de sommet I formé par les images est égal à l'angle de sommet H :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) &\equiv (\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}) \\ &\equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Une mesure de $(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{IK})$ est $\frac{\pi}{3}$, et une mesure de $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$ est $\frac{\pi}{6}$.

5. 1 pts

On note R_1 la rotation de centre O et d'angle π. Justifier que $R_1(H) = K$ et $R_1(J) = M$. En déduire que $KM = HJ$ et que les droites (HJ) et (KM) sont parallèles.

INDICE

Début : par la relation de Chasles, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) \equiv \pi\ [2\pi]$, et de même pour J et M. **Ensuite :** la conservation des distances et l'angle d'un vecteur et de son image, pour R_1.

CORRIGÉ

Image de H. On a $OK = OH = 4$ cm. D'après la relation de Chasles, avec les rayons intermédiaires $[OI]$ et $[OJ]$:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) &\equiv 3 \times \frac{\pi}{3} \\ &\equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

D'après la définition, $R_1(H) = K$.

Image de J. De même, $OM = OJ$ et $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM}) \equiv \pi\ [2\pi]$, donc $R_1(J) = M$.

Longueur. R_1 envoie H sur K et J sur M. D'après la conservation des distances, $KM = HJ$.

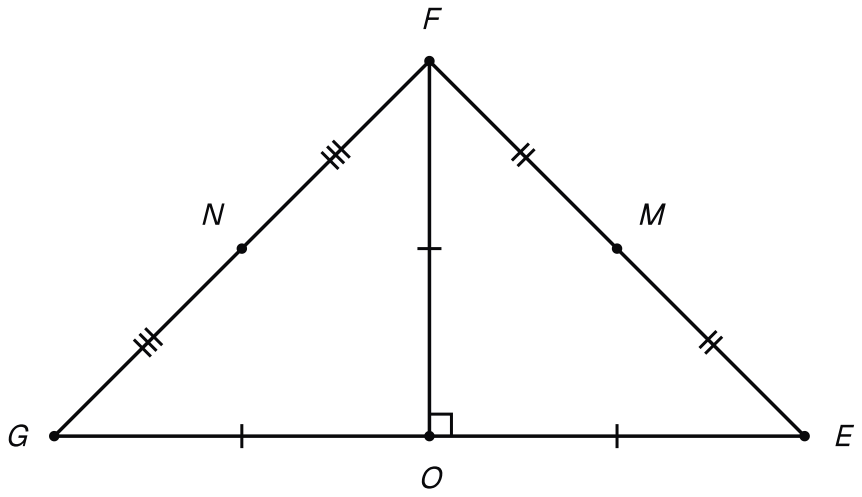
Parallélisme. D'après l'angle d'un vecteur et de son image, $(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{KM}) \equiv \pi\ [2\pi]$. Les vecteurs $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires.

Conclusion. $R_1(H) = K$ et $R_1(J) = M$; on en déduit $KM = HJ$, et les droites (HJ) et (KM) sont parallèles.

Exercice 2 5 pts

Un triangle rectangle isocèle et ses milieux

OEF est un triangle rectangle isocèle en O, avec $OE = OF = 4$ cm et $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le point G est tel que O soit le milieu de $[EG]$. On note M le milieu de $[EF]$ et N le milieu de $[FG]$. Soit R la rotation de centre O qui envoie E sur F.



Le triangle OEF rectangle isocèle en O, le point G de l'autre côté de O, et les milieux M de [EF] et N de [FG].

1. 0,75 pts

Donner l'angle de R, en justifiant que la rotation de centre O et de cet angle envoie bien E sur F.

INDICE

Outil : la définition d'une rotation ; l'angle se lit du point vers son image.

CORRIGÉ

Distance. On a $OF = OE = 4$ cm.

Angle. L'angle se lit du point E vers son image F : par hypothèse, $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Les deux conditions de la définition sont vérifiées : la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie E sur F.

Unicité de l'angle. Le point E est distinct du centre O. L'angle d'une rotation de centre O qui envoie E sur F est donc fixé à 2π près : c'est une mesure de $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$.

Conclusion. Donc R a pour angle $\frac{\pi}{2}$, et $R(E) = F$.

2. 1 pts

Justifier que $R(F) = G$.

INDICE

Début : O est le milieu de $[EG]$, donc $OG = OE$ et $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}) \equiv \pi\ [2\pi]$. **Ensuite :** calcule $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG})$ par la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Distance. O est le milieu de $[EG]$, donc $OG = OE = 4$ cm, et $OF = 4$ cm : ainsi $OG = OF$.

Angle. Comme O est le milieu de $[EG]$, $\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OE}$, donc $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}) \equiv \pi\ [2\pi]$. D'après la relation de Chasles et l'angle opposé :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}) &\equiv (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}) \\ &\quad + (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition d'une rotation, $R(F) = G$.

3. 1 pts

En déduire l'image du segment $[EF]$ par R. Justifier que $FG = EF$ et que les droites (EF) et (FG) sont perpendiculaires.

INDICE

Outil : l'image d'un segment, puis la conservation des distances et l'angle d'un vecteur et de son image.

CORRIGÉ

Segment. D'après les questions 1 et 2, $R(E) = F$ et $R(F) = G$. D'après l'image d'un segment, l'image de $[EF]$ est le segment $[FG]$.

Longueur. D'après la conservation des distances, $FG = EF$.

Orthogonalité. Les points E et F sont distincts. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. L'image de $[EF]$ par R est $[FG]$; de plus $FG = EF$, et les droites (EF) et (FG) sont perpendiculaires.

4. 1 pts

Justifier que $R(M) = N$. En déduire que le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

INDICE

Outil : la conservation du barycentre (image d'un milieu) ; puis la définition de R appliquée à M.

CORRIGÉ

Image du milieu. M est le milieu de $[EF]$. D'après la conservation du barycentre, $R(M)$ est le milieu du segment qui joint $R(E) = F$ et $R(F) = G$, c'est-à-dire de $[FG]$. Donc $R(M) = N$.

Triangle OMN. La définition de R, appliquée à M, donne $ON = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion. $R(M) = N$, et le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

5. 1,25 pts

Calculer EF, puis OM et MN.

INDICE

Début : le théorème de Pythagore dans OEF. **Ensuite :** dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets.

CORRIGÉ

Longueur EF. Le triangle OEF est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore :

$$EF^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

Donc $EF = \sqrt{32}$, soit $EF = 4\sqrt{2}$ cm.

Longueur OM. Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets. M est le milieu de l'hypoténuse $[EF]$, donc $OM = \dfrac{EF}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.

Longueur MN. D'après la question 4, OMN est rectangle en O avec $ON = OM$. D'après le théorème de Pythagore, $MN^2 = OM^2 + ON^2 = 8 + 8 = 16$, donc $MN = 4$ cm.

Conclusion. $EF = 4\sqrt{2}$ cm, $OM = 2\sqrt{2}$ cm et $MN = 4$ cm.

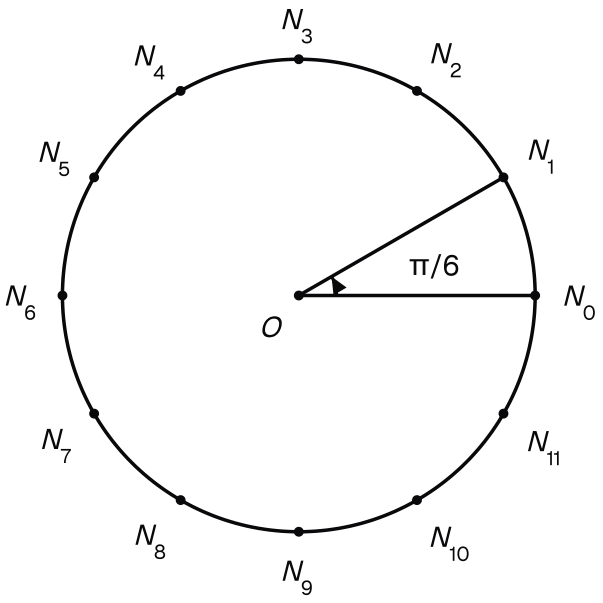
Exercice 3 — 5 pts

Les nacelles d'une grande roue

Une grande roue de centre O porte douze nacelles, représentées par les points N_0, N_1, …, N_{11} du cercle de centre O et de rayon 20 m. Elles sont régulièrement espacées dans le sens direct :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_1}) &\equiv (\overrightarrow{ON_1}, \overrightarrow{ON_2}) \\ &\equiv \dots \\ &\equiv (\overrightarrow{ON_{11}}, \overrightarrow{ON_0}) \\ &\equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi].\end{aligned}$$

On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et R_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



La grande roue : douze nacelles N0 à N11 régulièrement réparties sur le cercle de centre O et de rayon 20 m, un douzième de tour les sépare.

1. — 0,75 pts

Justifier que $R(N_0) = N_1$. Quelle est l'image de N_{11} par R ?

INDICE

Outil : la définition d'une rotation ; toutes les nacelles sont à 20 m de O.

CORRIGÉ

Image de N_0. Toutes les nacelles sont à 20 m de O : $ON_1 = ON_0 = 20$ m. Par hypothèse, $(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_1}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. D'après la définition d'une rotation, $R(N_0) = N_1$.

Image de N_{11}. De même, $ON_0 = ON_{11}$ et $(\overrightarrow{ON_{11}}, \overrightarrow{ON_0}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Conclusion. $R(N_0) = N_1$, et l'image de N_{11} par R est N_0.

2. 1 pts

Justifier que $(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_3}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. En déduire que $R_2(N_0) = N_3$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, avec les nacelles intermédiaires N_1 et N_2.

CORRIGÉ

Angle. D'après la relation de Chasles, avec les nacelles intermédiaires N_1 et N_2 :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_3}) &\equiv (\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_1}) \\ &\quad + (\overrightarrow{ON_1}, \overrightarrow{ON_2}) \\ &\quad + (\overrightarrow{ON_2}, \overrightarrow{ON_3}) \\ &\equiv 3 \times \frac{\pi}{6} \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Image. On a aussi $ON_3 = ON_0 = 20$ m. La définition de R_2 donne $R_2(N_0) = N_3$.

Conclusion. $(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_3}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et $R_2(N_0) = N_3$.

3. 0,75 pts

Calculer la distance N_0N_3.

INDICE

Outil : le triangle ON_0N_3 est rectangle isocèle en O ; utilise le théorème de Pythagore.

CORRIGÉ

D'après la question 2, le triangle ON_0N_3 est rectangle en O, avec $ON_0 = ON_3 = 20$ m. D'après le théorème de Pythagore :

$$N_0N_3^2 = 20^2 + 20^2 = 800.$$

Une longueur est positive, donc $N_0N_3 = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$ m.

Conclusion. La distance N_0N_3 vaut $20\sqrt{2}$ m.

4. 1 pts

Justifier que O est le milieu de $[N_0N_6]$ et de $[N_3N_9]$, puis que $R_2(N_6) = N_9$.

INDICE

Début : comme à la question 2, $(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_6}) \equiv 6 \times \dfrac{\pi}{6} = \pi\ [2\pi]$; la rotation d'angle π de centre O envoie un point sur le point tel que O soit le milieu. **Ensuite :** calcule $(\overrightarrow{ON_6}, \overrightarrow{ON_9})$.

CORRIGÉ

Milieu de $[N_0N_6]$. Comme à la question 2, la relation de Chasles avec six écarts de $\dfrac{\pi}{6}$ donne :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_6}) &\equiv 6 \times \frac{\pi}{6} \\ &\equiv \pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Avec $ON_6 = ON_0$, le point N_6 est l'image de N_0 par la rotation de centre O et d'angle π. D'après la propriété des rotations d'angle π, O est le milieu de $[N_0N_6]$.

Milieu de $[N_3N_9]$. De même, $(\overrightarrow{ON_3}, \overrightarrow{ON_9}) \equiv \pi\ [2\pi]$ et $ON_9 = ON_3$: O est le milieu de $[N_3N_9]$.

Image de N_6. Avec trois écarts de $\dfrac{\pi}{6}$, $(\overrightarrow{ON_6}, \overrightarrow{ON_9}) \equiv 3 \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et $ON_9 = ON_6$. La définition de R_2 donne $R_2(N_6) = N_9$.

Conclusion. O est le milieu de $[N_0N_6]$ et de $[N_3N_9]$, et $R_2(N_6) = N_9$.

5. 1,5 pts

En déduire que $N_3N_9 = N_0N_6$ et que les droites (N_0N_6) et (N_3N_9) sont perpendiculaires. Quelle est la nature du quadrilatère $N_0N_3N_6N_9$?

INDICE

Outil : la rotation R_2 envoie N_0 sur N_3 et N_6 sur N_9. **Ensuite :** un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu, la même longueur et sont perpendiculaires est un carré.

CORRIGÉ

Longueur. D'après les questions 2 et 4, R_2 envoie N_0 sur N_3 et N_6 sur N_9. D'après la conservation des distances, $N_3N_9 = N_0N_6$.

Orthogonalité. Les points N_0 et N_6 sont distincts. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{N_0N_6}, \overrightarrow{N_3N_9}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Les droites (N_0N_6) et (N_3N_9) sont donc perpendiculaires.

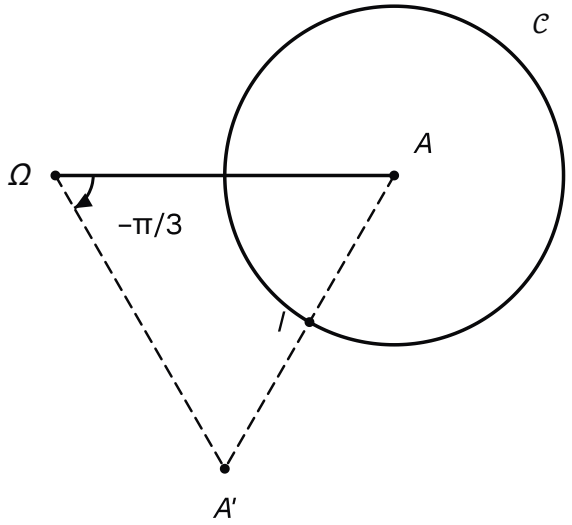
Nature. Les diagonales $[N_0N_6]$ et $[N_3N_9]$ du quadrilatère $N_0N_3N_6N_9$ ont le même milieu O (question 4), la même longueur 40 m (deux rayons de 20 m), et elles sont perpendiculaires.

Conclusion. $N_3N_9 = N_0N_6$, les droites (N_0N_6) et (N_3N_9) sont perpendiculaires, et $N_0N_3N_6N_9$ est un carré, de côté $N_0N_3 = 20\sqrt{2}$ m.

Exercice 4 5 pts

Deux cercles images l'un de l'autre et un angle droit

On donne deux points Ω et A tels que $\Omega A = 4$ cm, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 cm. On note R la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, $A' = R(A)$, $\mathcal{C}'$ l'image du cercle $\mathcal{C}$ par R, et I le milieu du segment $[AA']$. Autour de Ω, on tourne de A vers A' dans le sens indirect.



Les données : Ω et A à 4 cm, le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 cm, A' image de A par la rotation d'angle -π/3, et I milieu de [AA'].

1. 0,75 pts

Justifier que le triangle $\Omega AA'$ est équilatéral, puis donner la longueur AA'.

INDICE

Outil : la définition d'une rotation donne une distance et un angle orienté ; un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure $\dfrac{\pi}{3}$ est équilatéral.

CORRIGÉ

Définition. Comme $A' = R(A)$, on a $\Omega A' = \Omega A = 4$ cm et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Nature. Le triangle $\Omega AA'$ est isocèle en Ω, et son angle géométrique en Ω mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Ses deux autres angles sont égaux ; chacun mesure :

$$\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Les trois angles sont égaux : le triangle $\Omega AA'$ est équilatéral.

Longueur. Les trois côtés ont la même longueur : $AA' = \Omega A = 4$ cm.

Conclusion. Le triangle $\Omega AA'$ est équilatéral, et $AA' = 4$ cm.

2. 1 pts

Déterminer le cercle $\mathcal{C}'$. Justifier que le point I appartient à la fois à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$, et que c'est leur seul point commun.

INDICE

Outil : l'image d'un cercle : on suit son centre, le rayon ne change pas. **Ensuite :** calcule AI et $A'I$ avec la question 1.

CORRIGÉ

Image du cercle. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre A et pour rayon 2 cm, et $R(A) = A'$. D'après l'image d'un segment, d'une droite, d'un cercle, $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre A' et de même rayon 2 cm.

Le point I. I est le milieu de $[AA']$, et $AA' = 4$ cm d'après la question 1. Donc $AI = A'I = 2$ cm : I est sur $\mathcal{C}$, à 2 cm de A, et sur $\mathcal{C}'$, à 2 cm de A'.

Seul point commun. Soit M un point situé sur les deux cercles. Alors $AM + MA' = 2 + 2 = AA'$. L'égalité dans l'inégalité triangulaire place M sur le segment $[AA']$, à 2 cm de A : c'est le milieu I. Le point I est le seul point commun.

Conclusion. $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre A' et de rayon 2 cm, et I est l'unique point commun à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

3. 1 pts

Justifier que la droite (ΩI) est perpendiculaire à la droite (AA'), puis calculer la longueur ΩI.

INDICE

Début : $\Omega A = \Omega A'$, donc Ω est sur la médiatrice du segment $[AA']$. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle ΩIA.

CORRIGÉ

Perpendicularité. On a $\Omega A = \Omega A'$: le point Ω est sur la médiatrice de $[AA']$. Cette médiatrice passe aussi par le milieu I de $[AA']$. De plus, comme $\Omega A = 4 \neq 2 = IA$, on a $\Omega \neq I$: la médiatrice est la droite (ΩI). Elle est perpendiculaire à (AA').

Longueur. Le triangle ΩIA est donc rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore, $\Omega I^2 = \Omega A^2 - AI^2 = 16 - 4 = 12$, donc $\Omega I = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm.

Conclusion. La droite (ΩI) est perpendiculaire à (AA'), et $\Omega I = 2\sqrt{3}$ cm.

4. 1,25 pts

On note R' la rotation réciproque de R, et $T = R'(I)$. Donner l'angle de R' et justifier que $R'(A') = A$. En déduire que T appartient au cercle $\mathcal{C}$, puis que le triangle ΩTA est rectangle en T.

INDICE

Début : la rotation réciproque a le même centre et l'angle opposé ; elle ramène chaque image sur son point de départ. **Ensuite :** la conservation des distances avec $R'(A') = A$ et $R'(I) = T$, puis la conservation des angles orientés, avec $R'(\Omega) = \Omega$.

CORRIGÉ

Rotation réciproque. D'après la rotation réciproque, R' est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Comme $A' = R(A)$, elle ramène A' sur son point de départ : $R'(A') = A$.

Le point T. R' envoie A' sur A et I sur T. D'après la conservation des distances, $AT = A'I = 2$ cm : le point T est sur le cercle $\mathcal{C}$.

Angle droit. R' envoie I, Ω, A' sur T, Ω, A, avec $\Omega \neq I$ et $A' \neq I$. D'après la conservation des angles orientés, $(\overrightarrow{T\Omega}, \overrightarrow{TA}) \equiv (\overrightarrow{I\Omega}, \overrightarrow{IA'})\ [2\pi]$.

D'après la question 3, les droites $(I\Omega)$ et (IA') sont perpendiculaires. Ces deux angles mesurent donc $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ à 2π près, et les droites $(T\Omega)$ et (TA) sont perpendiculaires.

Conclusion. R' a pour angle $\frac{\pi}{3}$ et $R'(A') = A$; le point T appartient à $\mathcal{C}$, et le triangle ΩTA est rectangle en T.

5. 1 pts

Calculer ΩT et TI. Justifier ensuite que la droite (ΩA) est perpendiculaire à la droite (TI).

INDICE

Début : $T = R'(I)$, avec R' d'angle $\frac{\pi}{3}$: regarde le triangle ΩIT. **Ensuite :** les points Ω et A sont chacun à égale distance de T et de I.

CORRIGÉ

Longueur ΩT. Comme $T = R'(I)$, la définition de R' donne $\Omega T = \Omega I = 2\sqrt{3}$ cm et $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega T}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Longueur TI. Le triangle ΩIT est isocèle en Ω, d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$. Comme à la question 1, il est équilatéral, et $TI = \Omega I = 2\sqrt{3}$ cm.

Contrôle. Dans le triangle ΩTA, rectangle en T d'après la question 4, le théorème de Pythagore redonne $\Omega T^2 = \Omega A^2 - AT^2 = 16 - 4 = 12$.

Perpendicularité. On a $\Omega T = \Omega I$, et $AT = AI = 2$ cm. Les points Ω et A sont donc tous deux sur la médiatrice du segment $[TI]$. Ils sont distincts : cette médiatrice est la droite (ΩA).

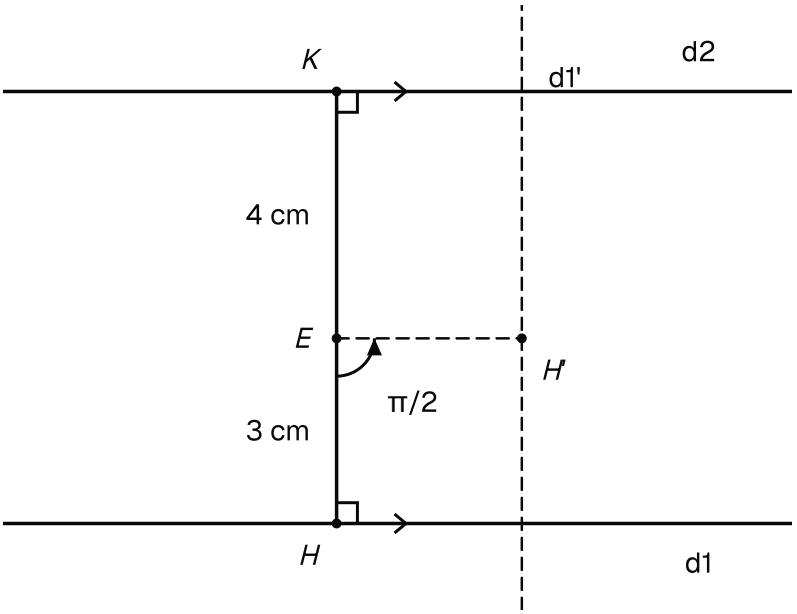
Conclusion. $\Omega T = TI = 2\sqrt{3}$ cm, et la droite (ΩA) est perpendiculaire à la droite (TI).

Exercice 5 5 pts

Un triangle rectangle isocèle entre deux droites parallèles

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Le point E est situé entre elles : la perpendiculaire à d_1 passant par E coupe d_1 en H et d_2 en K, avec $EH = 3$ cm, $EK = 4$ cm, et E entre H et K.

On cherche un point M de d_1 et un point N de d_2 tels que $EN = EM$ et $(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EN}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$: le triangle EMN est alors rectangle isocèle en E. On note R la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $H' = R(H)$, et d_1' l'image de la droite d_1 par R. On admet que d_1' est la droite qui passe par H' et qui est parallèle à la droite (EH).



Les données : d1 et d2 parallèles, E entre elles avec EH = 3 cm et EK = 4 cm, H' image de H par le quart de tour de centre E, et la droite d1' admise.

1. 0,75 pts

On suppose que deux points M et N conviennent. Justifier que $N = R(M)$, puis que N appartient à la droite d_1'.

INDICE

Outil : la définition d'une rotation, puis la définition de l'image d'une figure.

CORRIGÉ

Image. Le point E n'est pas sur d_1, donc $M \neq E$. Par hypothèse, $EN = EM$ et $(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EN}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après la définition d'une rotation, $N = R(M)$.

Droite image. Le point M appartient à d_1. Par définition de l'image d'une figure, son image N appartient à l'image d_1' de d_1.

Conclusion. $N = R(M)$, et N appartient à la droite d_1'.

2. 1,25 pts

Justifier que les droites d_1' et d_2 se coupent en un seul point, noté N_0. Justifier que le quadrilatère EKN_0H' est un rectangle, puis calculer KN_0 et EN_0.

INDICE

Début : d_2 est perpendiculaire à (EH), comme d_1. **Ensuite :** compare les directions des côtés opposés de EKN_0H', regarde l'angle en K, puis applique le théorème de Pythagore dans le triangle EKN_0.

CORRIGÉ

Intersection. La droite d_2 est parallèle à d_1, donc perpendiculaire à (EH). La droite d_1' est parallèle à (EH). Ainsi d_1' et d_2 sont perpendiculaires : elles se coupent en un seul point N_0.

Côtés opposés. Par définition de R, $EH' = EH$ et $(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EH'}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. La droite (EH') est donc perpendiculaire à (EH), donc parallèle à $d_2 = (KN_0)$. Par ailleurs, la droite $(H'N_0) = d_1'$ est parallèle à (EH), qui est la droite (EK).

Rectangle. Les côtés opposés de EKN_0H' sont parallèles deux à deux : c'est un parallélogramme. Son angle en K est droit, car d_2 est perpendiculaire à (EK) : c'est un rectangle.

Longueurs. Ses côtés opposés sont égaux : $KN_0 = EH' = EH = 3$ cm. Dans le triangle EKN_0 rectangle en K, le théorème de Pythagore donne $EN_0^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, donc $EN_0 = 5$ cm.

Conclusion. d_1' et d_2 se coupent en un seul point N_0, EKN_0H' est un rectangle, $KN_0 = 3$ cm et $EN_0 = 5$ cm.

3. 1 pts

Soit M_0 le point tel que $R(M_0) = N_0$. Justifier que M_0 appartient à d_1, puis calculer EM_0 et HM_0. En déduire que les points M_0 et N_0 conviennent.

INDICE

Début : d'après la rotation réciproque, N_0 est l'image par R d'un seul point ; or N_0, point de d_1', est l'image d'un point de d_1. **Ensuite :** le théorème de Pythagore dans le triangle EHM_0, rectangle en H.

CORRIGÉ

Le point M_0. D'après la rotation réciproque, M_0 est l'image de N_0 par la rotation de centre E et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$: c'est le seul point dont l'image par R est N_0. Or N_0 est sur d_1', image de d_1 : il est l'image par R d'un point de d_1. Ce point ne peut être que M_0, donc M_0 appartient à d_1.

Longueurs. Par définition de R, $EM_0 = EN_0 = 5$ cm. La droite (EH) est perpendiculaire à d_1, donc le triangle EHM_0 est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, $HM_0^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, donc $HM_0 = 4$ cm.

Les points conviennent. M_0 est sur d_1 et N_0 sur d_2. Comme $R(M_0) = N_0$, la définition donne $EN_0 = EM_0$ et $(\overrightarrow{EM_0}, \overrightarrow{EN_0}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion. M_0 appartient à d_1, $EM_0 = 5$ cm, $HM_0 = 4$ cm, et les points M_0 et N_0 conviennent.

4. 1 pts

Calculer M_0N_0. Existe-t-il d'autres points M de d_1 et N de d_2 qui conviennent ?

INDICE

Début : le triangle EM_0N_0 est rectangle isocèle en E. **Ensuite :** reprends les questions 1 et 2 : sur quelles droites se trouve nécessairement un point N qui convient ?

CORRIGÉ

Longueur. Le triangle EM_0N_0 est rectangle en E, avec $EM_0 = EN_0 = 5$ cm. D'après le théorème de Pythagore, $M_0N_0^2 = 25 + 25 = 50$, donc $M_0N_0 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm.

Unicité. Soit M sur d_1 et N sur d_2 qui conviennent. La question 1 donne $N = R(M)$, avec N sur d_1'. Comme N est aussi sur d_2, la question 2 donne $N = N_0$. Alors $R(M) = N_0$, et d'après la rotation réciproque, $M = M_0$.

Conclusion. $M_0N_0 = 5\sqrt{2}$ cm, et il n'existe pas d'autre solution : M_0 et N_0 sont les seuls points qui conviennent.

5. 1 pts

On cherche maintenant M_1 sur d_1 et N_1 sur d_2 tels que $EN_1 = EM_1$ et $(\overrightarrow{EM_1}, \overrightarrow{EN_1}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note R' la rotation réciproque de R et $H_1 = R'(H)$; on admet de même que l'image de d_1 par R' est la droite Δ qui passe par H_1 et qui est parallèle à (EH). En raisonnant comme aux questions 1 à 4 avec R', justifier qu'il existe un seul tel couple, puis que K est le milieu de $[N_0N_1]$.

INDICE

Début : R' a le même centre que R et l'angle opposé ; un couple qui convient vérifie $N_1 = R'(M_1)$. **Ensuite :** les points H', E et H_1 sont alignés, avec $EH_1 = EH'$; compare $\overrightarrow{KN_1}$ et $\overrightarrow{KN_0}$ à l'aide des rectangles EKN_0H' et EKN_1H_1.

CORRIGÉ

Un seul couple. D'après la rotation réciproque, R' est la rotation de centre E et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

- Comme à la question 1, un couple qui convient vérifie $N_1 = R'(M_1)$: N_1 est sur Δ et sur d_2.
- Comme à la question 2, Δ, parallèle à (EH), coupe d_2 en un seul point : N_1 est ce point.
- Comme aux questions 3 et 4, $M_1 = R(N_1)$ est le seul antécédent de N_1 par R' ; il est sur d_1, et le couple (M_1, N_1) convient.

Ainsi, il existe un seul tel couple.

Position de H_1. Par définition de R et de R', les droites (EH') et (EH_1) sont perpendiculaires à (EH) en E : les points H', E et H_1 sont alignés, avec $EH' = EH_1 = 3$ cm. Comme $(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EH'}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EH_1}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, on a $H_1 \neq H'$. Donc E est le milieu de $[H'H_1]$, et $\overrightarrow{EH_1} = -\overrightarrow{EH'}$.

Milieu. Comme à la question 2, EKN_1H_1 est un rectangle, donc $\overrightarrow{KN_1} = \overrightarrow{EH_1}$; de même, $\overrightarrow{KN_0} = \overrightarrow{EH'}$. Ainsi $\overrightarrow{KN_1} = -\overrightarrow{KN_0}$: K est le milieu de $[N_0N_1]$.

Conclusion. Il existe un seul couple (M_1, N_1) qui convient, et K est le milieu de $[N_0N_1]$.