BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

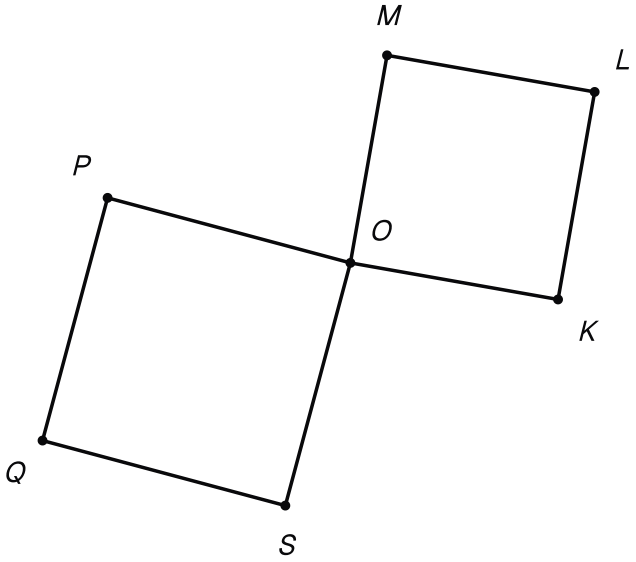
Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Deux carrés qui partagent un sommet

$OKLM$ et $OPQS$ sont deux carrés directs de même sommet O : dans chacun, les sommets se suivent dans le sens direct. On suppose $K \neq P$. On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Deux carrés directs, OKLM à droite et OPQS à gauche, accrochés au même sommet O.

1.

Justifier que $R(K) = M$ et que $R(P) = S$.

INDICE

Outil : dans un carré direct $OKLM$, les côtés $[OK]$ et $[OM]$ ont la même longueur et $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2.

En déduire que $KP = MS$.

INDICE

Début : quels sont les deux points qui ont pour images M et S ? **Ensuite :** la conservation des distances.

3.

Justifier que les droites (KP) et (MS) sont perpendiculaires.

INDICE

Début : quel angle relie le vecteur $\overrightarrow{KP}$ au vecteur qui joint les images de K et de P ? **Ensuite :** l'angle d'un vecteur et de son image, pour la rotation R.

Exercice 2

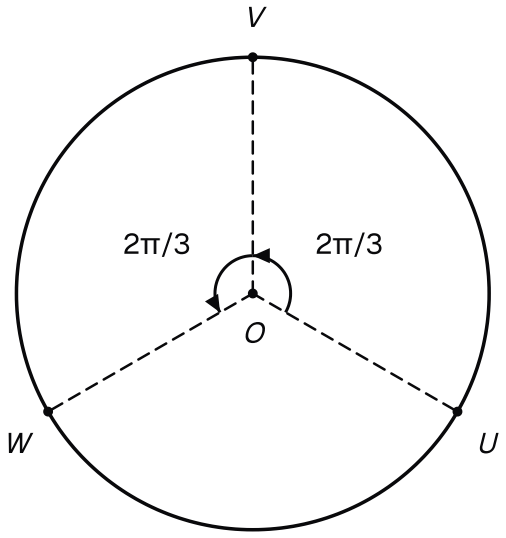
Trois points régulièrement répartis sur un cercle

Les points U, V et W sont sur le cercle de centre O et de rayon 3 cm, avec :

$$(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi],$$

$$(\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OW}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



Les trois points U, V, W du cercle de centre O et de rayon 3 cm, séparés deux à deux par un angle orienté de 2π/3.

1.

Justifier que $R(U) = V$ et $R(V) = W$, puis que $R(W) = U$.

INDICE

Outil : la définition ; pour le dernier point, calcule $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OW})$ par la relation de Chasles, puis utilise l'angle opposé.

2.

En déduire que le triangle UVW est équilatéral.

INDICE

Outil : applique la conservation des distances au segment $[UV]$, puis au segment $[VW]$.

3.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{VW})$, puis l'angle aigu formé par les droites (UV) et (VW).

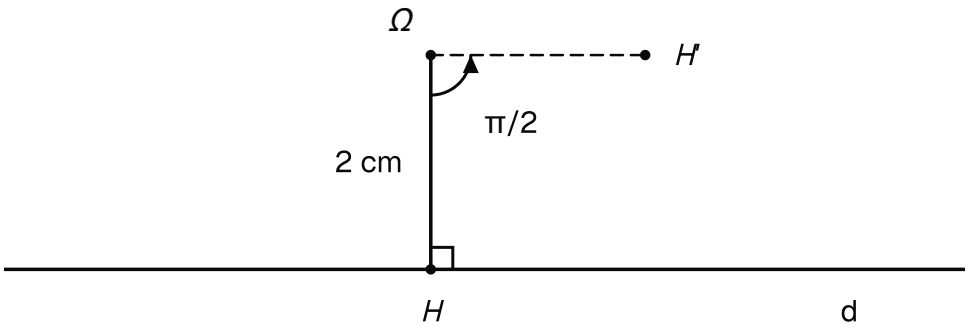
INDICE

Outil : l'angle d'un vecteur et de son image ; deux droites sécantes forment deux angles supplémentaires. L'angle aigu de deux droites sécantes est le plus petit des deux angles qu'elles forment (leur somme est π).

Exercice 3

Une droite, son image et leur point commun

On donne une droite d et un point Ω qui n'est pas sur d. Le point H de d est tel que (ΩH) soit perpendiculaire à d, et $\Omega H = 2$ cm. On note R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $H' = R(H)$, et d' l'image de d par R.



Les données : la droite d, le point Ω à 2 cm d'elle, le pied H de la perpendiculaire, et H', image de H par le quart de tour direct de centre Ω.

1.

Justifier que d' passe par H' et que les droites d et d' sont perpendiculaires.

INDICE

Outil : choisis deux points H et A de la droite d ; l'image de d est la droite qui joint leurs images.

2.

Justifier que d' est perpendiculaire à la droite $(\Omega H')$.

INDICE

Début : les droites (ΩH) et d sont perpendiculaires, donc $(\overrightarrow{\Omega H}, \overrightarrow{HA})$ mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ à 2π près. **Ensuite :** la rotation envoie Ω, H, A sur Ω, H', A' ; la conservation des angles orientés garde cette mesure.

3.

Les droites d et d' se coupent en un point P. Quelle est la nature du quadrilatère $\Omega H P H'$? En déduire la distance ΩP.

INDICE

Outil : compte les angles droits du quadrilatère, puis compare deux côtés consécutifs.

Exercice 4

Deux triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle

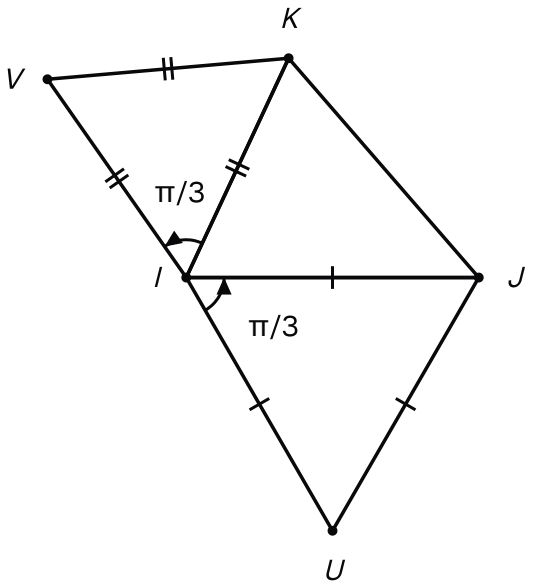
IJK est un triangle direct : I, J, K se suivent dans le sens direct, et $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$ a une mesure principale dans $]0, \pi[$.

On construit, à l'extérieur de ce triangle, deux triangles équilatéraux IUJ et IKV tels que :

$$(\overrightarrow{IU}, \overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

$$(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IV}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

On note R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Le triangle direct IJK et les deux triangles équilatéraux IUJ et IKV, bâtis à l'extérieur sur les côtés [IJ] et [IK].

1.

Justifier que $R(U) = J$ et que $R(K) = V$.

INDICE

Outil : dans un triangle équilatéral, les côtés issus de I ont la même longueur ; l'angle est donné dans l'énoncé.

2.

En déduire que $UK = JV$.

INDICE

Outil : quel segment a pour extrémités les images de U et de K ?

3.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{UK}, \overrightarrow{JV})$. Les droites (UK) et (JV) sont-elles perpendiculaires ?

INDICE

Outil : l'angle d'un vecteur et de son image ; les points U et K sont distincts, car ils sont de part et d'autre de la droite (IJ) : le triangle IJK est direct, et IUJ est construit à l'extérieur.

Exercice 5

Trois points alignés qui tournent

Les points E, F et G vérifient $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$, avec $EG = 6$ cm. On note R une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$, et E', F', G' les images de E, F, G par R.

1.

Écrire F comme barycentre des points E et G, avec des poids entiers.

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{EF} = t\,\overrightarrow{EG}$, alors $F = \mathrm{Bar}\{(E, 1-t); (G, t)\}$; puis l'homogénéité.

2.

En déduire que les points E', F' et G' sont alignés, puis calculer $E'F'$ et $F'G'$.

INDICE

Outil : la conservation du barycentre, puis la conservation des distances.

3.

On suppose maintenant que le centre de R est le point E. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EF'})$, puis justifier que F' appartient au segment $[EG']$.

INDICE

Outil : le centre est invariant ; utilise la définition, puis l'image d'un segment.

Exercice 6

Retrouver le centre d'une rotation

R est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$, dont on ne connaît pas le centre. On sait que $R(S) = S$ et $R(T) = U$, où S et T sont deux points tels que $ST = 6$ cm.

1.

Justifier que S est le centre de R.

INDICE

Outil : la propriété du point invariant d'une rotation ; l'angle $-\frac{\pi}{3}$ est-il un multiple de 2π ?

2.

En déduire la nature du triangle STU et la longueur TU.

INDICE

Outil : la définition de R donne SU et l'angle en S ; un triangle isocèle d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral.

3.

Par quelle rotation de centre S le point U a-t-il pour image T ?

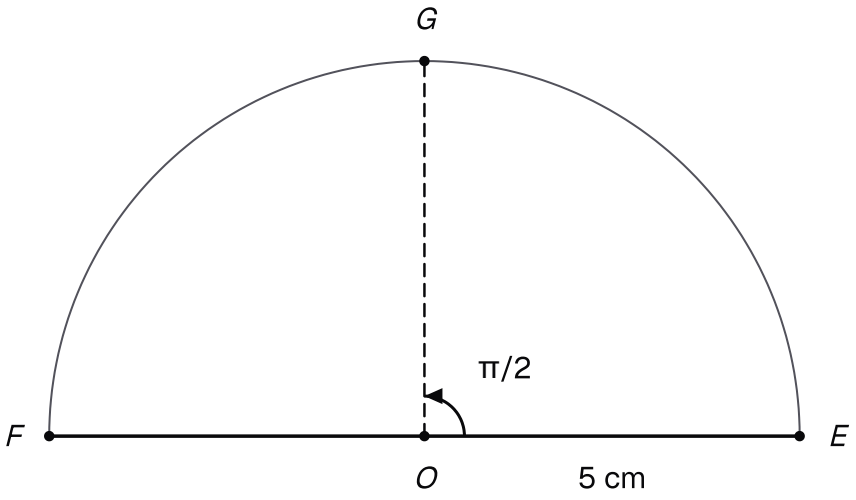
INDICE

Outil : la rotation réciproque de R.

Exercice 7

Un point au sommet d'un demi-cercle

On considère un demi-cercle de diamètre $[EF]$, de centre O et de rayon 5 cm. Le point G est sur ce demi-cercle, avec $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.



Le demi-cercle de diamètre [EF] et de rayon 5 cm, avec G au sommet : de OE vers OG, on tourne d'un quart de tour direct.

1.

Justifier que $R(E) = G$, puis que $R(G) = F$.

INDICE

Outil : O est le milieu de $[EF]$, donc $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \equiv \pi\ [2\pi]$; utilise la relation de Chasles.

2.

En déduire que $GF = EG$ et que les droites (EG) et (GF) sont perpendiculaires.

INDICE

Outil : la rotation R envoie E sur G et G sur F : applique-la au segment $[EG]$.

3.

Calculer la longueur EG.

INDICE

Outil : le triangle EGF est rectangle isocèle en G, et $EF = 10$ cm ; utilise le théorème de Pythagore.