BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

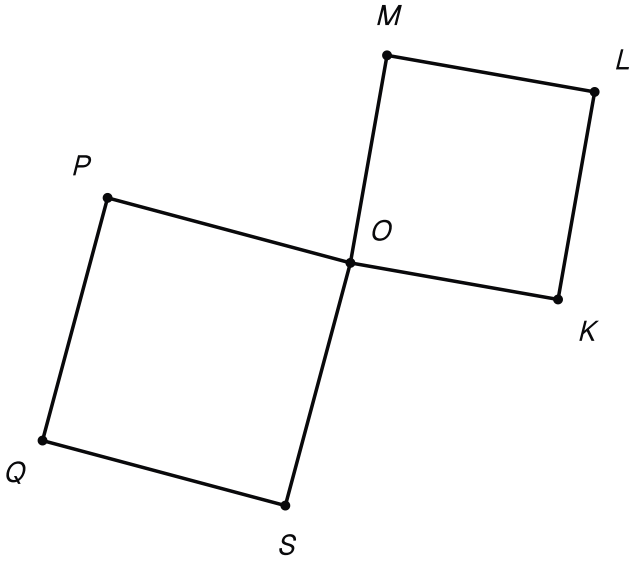
Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Deux carrés qui partagent un sommet

$OKLM$ et $OPQS$ sont deux carrés directs de même sommet O : dans chacun, les sommets se suivent dans le sens direct. On suppose $K \neq P$. On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Deux carrés directs, OKLM à droite et OPQS à gauche, accrochés au même sommet O.

1.

Justifier que $R(K) = M$ et que $R(P) = S$.

INDICE

Outil : dans un carré direct $OKLM$, les côtés $[OK]$ et $[OM]$ ont la même longueur et $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

CORRIGÉ

Premier carré. Les côtés $[OK]$ et $[OM]$ du carré $OKLM$ ont la même longueur : $OM = OK$. Ce carré est direct, donc $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après la définition d'une rotation, $R(K) = M$.

Second carré. Pour le carré direct $OPQS$, on a de la même façon $OS = OP$ et $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OS}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, d'où $R(P) = S$.

Conclusion. $R(K) = M$ et $R(P) = S$.

2.

En déduire que $KP = MS$.

INDICE

Début : quels sont les deux points qui ont pour images M et S ? **Ensuite :** la conservation des distances.

CORRIGÉ

D'après la question 1, R envoie K sur M et P sur S : le segment $[MS]$ est l'image du segment $[KP]$.

Conclusion. D'après la conservation des distances, $MS = KP$.

3.

Justifier que les droites (KP) et (MS) sont perpendiculaires.

INDICE

Début : quel angle relie le vecteur $\overrightarrow{KP}$ au vecteur qui joint les images de K et de P ? **Ensuite :** l'angle d'un vecteur et de son image, pour la rotation R.

CORRIGÉ

Les points K et P sont distincts, et R les envoie sur M et S. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{MS}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

Conclusion. Les droites (KP) et (MS) sont perpendiculaires.

Exercice 2

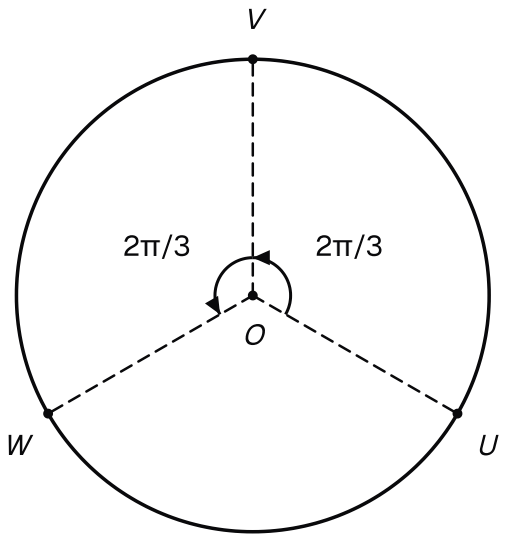
Trois points régulièrement répartis sur un cercle

Les points U, V et W sont sur le cercle de centre O et de rayon 3 cm, avec :

$$(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi],$$

$$(\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OW}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



Les trois points U, V, W du cercle de centre O et de rayon 3 cm, séparés deux à deux par un angle orienté de 2π/3.

1.

Justifier que $R(U) = V$ et $R(V) = W$, puis que $R(W) = U$.

INDICE

Outil : la définition ; pour le dernier point, calcule $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OW})$ par la relation de Chasles, puis utilise l'angle opposé.

CORRIGÉ

Image de U. $OV = OU = 3$ cm et $(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. D'après la définition d'une rotation, $R(U) = V$.

Image de V. De même, $OW = OV = 3$ cm et $(\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OW}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $R(V) = W$.

Image de W. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OW}) &\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \\ &\equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Par l'angle opposé :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OW}, \overrightarrow{OU}) &\equiv -\frac{4\pi}{3} \\ &\equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme de plus $OU = OW$, la définition donne $R(W) = U$.

Conclusion. $R(U) = V$, $R(V) = W$ et $R(W) = U$.

2.

En déduire que le triangle UVW est équilatéral.

INDICE

Outil : applique la conservation des distances au segment $[UV]$, puis au segment $[VW]$.

CORRIGÉ

Côté $[VW]$. R envoie U sur V et V sur W. D'après la conservation des distances, $VW = UV$.

Côté $[WU]$. R envoie V sur W et W sur U. Pour la même raison, $WU = VW$.

Conclusion. On obtient $UV = VW = WU$: le triangle UVW est équilatéral.

3.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{VW})$, puis l'angle aigu formé par les droites (UV) et (VW).

INDICE

Outil : l'angle d'un vecteur et de son image ; deux droites sécantes forment deux angles supplémentaires. L'angle aigu de deux droites sécantes est le plus petit des deux angles qu'elles forment (leur somme est π).

CORRIGÉ

Angle orienté. R envoie U sur V et V sur W, avec $U \neq V$. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{VW}) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

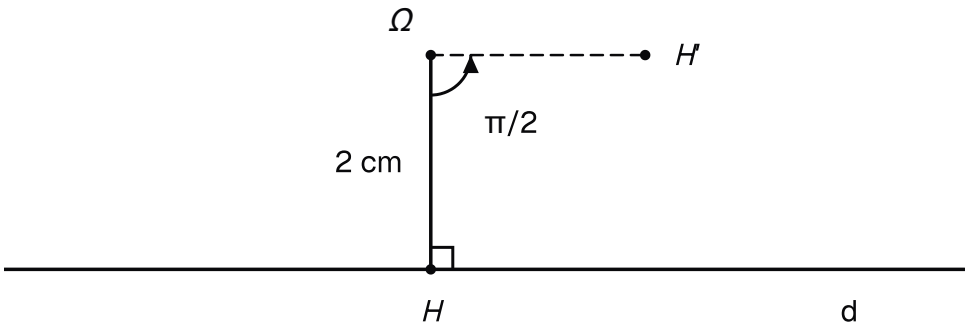
Angle des droites. Les droites (UV) et (VW) forment deux angles supplémentaires : l'un mesure $\frac{2\pi}{3}$, l'autre $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Conclusion. Une mesure de $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{VW})$ est $\frac{2\pi}{3}$, et l'angle aigu des droites (UV) et (VW) mesure $\frac{\pi}{3}$, comme l'angle en V du triangle équilatéral UVW.

Exercice 3

Une droite, son image et leur point commun

On donne une droite d et un point Ω qui n'est pas sur d. Le point H de d est tel que (ΩH) soit perpendiculaire à d, et $\Omega H = 2$ cm. On note R la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, $H' = R(H)$, et d' l'image de d par R.



Les données : la droite d, le point Ω à 2 cm d'elle, le pied H de la perpendiculaire, et H', image de H par le quart de tour direct de centre Ω.

1.

Justifier que d' passe par H' et que les droites d et d' sont perpendiculaires.

INDICE

Outil : choisis deux points H et A de la droite d ; l'image de d est la droite qui joint leurs images.

CORRIGÉ

Droite image. Soit A un point de d distinct de H, et $A' = R(A)$. D'après l'image d'une droite, d' est la droite $(H'A')$: elle passe par H'.

Orthogonalité. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{H'A'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. La droite d' passe par H', et les droites d et d' sont perpendiculaires.

2.

Justifier que d' est perpendiculaire à la droite $(\Omega H')$.

INDICE

Début : les droites (ΩH) et d sont perpendiculaires, donc $(\overrightarrow{\Omega H}, \overrightarrow{HA})$ mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ à 2π près. **Ensuite :** la rotation envoie Ω, H, A sur Ω, H', A' ; la conservation des angles orientés garde cette mesure.

CORRIGÉ

Angle de départ. On garde les points A et A' de la question 1. La droite (ΩH) est perpendiculaire à $d = (HA)$, donc l'angle $(\overrightarrow{\Omega H}, \overrightarrow{HA})$ mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ à 2π près.

Transport par R. On a $R(\Omega) = \Omega$, $R(H) = H'$ et $R(A) = A'$. D'après la conservation des angles orientés :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{\Omega H'}, \overrightarrow{H'A'})\\ &\equiv (\overrightarrow{\Omega H}, \overrightarrow{HA})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Cet angle mesure donc lui aussi $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ à 2π près.

Conclusion. La droite $d' = (H'A')$ est perpendiculaire à la droite $(\Omega H')$.

3.

Les droites d et d' se coupent en un point P. Quelle est la nature du quadrilatère $\Omega HPH'$? En déduire la distance ΩP.

INDICE

Outil : compte les angles droits du quadrilatère, puis compare deux côtés consécutifs.

CORRIGÉ

Angles droits. Le quadrilatère $\Omega HPH'$ a un angle droit :

- en H, car d est perpendiculaire à (ΩH) ;
- en H', d'après la question 2 ;
- en Ω, car $(\overrightarrow{\Omega H}, \overrightarrow{\Omega H'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle.

Carré. Deux côtés consécutifs de ce rectangle sont égaux, car $\Omega H' = \Omega H = 2$ cm. C'est donc un carré de côté 2 cm.

Distance. $[\Omega P]$ est une diagonale de ce carré. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ΩHP, rectangle en H :

$$\Omega P^2 = 2^2 + 2^2 = 8.$$

Ainsi $\Omega P = \sqrt{8}$, soit $\Omega P = 2\sqrt{2}$ cm.

Conclusion. $\Omega HPH'$ est un carré, et $\Omega P = 2\sqrt{2}$ cm.

Exercice 4

Deux triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle

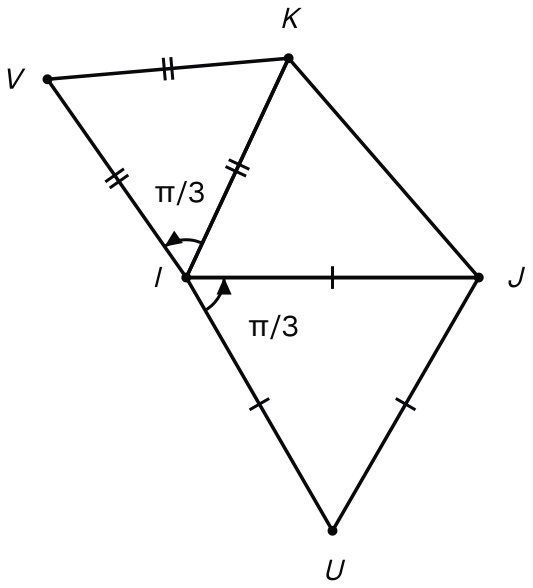
IJK est un triangle direct : I, J, K se suivent dans le sens direct, et $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$ a une mesure principale dans $]0, \pi[$.

On construit, à l'extérieur de ce triangle, deux triangles équilatéraux IUJ et IKV tels que :

$$(\overrightarrow{IU}, \overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

$$(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IV}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

On note R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Le triangle direct IJK et les deux triangles équilatéraux IUJ et IKV, bâtis à l'extérieur sur les côtés [IJ] et [IK].

1.

Justifier que $R(U) = J$ et que $R(K) = V$.

INDICE

Outil : dans un triangle équilatéral, les côtés issus de I ont la même longueur ; l'angle est donné dans l'énoncé.

CORRIGÉ

Image de U. Le triangle IUJ est équilatéral, donc $IJ = IU$. De plus, $(\overrightarrow{IU}, \overrightarrow{IJ}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. D'après la définition d'une rotation, $R(U) = J$.

Image de K. Le triangle IKV est équilatéral, donc $IV = IK$, et $(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IV}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Ainsi $R(K) = V$.

Conclusion. $R(U) = J$ et $R(K) = V$.

2.

En déduire que $UK = JV$.

INDICE

Outil : quel segment a pour extrémités les images de U et de K ?

CORRIGÉ

D'après la question 1, R envoie U sur J et K sur V : le segment $[JV]$ est l'image du segment $[UK]$.

Conclusion. D'après la conservation des distances, $JV = UK$.

3.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{UK}, \overrightarrow{JV})$. Les droites (UK) et (JV) sont-elles perpendiculaires ?

INDICE

Outil : l'angle d'un vecteur et de son image ; les points U et K sont distincts, car ils sont de part et d'autre de la droite (IJ) : le triangle IJK est direct, et IUJ est construit à l'extérieur.

CORRIGÉ

Points distincts. Le triangle IJK est direct et IUJ est construit à l'extérieur : U et K sont de part et d'autre de la droite (IJ). Ils sont donc distincts.

Angle. R envoie U sur J et K sur V. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{UK}, \overrightarrow{JV}) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

Orthogonalité. À 2π près, $\frac{\pi}{3}$ n'est égal ni à $\frac{\pi}{2}$ ni à $-\frac{\pi}{2}$.

Conclusion. Une mesure de $(\overrightarrow{UK}, \overrightarrow{JV})$ est $\frac{\pi}{3}$. Les droites (UK) et (JV) ne sont pas perpendiculaires : elles forment un angle de $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 5

Trois points alignés qui tournent

Les points E, F et G vérifient $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$, avec $EG = 6$ cm. On note R une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$, et E', F', G' les images de E, F, G par R.

1.

Écrire F comme barycentre des points E et G, avec des poids entiers.

INDICE

Outil : si $\overrightarrow{EF} = t\,\overrightarrow{EG}$, alors $F = \mathrm{Bar}\{(E, 1-t);(G, t)\}$; puis l'homogénéité.

CORRIGÉ

Écriture avec $t = \frac{1}{3}$. On a $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$, donc :

$$F = \mathrm{Bar}\left\{\left(E, \frac{2}{3}\right);\left(G, \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Poids entiers. D'après l'homogénéité du barycentre, on peut multiplier les deux poids par 3.

Conclusion. $F = \mathrm{Bar}\{(E, 2);(G, 1)\}$.

2.

En déduire que les points E', F' et G' sont alignés, puis calculer $E'F'$ et $F'G'$.

INDICE

Outil : la conservation du barycentre, puis la conservation des distances.

CORRIGÉ

Alignement. D'après la question 1 et la conservation du barycentre, $F' = \mathrm{Bar}\{(E', 2);(G', 1)\}$. Un barycentre de deux points est sur la droite qui les joint : F' est sur la droite $(E'G')$.

Longueurs avant la rotation. $EF = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm. Le point F est sur le segment $[EG]$, donc $FG = 6 - 2 = 4$ cm.

Longueurs des images. D'après la conservation des distances, $E'F' = 2$ cm et $F'G' = 4$ cm.

Conclusion. Les points E', F' et G' sont alignés, avec $E'F' = 2$ cm et $F'G' = 4$ cm.

3.

On suppose maintenant que le centre de R est le point E. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EF'})$, puis justifier que F' appartient au segment $[EG']$.

INDICE

Outil : le centre est invariant ; utilise la définition, puis l'image d'un segment.

CORRIGÉ

Angle. Le centre E est invariant : $E' = E$. Le point F est distinct de E, car $EF = 2$ cm. La définition de R appliquée à F donne :

$$(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EF'}) \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi].$$

Segment. Comme $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$ avec $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1$, le point F appartient au segment $[EG]$. D'après l'image d'un segment, R envoie $[EG]$ sur $[E'G']$, c'est-à-dire sur $[EG']$.

Conclusion. Une mesure de $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EF'})$ est $\frac{\pi}{6}$, et F' appartient au segment $[EG']$.

Exercice 6

Retrouver le centre d'une rotation

R est une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$, dont on ne connaît pas le centre. On sait que $R(S) = S$ et $R(T) = U$, où S et T sont deux points tels que $ST = 6$ cm.

1.

Justifier que S est le centre de R.

INDICE

Outil : la propriété du point invariant d'une rotation ; l'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est-il un multiple de 2π ?

CORRIGÉ

Angle de R. La mesure $-\dfrac{\pi}{3}$ n'est pas un multiple de 2π.

Point invariant. D'après la propriété du point invariant, le centre de R est alors son seul point invariant. Or $R(S) = S$.

Conclusion. Le centre de R est le point S.

2.

En déduire la nature du triangle STU et la longueur TU.

INDICE

Outil : la définition de R donne SU et l'angle en S ; un triangle isocèle d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$ est équilatéral.

CORRIGÉ

Définition de R. D'après la question 1, R a pour centre S. Comme $R(T) = U$, on a $SU = ST = 6$ cm et $(\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{SU}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Angles du triangle. Le triangle STU est isocèle en S, et son angle géométrique en S mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Ses deux autres angles sont égaux et mesurent chacun :

$$\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Conclusion. Le triangle STU est équilatéral, et $TU = 6$ cm.

3.

Par quelle rotation de centre S le point U a-t-il pour image T ?

INDICE

Outil : la rotation réciproque de R.

CORRIGÉ

Rotation réciproque. Notons R' la rotation de centre S et d'angle $\frac{\pi}{3}$. D'après la rotation réciproque, $R(T) = U$ équivaut à $T = R'(U)$.

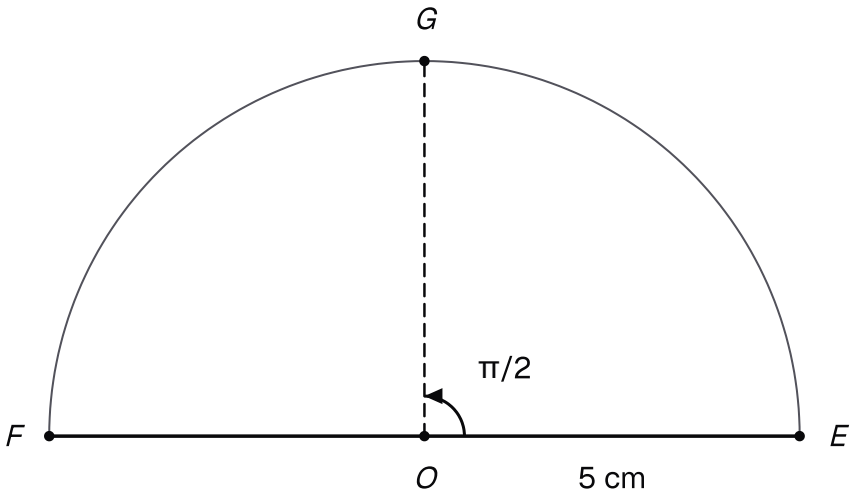
Vérification. On a $ST = SU$, et par l'angle opposé, $(\overrightarrow{SU}, \overrightarrow{ST}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: ce sont bien les deux conditions de la définition de R' pour le point U.

Conclusion. La rotation de centre S et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie U sur T.

Exercice 7

Un point au sommet d'un demi-cercle

On considère un demi-cercle de diamètre $[EF]$, de centre O et de rayon 5 cm. Le point G est sur ce demi-cercle, avec $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.



Le demi-cercle de diamètre [EF] et de rayon 5 cm, avec G au sommet : de OE vers OG, on tourne d'un quart de tour direct.

1.

Justifier que $R(E) = G$, puis que $R(G) = F$.

INDICE

Outil : O est le milieu de $[EF]$, donc $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \equiv \pi\ [2\pi]$; utilise la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Image de E. Les points E et G sont sur le cercle de centre O et de rayon 5 cm, donc $OG = OE = 5$ cm. Par hypothèse, $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OG}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après la définition d'une rotation, $R(E) = G$.

Image de G. On a $OF = OG = 5$ cm. Le point O est le milieu de $[EF]$, donc $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \equiv \pi\ [2\pi]$. D'après la relation de Chasles et l'angle opposé :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OF}) &\equiv (\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OE}) \\ &\quad + (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) \\ &\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

La définition donne alors $R(G) = F$.

Conclusion. $R(E) = G$ et $R(G) = F$.

2.

En déduire que $GF = EG$ et que les droites (EG) et (GF) sont perpendiculaires.

INDICE

Outil : la rotation R envoie E sur G et G sur F : applique-la au segment $[EG]$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, R envoie E sur G et G sur F : le segment $[GF]$ est l'image de $[EG]$.

Longueur. D'après la conservation des distances, $GF = EG$.

Orthogonalité. Les points E et G sont distincts. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{GF}) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi].$$

Conclusion. $GF = EG$, et les droites (EG) et (GF) sont perpendiculaires.

3.

Calculer la longueur EG.

INDICE

Outil : le triangle EGF est rectangle isocèle en G, et $EF = 10$ cm ; utilise le théorème de Pythagore.

CORRIGÉ

Le triangle EGF. D'après la question 2, il est rectangle en G, avec $EG = GF$. Son hypoténuse $[EF]$ est un diamètre : $EF = 2 \times 5 = 10$ cm.

Calcul. D'après le théorème de Pythagore, $EG^2 + GF^2 = EF^2$. Comme $GF = EG$:

$$\begin{aligned} 2\,EG^2 &= 100 \\ EG^2 &= 50. \end{aligned}$$

Une longueur est positive, donc $EG = \sqrt{50}$, soit $EG = 5\sqrt{2}$ cm.

Conclusion. La longueur EG vaut $5\sqrt{2}$ cm.