BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Application	8

Exercice 1

Construire l'image d'un point et mesurer le déplacement

On donne deux points O et M tels que $OM = 5$ cm. On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et $M' = R(M)$.

Fais la figure sur ton cahier.

1.

Décrire la construction du point M'. Dans quel sens tourne-t-on ?

INDICE

Outil : la définition d'une rotation donne une distance et un angle orienté.

2.

Quelle est la nature du triangle OMM' ? Donner la mesure de son angle en O.

INDICE

Outil : compare OM et OM' ; la mesure $\frac{2\pi}{3}$ est comprise entre 0 et π.

3.

Calculer la longueur MM'.

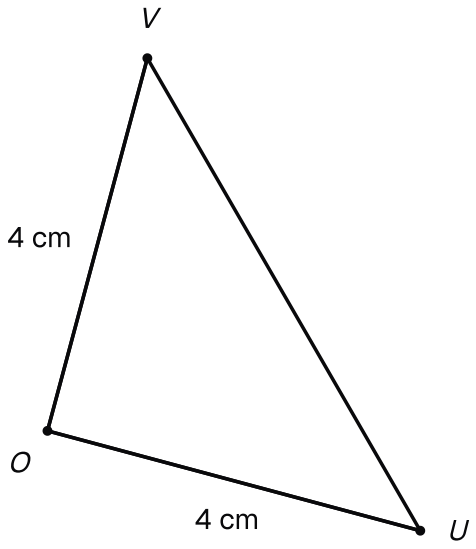
INDICE

Outil : soit H le milieu de $[MM']$. Dans le triangle isocèle OMM', la droite (OH) est hauteur et bissectrice. Utilise le sinus de $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Prouver qu'un point est l'image d'un autre

On donne trois points O, U et V tels que $OU = OV = 4$ cm et $UV = 4\sqrt{2}$ cm. Le triangle OUV est direct : de $\overrightarrow{OU}$ vers $\overrightarrow{OV}$, on tourne dans le sens direct. On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Le triangle direct OUV de l'énoncé, avec OU = OV = 4 cm ; la nature de l'angle en O reste à justifier.

1.

Justifier que le triangle OUV est rectangle en O.

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Pythagore ; compare $OU^2 + OV^2$ et UV^2.

2.

En déduire que $V = R(U)$.

INDICE

Outil : vérifie les deux conditions de la définition d'une rotation : la distance, puis l'angle orienté de $\overrightarrow{OU}$ vers $\overrightarrow{OV}$.

3.

Le point U est-il l'image de V par R ? Sinon, donner la rotation de centre O qui envoie V sur U.

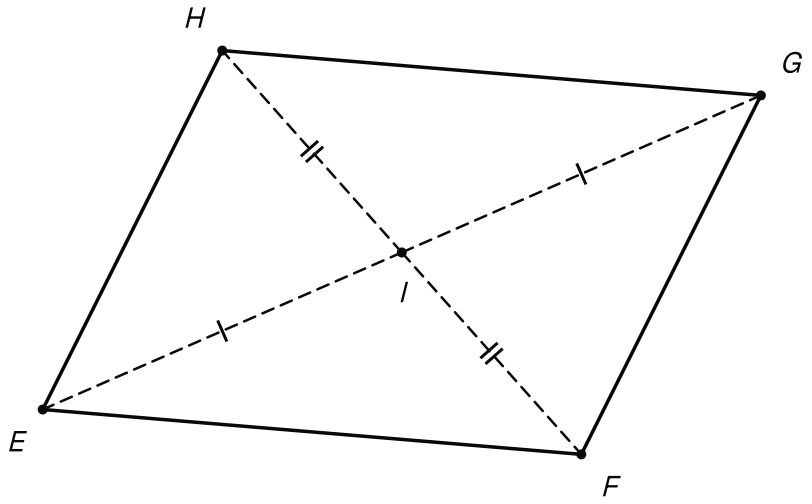
INDICE

Outil : l'angle se lit du point vers son image : calcule $(\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OU})$ par l'angle opposé.

Exercice 3

Un demi-tour autour du centre d'un parallélogramme

$EFGH$ est un parallélogramme de centre I : le point I est le milieu de ses diagonales $[EG]$ et $[FH]$. On note R la rotation de centre I et d'angle π.



Le parallélogramme EFGH et son centre I, milieu commun des deux diagonales.

1.

Déterminer les images des points E, F, G et H par R.

INDICE

Début : quel point est le milieu de chaque diagonale du parallélogramme ? **Ensuite :** la rotation d'angle π envoie M sur le point M' tel que le centre soit le milieu de $[MM']$.

2.

En déduire l'image du segment $[EF]$ et celle de la droite (EH).

INDICE

Début : quelles sont les images de E, de F et de H ? **Ensuite :** un segment a pour image le segment dont les extrémités sont les images des siennes ; il en va de même pour une droite.

3.

Justifier que $GH = EF$ et que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

INDICE

Début : les points G et H sont les images de quels points ? Que conserve une rotation ? **Ensuite :** la conservation des distances, puis l'angle d'un vecteur et de son image.

Exercice 4

Revenir au point de départ

On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Le point N est distinct de O.

1.

Quel point M a pour image N par R ? Décrire sa construction.

INDICE

Début : quelle rotation défait la rotation R ? **Ensuite :** la rotation réciproque de R a le même centre et l'angle opposé.

2.

Justifier que $OM = ON$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$.

INDICE

Début : par quelle rotation M est-il l'image de N ? **Ensuite :** la définition de cette rotation R', appliquée au point N.

3.

Existe-t-il un point P distinct de O tel que $R(P) = P$?

INDICE

Début : la mesure $\frac{\pi}{6}$ est-elle un multiple de 2π ? **Ensuite :** la propriété du point invariant d'une rotation.

Exercice 5

Un triangle qui tourne sans se déformer

IJK est un triangle tel que $IJ = 6$ cm, $JK = 8$ cm et $IK = 10$ cm. On note R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{3\pi}{4}$, et I', J', K' les images de I, J, K par R.

1.

Calculer les longueurs $I'J'$, $J'K'$ et $I'K'$.

INDICE

Début : quelle propriété de la rotation compare une longueur à celle de son image ? **Ensuite :** la conservation des distances.

2.

Quelle est la nature du triangle $I'J'K'$?

INDICE

Début : quel est le plus long côté du triangle $I'J'K'$? **Ensuite :** compare $I'J'^2 + J'K'^2$ et $I'K'^2$, puis utilise la réciproque du théorème de Pythagore.

3.

Calculer le périmètre et l'aire du triangle $I'J'K'$.

INDICE

Début : quels côtés du triangle $I'J'K'$ forment l'angle droit ? **Ensuite :** dans un triangle rectangle, l'aire est le demi-produit des deux côtés de l'angle droit.

Exercice 6

L'angle entre un vecteur et son image

On note R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{7\pi}{6}$. Les points A et B sont distincts, et $A' = R(A)$, $B' = R(B)$.

1.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, puis sa mesure principale.

INDICE

Outil : l'angle d'un vecteur et de son image ; la mesure principale est dans $]-\pi, \pi]$.

2.

En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})$.

INDICE

Outil : l'angle opposé.

3.

Les droites (AB) et $(A'B')$ sont-elles parallèles ? perpendiculaires ?

INDICE

Outil : deux droites sont parallèles si l'angle de leurs vecteurs vaut 0 ou π, perpendiculaires s'il vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, à 2π près.

4.

Même question si l'angle de la rotation est $\frac{3\pi}{2}$.

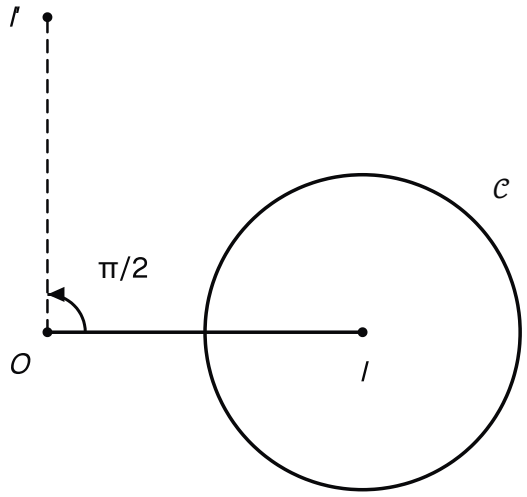
INDICE

Outil : cherche la mesure principale de $\frac{3\pi}{2}$.

Exercice 7

L'image d'un petit cercle par un quart de tour

On donne deux points O et I tels que $OI = 3$ cm, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon $1{,}5$ cm. On note R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et $I' = R(I)$.



Les données : O et I à 3 cm l'un de l'autre, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 1,5 cm, et I', image de I par le quart de tour direct de centre O.

1.

Déterminer l'image $\mathcal{C}'$ du cercle $\mathcal{C}$ par R, puis l'image du segment $[OI]$.

INDICE

Outil : l'image d'un cercle a pour centre l'image du centre et garde le même rayon ; le point O est invariant.

2.

Calculer la distance II'.

INDICE

Outil : le triangle OII' a deux côtés égaux et un angle droit en O ; utilise le théorème de Pythagore.

3.

Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont-ils un point commun ?

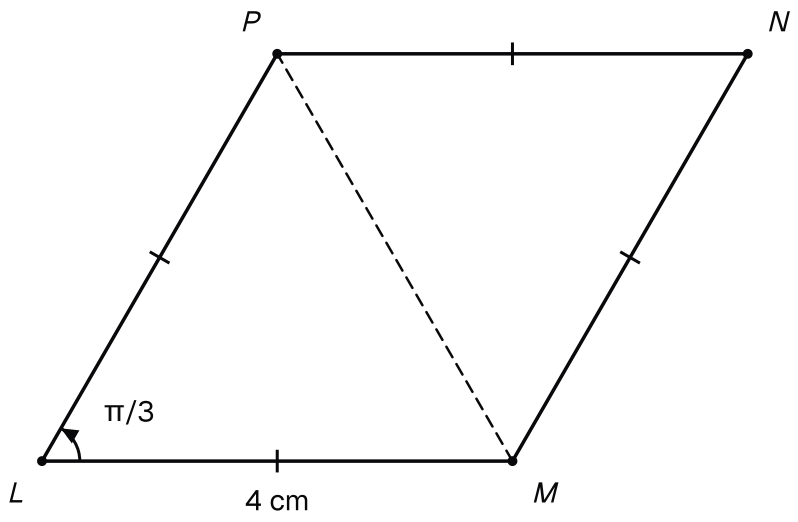
INDICE

Outil : compare II' et $1{,}5 + 1{,}5$.

Exercice 8

Un losange formé de deux triangles équilatéraux

$LMNP$ est un losange de côté 4 cm tel que $(\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LP}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: autour de L, on tourne de M vers P dans le sens direct. On note R la rotation de centre L et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Le losange LMNP de côté 4 cm : de LM vers LP, on tourne de π/3 dans le sens direct ; la diagonale [MP] est en pointillés.

1.

Justifier que $P = R(M)$.

INDICE

Début : quelles sont les deux conditions de la définition d'une rotation ? **Ensuite :** la distance vient des côtés du losange, l'angle orienté vient de l'énoncé.

2.

En déduire la nature du triangle LMP et la longueur MP.

INDICE

Début : que sais-tu des longueurs LM et LP, et de l'angle en L ? **Ensuite :** un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure $\frac{\pi}{3}$ a trois angles de même mesure.

3.

Déterminer l'image du segment $[LM]$ par R, ainsi que sa longueur.

INDICE

Début : quelles sont les images de L et de M par R ? **Ensuite :** le centre L est invariant ; l'image d'un segment joint les images de ses extrémités.