BURHAN

La rotation dans le plan : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/rotation-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
La rotation dans le plan	Application	8

Exercice 1

Construire l'image d'un point et mesurer le déplacement

On donne deux points O et M tels que $OM = 5$ cm. On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et $M' = R(M)$.

Fais la figure sur ton cahier.

1.

Décrire la construction du point M'. Dans quel sens tourne-t-on ?

INDICE

Outil : la définition d'une rotation donne une distance et un angle orienté.

CORRIGÉ

Construction. On trace le cercle de centre O et de rayon 5 cm. À partir de la demi-droite $[OM)$, on reporte un angle de $\frac{2\pi}{3}$. Le point M' est le point d'intersection du second côté de cet angle avec le cercle.

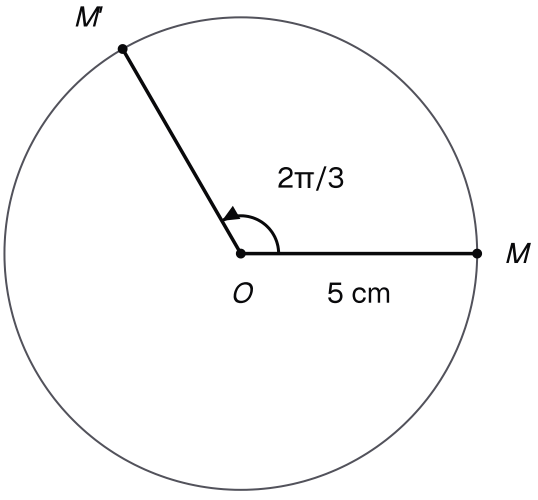
Sens. La mesure $\frac{2\pi}{3}$ est positive : on tourne dans le sens direct.

Vérification. Le point construit satisfait les deux conditions de la définition :

$$OM' = OM = 5 \text{ cm},$$

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi].$$

Conclusion. M' est sur le cercle de centre O et de rayon 5 cm, sur le second côté de l'angle de $\frac{2\pi}{3}$ reporté depuis $[OM)$, en tournant dans le sens direct.



La construction terminée : sur le cercle de centre O et de rayon 5 cm, M' est atteint depuis M en tournant de 2π/3 dans le sens direct.

2.

Quelle est la nature du triangle OMM' ? Donner la mesure de son angle en O.

INDICE

Outil : compare OM et OM' ; la mesure $\frac{2\pi}{3}$ est comprise entre 0 et π.

CORRIGÉ

Longueurs. Par définition de R, $OM' = OM$: le triangle OMM' est isocèle en O.

Angle. La mesure $\frac{2\pi}{3}$ de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est comprise entre 0 et π : c'est aussi la mesure de l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$.

Conclusion. Le triangle OMM' est isocèle en O, et son angle en O mesure $\frac{2\pi}{3}$.

3.

Calculer la longueur MM'.

INDICE

Outil : soit H le milieu de $[MM']$. Dans le triangle isocèle OMM', la droite (OH) est hauteur et bissectrice. Utilise le sinus de $\frac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Hauteur. Soit H le milieu de $[MM']$. Dans le triangle OMM', isocèle en O, la droite (OH) est à la fois médiane, hauteur et bissectrice. Donc (OH) est perpendiculaire à (MM'), et l'angle $\widehat{MOH}$ mesure la moitié de $\frac{2\pi}{3}$, soit $\frac{\pi}{3}$.

Calcul de MH. Dans le triangle OHM, rectangle en H, le sinus de l'angle en O donne $MH = OM \times \sin\frac{\pi}{3} = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

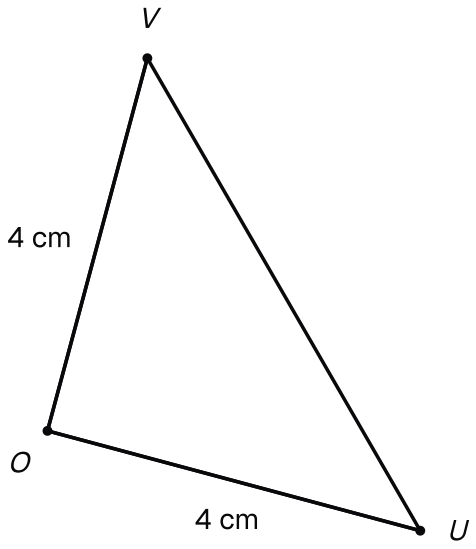
Calcul de MM'. Le point H est le milieu de $[MM']$, donc $MM' = 2 \times MH = 5\sqrt{3}$ cm.

Conclusion. La longueur MM' vaut $5\sqrt{3}$ cm.

Exercice 2

Prouver qu'un point est l'image d'un autre

On donne trois points O, U et V tels que $OU = OV = 4$ cm et $UV = 4\sqrt{2}$ cm. Le triangle OUV est direct : de $\overrightarrow{OU}$ vers $\overrightarrow{OV}$, on tourne dans le sens direct. On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Le triangle direct OUV de l'énoncé, avec OU = OV = 4 cm ; la nature de l'angle en O reste à justifier.

1.

Justifier que le triangle OUV est rectangle en O.

INDICE

Outil : la réciproque du théorème de Pythagore ; compare $OU^2 + OV^2$ et UV^2.

CORRIGÉ

On compare la somme des carrés des deux petits côtés au carré du plus grand :

$$OU^2 + OV^2 = 16 + 16 = 32,$$

$$UV^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32.$$

Ainsi $OU^2 + OV^2 = UV^2$.

Conclusion. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OUV est rectangle en O.

2.

En déduire que $V = R(U)$.

INDICE

Outil : vérifie les deux conditions de la définition d'une rotation : la distance, puis l'angle orienté de $\overrightarrow{OU}$ vers $\overrightarrow{OV}$.

CORRIGÉ

On vérifie les deux conditions de la définition d'une rotation pour le point U et le point V.

Distance. $OV = OU = 4$ cm.

Angle. D'après la question 1, l'angle en O est droit. Le triangle OUV est direct, donc :

$$(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi].$$

Conclusion. Les deux conditions sont réunies : $V = R(U)$.

3.

Le point U est-il l'image de V par R ? Sinon, donner la rotation de centre O qui envoie V sur U.

INDICE

Outil : l'angle se lit du point vers son image : calcule $(\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OU})$ par l'angle opposé.

CORRIGÉ

Angle de V vers U. D'après l'angle opposé :

$$(\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OU}) \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi].$$

Réponse à la première demande. La différence $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ n'est pas un multiple de 2π, donc $-\frac{\pi}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$. Le point U n'est pas l'image de V par R.

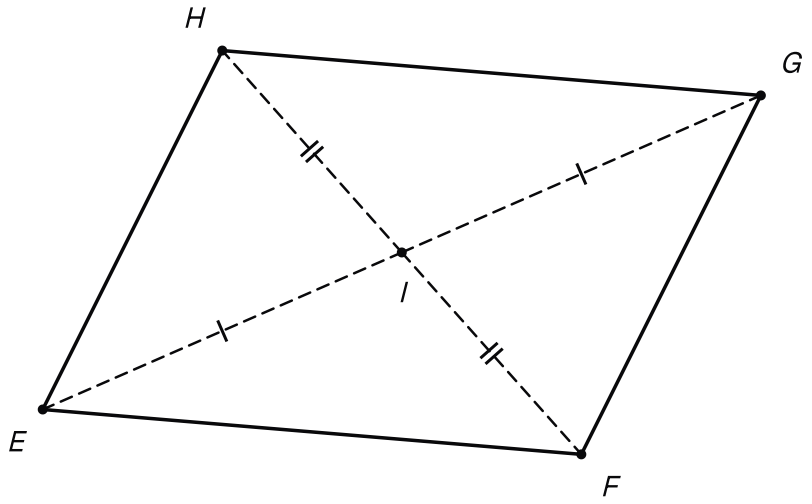
Rotation cherchée. On a $OU = OV$ et l'angle de $\overrightarrow{OV}$ vers $\overrightarrow{OU}$ vaut $-\frac{\pi}{2}$. D'après la définition, U est l'image de V par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$: c'est la rotation réciproque de R.

Conclusion. U n'est pas $R(V)$; la rotation de centre O qui envoie V sur U est celle d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3

Un demi-tour autour du centre d'un parallélogramme

$EFGH$ est un parallélogramme de centre I : le point I est le milieu de ses diagonales $[EG]$ et $[FH]$. On note R la rotation de centre I et d'angle π.



Le parallélogramme EFGH et son centre I, milieu commun des deux diagonales.

1.

Déterminer les images des points E, F, G et H par R.

INDICE

Début : quel point est le milieu de chaque diagonale du parallélogramme ? **Ensuite :** la rotation d'angle π envoie M sur le point M' tel que le centre soit le milieu de $[MM']$.

CORRIGÉ

Propriété utilisée. D'après la propriété des rotations d'angle π, l'image d'un point M par R est le point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$.

Application. Le point I est le milieu de la diagonale $[EG]$ et de la diagonale $[FH]$.

Conclusion. $R(E) = G$, $R(G) = E$, $R(F) = H$ et $R(H) = F$.

2.

En déduire l'image du segment $[EF]$ et celle de la droite (EH).

INDICE

Début : quelles sont les images de E, de F et de H ? **Ensuite :** un segment a pour image le segment dont les extrémités sont les images des siennes ; il en va de même pour une droite.

CORRIGÉ

Segment. D'après l'image d'un segment, l'image de $[EF]$ est le segment qui joint $R(E)$ et $R(F)$. Avec la question 1, c'est le segment $[GH]$.

Droite. De même, d'après l'image d'une droite, l'image de (EH) est la droite qui passe par $R(E) = G$ et $R(H) = F$, c'est-à-dire la droite (GF).

Conclusion. R envoie le segment $[EF]$ sur $[GH]$ et la droite (EH) sur la droite (GF).

3.

Justifier que $GH = EF$ et que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

INDICE

Début : les points G et H sont les images de quels points ? Que conserve une rotation ? **Ensuite :** la conservation des distances, puis l'angle d'un vecteur et de son image.

CORRIGÉ

Longueur. On a $R(E) = G$ et $R(F) = H$. D'après la conservation des distances, $GH = EF$.

Parallélisme. Les points E et F sont distincts. D'après l'angle d'un vecteur et de son image, pour une rotation d'angle π :

$$(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}) \equiv \pi \ [2\pi].$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont donc colinéaires.

Conclusion. $GH = EF$, et les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

Exercice 4

Revenir au point de départ

On note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Le point N est distinct de O.

1.

Quel point M a pour image N par R ? Décrire sa construction.

INDICE

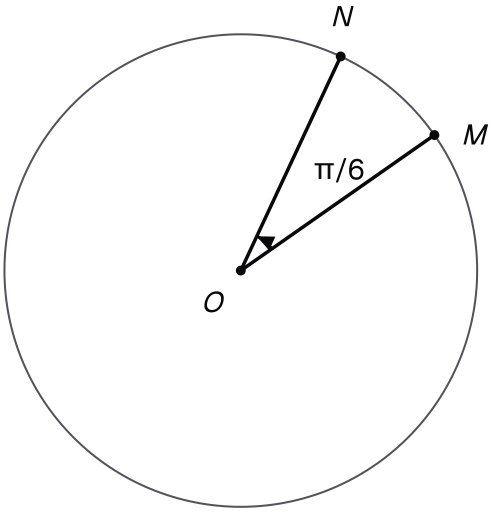
Début : quelle rotation défait la rotation R ? **Ensuite :** la rotation réciproque de R a le même centre et l'angle opposé.

CORRIGÉ

Point cherché. Notons R' la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$. D'après la rotation réciproque, dire que $R(M) = N$ revient à dire que $M = R'(N)$. Il existe donc un seul point M qui convient : $M = R'(N)$.

Construction. On trace le cercle de centre O qui passe par N. À partir de $[ON)$, on reporte un angle de $\frac{\pi}{6}$ dans le sens indirect. Le point M est l'intersection du second côté de cet angle avec le cercle.

Conclusion. Le point M est l'image de N par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$, construit comme ci-dessus.



Le point M cherché : sur le cercle de centre O passant par N, à π/6 de N dans le sens indirect, de sorte que R le ramène en N.

2.

Justifier que $OM = ON$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$.

INDICE

Début : par quelle rotation M est-il l'image de N ? **Ensuite :** la définition de cette rotation R', appliquée au point N.

CORRIGÉ

Définition de R'. D'après la question 1, $M = R'(N)$. La définition de la rotation R' donne $OM = ON$ et $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Vérification. Par l'angle opposé, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, et l'on retrouve bien $N = R(M)$.

Conclusion. $OM = ON$, et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$ est $-\frac{\pi}{6}$.

3.

Existe-t-il un point P distinct de O tel que $R(P) = P$?

INDICE

Début : la mesure $\frac{\pi}{6}$ est-elle un multiple de 2π ? **Ensuite :** la propriété du point invariant d'une rotation.

CORRIGÉ

Angle de R. La mesure $\frac{\pi}{6}$ n'est pas un multiple de 2π : R n'est pas la rotation d'angle nul.

Point invariant. D'après la propriété du point invariant, le centre O est alors le seul point P tel que $R(P) = P$.

Conclusion. Il n'existe aucun point P distinct de O tel que $R(P) = P$.

Exercice 5

Un triangle qui tourne sans se déformer

IJK est un triangle tel que $IJ = 6$ cm, $JK = 8$ cm et $IK = 10$ cm. On note R la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$, et I', J', K' les images de I, J, K par R.

1.

Calculer les longueurs $I'J'$, $J'K'$ et $I'K'$.

INDICE

Début : quelle propriété de la rotation compare une longueur à celle de son image ? **Ensuite :** la conservation des distances.

CORRIGÉ

Le segment $[I'J']$ est l'image de $[IJ]$, et de même pour les deux autres côtés. D'après la conservation des distances :

$$I'J' = IJ = 6 \text{ cm},$$
$$J'K' = JK = 8 \text{ cm},$$
$$I'K' = IK = 10 \text{ cm}.$$

Conclusion. $I'J' = 6$ cm, $J'K' = 8$ cm et $I'K' = 10$ cm.

2.

Quelle est la nature du triangle $I'J'K'$?

INDICE

Début : quel est le plus long côté du triangle $I'J'K'$? **Ensuite :** compare $I'J'^2 + J'K'^2$ et $I'K'^2$, puis utilise la réciproque du théorème de Pythagore.

CORRIGÉ

Le plus long côté est $[I'K']$. On compare :

$$\begin{aligned} I'J'^2 + J'K'^2 &= 36 + 64 \\ &= 100, \end{aligned}$$
$$I'K'^2 = 10^2 = 100.$$

Conclusion. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $I'J'K'$ est rectangle en J'.

3.

Calculer le périmètre et l'aire du triangle $I'J'K'$.

INDICE

Début : quels côtés du triangle $I'J'K'$ forment l'angle droit ? **Ensuite :** dans un triangle rectangle, l'aire est le demi-produit des deux côtés de l'angle droit.

CORRIGÉ

Périmètre. On ajoute les trois longueurs de la question 1 : $6 + 8 + 10 = 24$ cm.

Aire. Le triangle est rectangle en J' : les côtés de l'angle droit sont $[I'J']$ et $[J'K']$. Son aire vaut $\dfrac{6 \times 8}{2} = 24$ cm².

Remarque. On retrouve le périmètre et l'aire du triangle IJK : une rotation déplace la figure sans la déformer.

Conclusion. Le triangle $I'J'K'$ a un périmètre de 24 cm et une aire de 24 cm².

Exercice 6

L'angle entre un vecteur et son image

On note R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{7\pi}{6}$. Les points A et B sont distincts, et $A' = R(A)$, $B' = R(B)$.

1.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, puis sa mesure principale.

INDICE

Outil : l'angle d'un vecteur et de son image ; la mesure principale est dans $]-\pi, \pi]$.

CORRIGÉ

Une mesure. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \frac{7\pi}{6} \ [2\pi].$$

Mesure principale. On retranche 2π : $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$, et ce réel appartient à $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. Une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ est $\frac{7\pi}{6}$; sa mesure principale est $-\frac{5\pi}{6}$.

2.

En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})$.

INDICE

Outil : l'angle opposé.

CORRIGÉ

D'après l'angle opposé et la question 1 :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{5\pi}{6} \ [2\pi].$$

Le réel $\frac{5\pi}{6}$ appartient à $]-\pi, \pi]$.

Conclusion. La mesure principale de $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})$ est $\frac{5\pi}{6}$.

3.

Les droites (AB) et $(A'B')$ sont-elles parallèles ? perpendiculaires ?

INDICE

Outil : deux droites sont parallèles si l'angle de leurs vecteurs vaut 0 ou π, perpendiculaires s'il vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, à 2π près.

CORRIGÉ

On compare la mesure principale $-\frac{5\pi}{6}$ aux mesures principales qui traduisent le parallélisme (0 ou π) et l'orthogonalité ($\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$). Elle n'est égale à aucune d'elles.

Conclusion. Les droites (AB) et $(A'B')$ ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.

4.

Même question si l'angle de la rotation est $\frac{3\pi}{2}$.

INDICE

Outil : cherche la mesure principale de $\frac{3\pi}{2}$.

CORRIGÉ

Angle. D'après l'angle d'un vecteur et de son image, avec l'angle $\frac{3\pi}{2}$:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi].$$

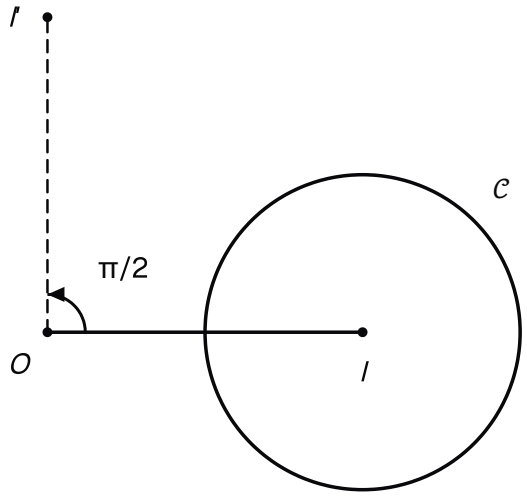
Mesure principale. $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$: c'est un quart de tour.

Conclusion. Pour une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$, les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires ; elles ne sont pas parallèles.

Exercice 7

L'image d'un petit cercle par un quart de tour

On donne deux points O et I tels que $OI = 3$ cm, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon $1{,}5$ cm. On note R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et $I' = R(I)$.



Les données : O et I à 3 cm l'un de l'autre, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon 1,5 cm, et I', image de I par le quart de tour direct de centre O.

1.

Déterminer l'image $\mathcal{C}'$ du cercle $\mathcal{C}$ par R, puis l'image du segment $[OI]$.

INDICE

Outil : l'image d'un cercle a pour centre l'image du centre et garde le même rayon ; le point O est invariant.

CORRIGÉ

Cercle. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre I et pour rayon $1{,}5$ cm, et $R(I) = I'$. D'après l'image d'un cercle, $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre I' et de rayon $1{,}5$ cm.

Segment. Le centre O est invariant : $R(O) = O$. Comme $R(I) = I'$, l'image d'un segment donne pour image de $[OI]$ le segment $[OI']$.

Conclusion. $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre I' et de rayon $1{,}5$ cm ; l'image de $[OI]$ est $[OI']$.

2.

Calculer la distance II'.

INDICE

Outil : le triangle OII' a deux côtés égaux et un angle droit en O ; utilise le théorème de Pythagore.

CORRIGÉ

Nature du triangle. Par définition de R, $OI' = OI = 3$ cm et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle OII' est donc rectangle isocèle en O.

Calcul. D'après le théorème de Pythagore dans ce triangle :

$$II'^2 = 3^2 + 3^2 = 18.$$

Une longueur est positive, donc $II' = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm.

Conclusion. La distance II' vaut $3\sqrt{2}$ cm.

3.

Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont-ils un point commun ?

INDICE

Outil : compare II' et $1{,}5 + 1{,}5$.

CORRIGÉ

Somme des rayons. Les deux cercles ont pour rayon $1{,}5$ cm : la somme des rayons vaut $1{,}5 + 1{,}5 = 3$ cm.

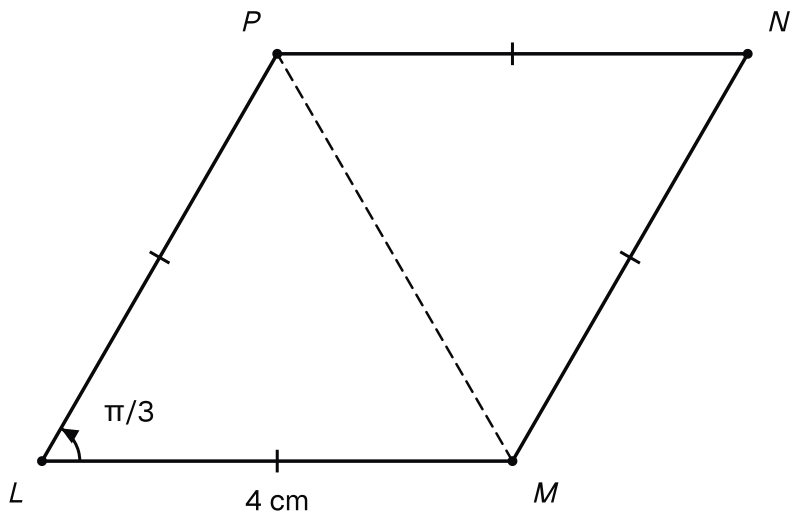
Comparaison. D'après la question 2, la distance des centres est $II' = 3\sqrt{2}$ cm. Comme $\sqrt{2} > 1$, on a $3\sqrt{2} > 3$.

Conclusion. La distance des centres dépasse la somme des rayons : les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ n'ont aucun point commun.

Exercice 8

Un losange formé de deux triangles équilatéraux

$LMNP$ est un losange de côté 4 cm tel que $(\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LP}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$: autour de L, on tourne de M vers P dans le sens direct. On note R la rotation de centre L et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.



Le losange LMNP de côté 4 cm : de LM vers LP, on tourne de π/3 dans le sens direct ; la diagonale [MP] est en pointillés.

1.

Justifier que $P = R(M)$.

INDICE

Début : quelles sont les deux conditions de la définition d'une rotation ? **Ensuite :** la distance vient des côtés du losange, l'angle orienté vient de l'énoncé.

CORRIGÉ

On vérifie les deux conditions de la définition d'une rotation de centre L.

Distance. Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur : $LP = LM = 4$ cm.

Angle. Par hypothèse :

$$(\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LP}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Conclusion. D'après la définition d'une rotation, $P = R(M)$.

2.

En déduire la nature du triangle LMP et la longueur MP.

INDICE

Début : que sais-tu des longueurs LM et LP, et de l'angle en L ? **Ensuite :** un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure $\frac{\pi}{3}$ a trois angles de même mesure.

CORRIGÉ

Triangle isocèle. D'après la question 1, $LM = LP$, et l'angle en L du triangle LMP mesure $\frac{\pi}{3}$.

Les deux autres angles. Ils sont égaux, et la somme des trois angles vaut π. Chacun mesure donc :

$$\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Conclusion. Les trois angles de LMP sont égaux : le triangle LMP est équilatéral, et $MP = 4$ cm.

3.

Déterminer l'image du segment $[LM]$ par R, ainsi que sa longueur.

INDICE

Début : quelles sont les images de L et de M par R ? **Ensuite :** le centre L est invariant ; l'image d'un segment joint les images de ses extrémités.

CORRIGÉ

Images des extrémités. Le centre est invariant : $R(L) = L$. D'après la question 1, $R(M) = P$.

Image du segment. D'après l'image d'un segment, l'image de $[LM]$ est le segment $[LP]$.

Longueur. D'après la conservation des distances, $LP = LM = 4$ cm.

Conclusion. L'image de $[LM]$ par R est le segment $[LP]$, de longueur 4 cm.