BURHAN

La rotation dans le plan

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/rotation-dans-le-plan/cours

Chapitre	Semestre
La rotation dans le plan	Semestre 2

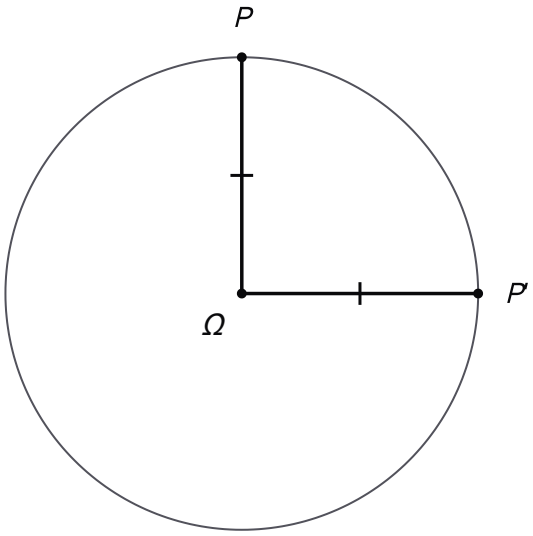
Faire tourner un point

Il est 10 h pile. La pointe de l'aiguille des minutes est sur le 12. Un quart d'heure plus tard, elle est sur le 3 .

L'aiguille a tourné autour de l'axe de l'horloge, sans s'allonger ni raccourcir.

On note Ω l'axe, P la pointe à 10 h et P' la pointe à 10 h 15.

Rappel : le plan est orienté, et le sens direct est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



L'horloge réduite à l'essentiel : l'axe Ω, la pointe P à 10 h, sur le 12, et la pointe P' à 10 h 15, sur le 3.

Devine : Une prédiction

Quelle est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega P'})$?

A. $\frac{\pi}{2}$

Faux.

Un quart de tour, oui. Mais l'aiguille tourne dans le sens des aiguilles d'une montre : c'est le sens indirect.

B. $-\frac{\pi}{2}$

Juste.
Juste : un quart de tour, dans le sens indirect.

C. $-\dfrac{\pi}{4}$
Faux.
En un quart d'heure, l'aiguille fait un quart de tour, pas un huitième.

D. π
Faux.
Un demi-tour prend une demi-heure : la pointe serait alors sur le 6.

Correction
En une heure, l'aiguille des minutes fait un tour complet. En un quart d'heure, elle fait donc un quart de tour.

Elle tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire dans le sens indirect. Ainsi :

$$(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega P'}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

De plus, $\Omega P' = \Omega P$: c'est la longueur de l'aiguille.

Le passage de P à P' est une **rotation** : un centre fixe, un angle, une distance au centre qui ne change pas.

Dans ce chapitre, tu apprends à construire l'image d'un point. Tu reconnais une rotation dans un carré ou dans un triangle équilatéral.

Tu découvres ce qu'elle conserve : distances, angles, milieux. Tu t'en sers enfin pour démontrer des égalités de longueurs, des orthogonalités et des alignements.

Tu emploies les angles orientés du chapitre « Calcul trigonométrique ». Fais chaque figure sur ton cahier.

Définir une rotation

Rappel : les angles orientés

Rappel (chapitre « Calcul trigonométrique »). Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

L'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ a une infinité de mesures, qui diffèrent d'un multiple de 2π. On écrit $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \theta\ [2\pi]$. Une seule mesure est dans $]-\pi, \pi]$: la mesure principale.

L'ordre compte : $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -\theta\ [2\pi]$, c'est l'angle opposé.

Pour un troisième vecteur non nul $\vec{w}$, la relation de Chasles s'écrit :

$$\begin{aligned}&(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})\\ &\equiv (\vec{u}, \vec{w})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Si la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est θ, l'angle géométrique (non orienté) formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure $|\theta|$. Le signe de θ dit seulement le sens.

Devine : Combien de points ?

Soit Ω et M deux points distincts.

On cherche d'abord les points M' tels que $\Omega M' = \Omega M$. Puis on cherche ceux qui vérifient en plus :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Combien en trouve-t-on à chaque fois ?

A. Un seul point, puis un seul point.
Faux.
La première condition seule laisse une infinité de points : tout un cercle.

B. Une infinité de points, puis deux points.
Faux.
Un angle orienté impose le sens : un seul des deux quarts de tour convient.

C. Une infinité de points, puis un seul point.
Juste.
Juste : un cercle, puis un seul point de ce cercle.

D. Une infinité de points, puis une infinité.
Faux.
L'angle fixe la demi-droite $[\Omega M')$; elle ne coupe le cercle qu'en un point.

Correction
Les points M' tels que $\Omega M' = \Omega M$ forment le cercle de centre Ω passant par M : il y en a une infinité.

L'angle orienté impose ensuite la demi-droite $[\Omega M')$, tournée d'un quart de tour dans le sens direct. Cette demi-droite coupe le cercle en un seul point.

La définition

En clair. Pense à l'aiguille de l'horloge. Chaque point de l'aiguille reste à la même distance de l'axe. Tous ses points tournent du même angle, dans le même sens.

Une rotation fait de même avec tous les points du plan : il suffit d'un centre et d'un angle. Le centre, lui, ne bouge pas.

Définition : Rotation de centre et d'angle donnés

Le plan est orienté. Soit Ω un point du plan et θ un réel. La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est la transformation R du plan qui associe à tout point M le point $M' = R(M)$ défini ainsi :

- si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$;

- si $M \neq \Omega$, alors $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Le point M' s'appelle l'**image** de M par la rotation R. L'**image d'une figure** $\mathcal{F}$ est l'ensemble des images des points de $\mathcal{F}$.

Exemple : un quart de tour dans un carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O : en partant de A, on rencontre B, C puis D en tournant dans le sens direct. Fais la figure sur ton cahier.

Distance. Les diagonales d'un carré ont la même longueur, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Donc $OB = OA$.

Angle. Comme le carré est direct :

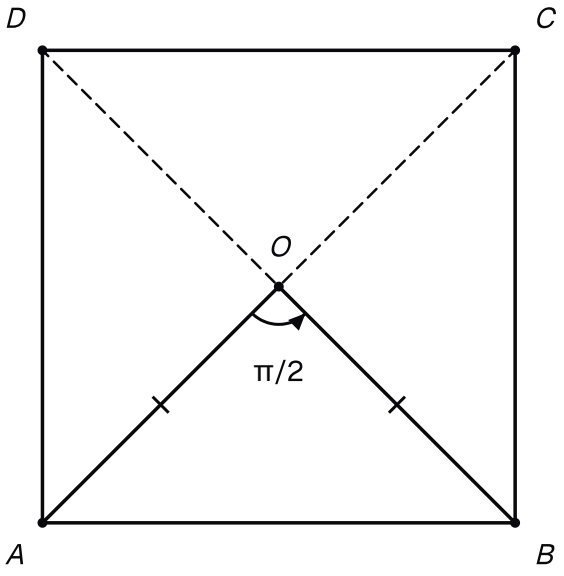
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. D'après la définition, B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. De même, cette rotation envoie B sur C, C sur D et D sur A.

Triangle équilatéral. Un triangle équilatéral ABC est dit direct si :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Alors A, B, C se suivent dans le sens direct. Le sommet de l'angle est la première lettre.



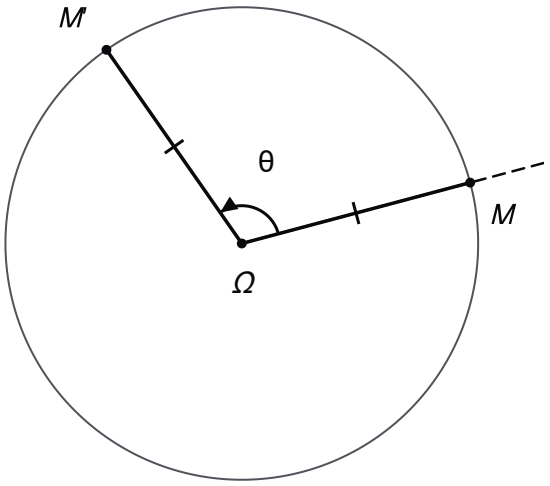
Dans le carré direct ABCD, les diagonales se coupent en O à angle droit et ont la même longueur : le quart de tour direct de centre O mène A en B.

Construire une image, lire l'angle

Méthode : construire l'image d'un point

Pour construire l'image M' d'un point $M \neq \Omega$ par la rotation de centre Ω et d'angle θ :

1. **Trace** le cercle de centre Ω passant par M : l'image est sur ce cercle.
2. **Trace** la demi-droite d'origine Ω qui fait avec $[\Omega M)$ l'angle θ. Prends la mesure principale α de θ, dans $]-\pi, \pi]$: tourne dans le sens direct si $\alpha > 0$, dans le sens indirect si $\alpha < 0$.
3. **Place** M' à l'intersection du cercle et de cette demi-droite.
4. **Contrôle** les deux conditions : $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.



Les trois gestes de la méthode : le cercle de centre Ω par M, l'angle θ reporté depuis [ΩM) dans le sens direct, puis M' au croisement.

Attention : l'angle se lit du point vers son image

✗ « $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta\ [2\pi]$, donc M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ. »

✓ L'angle d'une rotation se lit **du point vers son image** : il faut $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$. Dans l'ordre inverse, on obtient $-\theta$: on tourne dans l'autre sens.

Vérifie : Dans l'autre sens

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O. Quelle est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$?

A. Le point A.

Juste.

Juste : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

B. Le point C.

Faux.
C'est l'image de B pour l'angle $\frac{\pi}{2}$: le sens est inversé.

C. Le point D.

Faux.
O est le milieu de $[BD]$: il faudrait un demi-tour.

D. Le point B lui-même.

Faux.
Un quart de tour déplace B : il ne reste pas en place.

Correction
Les diagonales du carré ont la même longueur et le même milieu : $OA = OB$.

Le carré est direct : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après l'angle opposé :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Les deux conditions de la définition sont vérifiées : l'image de B est A.

Montrer qu'un point est une image, puis à toi

Méthode : montrer qu'un point est l'image d'un autre

Pour montrer que B est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle θ, avec $A \neq \Omega$:

1. **Vérifie** l'égalité des distances : $\Omega B = \Omega A$.
2. **Vérifie** l'angle, du point vers son image : $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \theta\ [2\pi]$.
3. **Conclus** par la définition de la rotation, en citant les deux conditions.

Attention : une égalité de distances ne suffit pas

✗ « $OC = OA$, donc C est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. »

✓ Dans le carré direct $ABCD$ de centre O, on a bien $OC = OA$. Mais l'angle ne convient pas :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \pi\ [2\pi].$$

Donc C n'est pas l'image de A par ce quart de tour.

L'égalité $\Omega M' = \Omega M$ place seulement M' sur un cercle. C'est l'angle qui choisit le point sur ce cercle.

À toi : Un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral direct : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

1. Montre que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Quelle est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Applique la méthode : une distance, puis un angle, toujours issus du centre A.

Indice 2

Les côtés d'un triangle équilatéral ont la même longueur : $AC = AB$.

Indice 3

Point délicat : pour l'angle $-\frac{\pi}{3}$, lis l'angle à partir de $\overrightarrow{AC}$.

Réponse

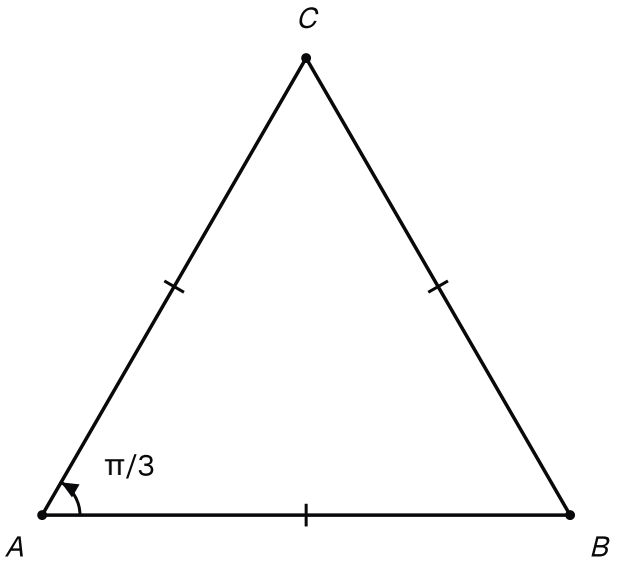
Image de B. Le triangle est équilatéral, donc $AC = AB$. De plus, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. D'après la définition, C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Image de C. D'après l'angle opposé :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Et l'on a toujours $AB = AC$.

Conclusion. D'après la définition, l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est B.



Les données de l'essai : le triangle équilatéral direct ABC, avec l'angle orienté de AB vers AC égal à π/3.

Cas particuliers, point invariant, réciproque

Angle nul, demi-tour

En clair. Une aiguille qui tourne d'un angle nul ne bouge pas. Une aiguille qui fait un demi-tour, de 12 h à 12 h 30, pointe à l'opposé. L'axe est alors au milieu des deux positions de la pointe.

Pourquoi est-ce vrai ? Un angle de mesure 0 donne deux vecteurs de même sens. Un angle de mesure π donne deux vecteurs de sens contraires. Comme leurs longueurs sont égales, ils sont égaux ou opposés.

Propriété : Rotations d'angle nul et d'angle π

Soit Ω un point du plan.

- La rotation de centre Ω et d'angle 0 laisse chaque point à sa place : pour tout point M, $R(M) = M$.
- La rotation de centre Ω et d'angle π est la **symétrie centrale** de centre Ω : pour tout point M, $R(M)$ est le point M' tel que Ω soit le milieu du segment $[MM']$.

Démonstration

Étape 1. Si $M = \Omega$, les deux rotations donnent $R(\Omega) = \Omega$, et Ω est le milieu de $[\Omega\Omega]$. On suppose désormais $M \neq \Omega$ et on note $M' = R(M)$; alors $\Omega M' = \Omega M$, donc $M' \neq \Omega$.

Étape 2. Angle 0 : $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv 0\ [2\pi]$. D'après la définition des mesures d'un angle orienté, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ ont la même direction et le même sens. Ils ont aussi la même longueur, donc ils sont égaux : $M' = M$.

Étape 3. Angle π : $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \pi\ [2\pi]$. D'après la relation $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$, on obtient $(-\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv 0\ [2\pi]$: les vecteurs $-\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur. Donc $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$, c'est-à-dire que Ω est le milieu de $[MM']$.

Étape 4. Réciproquement, si Ω est le milieu de $[MM']$ avec $M \neq \Omega$, alors $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$, d'où $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = (\overrightarrow{\Omega M}, -\overrightarrow{\Omega M}) \equiv \pi\ [2\pi]$: M' est bien l'image de M.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour l'angle π, la preuve **remplace un vecteur par son opposé** :

$$(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ [2\pi].$$

L'angle π devient un angle nul. Les vecteurs $-\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ ont alors même direction, même sens et même longueur : ils sont égaux, et $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

Retiens aussi que le cas du centre se traite à part, au début.

Vérifie : Le demi-tour en pratique

Soit M un point distinct de Ω, et M' son image par la rotation de centre Ω et d'angle π. Que peut-on dire de M, Ω et M' ?

A. Ils sont alignés, mais Ω est plus près de M.

Faux.

Non : $\Omega M' = \Omega M$, d'après la définition.

B. Ils forment un triangle rectangle en Ω.

Faux.

Non : ce serait un quart de tour ; ici, l'angle est plat.

C. Ils sont alignés et Ω est le milieu de $[MM']$.

Juste.

Juste : le demi-tour renvoie à l'opposé, à la même distance.

D. Le point M' est le point M.

Faux.

Non : c'est le cas de l'angle nul.

Correction

Le demi-tour met $\overrightarrow{\Omega M'}$ à l'opposé de $\overrightarrow{\Omega M}$, avec la même longueur : $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

C'est l'idée de la preuve :

$$\begin{aligned}(-\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) &\equiv \pi + \pi \\ &\equiv 0 \ [2\pi].\end{aligned}$$

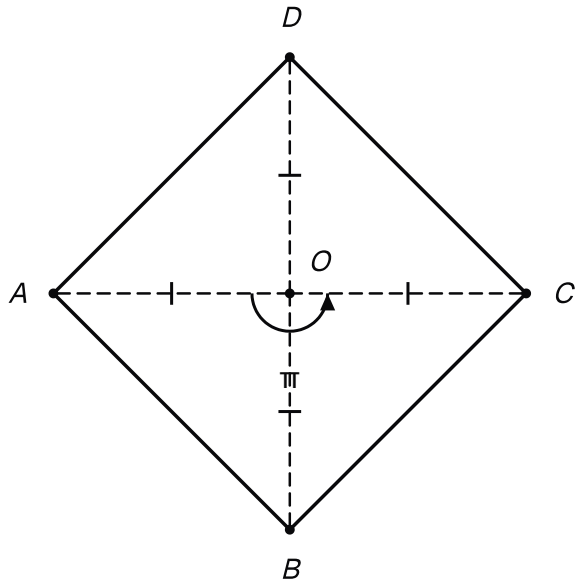
Donc Ω est le milieu de $[MM']$.

Exemple : le demi-tour du carré

Le carré. Soit $ABCD$ un carré de centre O. Ses diagonales se coupent en leur milieu : O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.

D'après les rotations d'angle nul et d'angle π, la rotation de centre O et d'angle π envoie A sur C et B sur D. C'est la symétrie centrale de centre O.

Attention à la mesure. L'angle $-\pi$ donne la même rotation que π, car $-\pi \equiv \pi \ [2\pi]$. De même, la rotation d'angle 2π ne déplace aucun point, comme celle d'angle 0.



O est le milieu commun des diagonales [AC] et [BD] du carré : le demi-tour de centre O échange A et C, ainsi que B et D.

Un seul point fixe

En clair. Quand l'aiguille tourne, un seul point ne bouge pas : celui qui est sur l'axe. Cela suppose que l'angle n'est pas nul à 2π près : sinon, tout point reste en place.

Pourquoi est-ce vrai ? Un point M distinct du centre et resté en place ferait avec lui-même un angle de mesure θ. Or un vecteur fait avec lui-même un angle nul.

Propriété : Point invariant d'une rotation

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ, avec $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$. Alors Ω est le **seul** point M du plan tel que $R(M) = M$.

Démonstration

Étape 1. Par définition de la rotation, $R(\Omega) = \Omega$.

Étape 2. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe un point $M \neq \Omega$ tel que $R(M) = M$. Par définition, $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Étape 3. Or l'angle orienté d'un vecteur non nul avec lui-même a pour mesure 0 : $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv 0\ [2\pi]$. On obtiendrait $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc Ω est le seul point invariant.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **raisonne par l'absurde** : elle suppose qu'un point $M \neq \Omega$ reste en place. La définition donne alors :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

Or cet angle a pour mesure 0. On obtiendrait $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, ce que l'hypothèse exclut.

Vérifie : Où sert l'hypothèse ?

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$?

A. Elle fournit la contradiction finale.

Juste.
Juste : on aboutit à $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, ce qu'elle exclut.

B. Elle montre que $R(\Omega) = \Omega$.

Faux.
Le centre est fixe pour toute rotation, quel que soit l'angle : c'est la définition.

C. Elle donne l'égalité des distances au centre.

Faux.
Cette égalité vient de la définition, pour tout angle.

D. Elle assure qu'un point fixe existe.

Faux.
L'existence vient du centre ; l'hypothèse sert à l'unicité.

Correction
La preuve suppose qu'un point $M \neq \Omega$ vérifie $R(M) = M$. Elle en déduit $\theta \equiv 0\ [2\pi]$.

C'est impossible, puisque l'hypothèse dit $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$: la supposition est fausse. Sans cette hypothèse, aucune contradiction n'apparaît.

Exemple : l'hypothèse compte

Un seul point fixe. Dans le carré direct $ABCD$ de centre O, la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie A sur B : A n'est pas invariant. D'après le point invariant d'une rotation, aucun point autre que O ne reste en place.

L'hypothèse compte. La rotation de centre O et d'angle 2π laisse tous les points en place. Ici, $2\pi \equiv 0\ [2\pi]$: l'énoncé ne s'applique pas.

Retrouver le centre. Si une rotation d'angle non nul à 2π près laisse un point A en place, alors A est son centre : c'est le seul point invariant.

Revenir en arrière

En clair. Pour ramener l'aiguille de 10 h 15 à 10 h, tu la tournes d'un quart de tour dans l'autre sens. Une rotation se défait par la rotation de même centre et d'angle opposé.

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux conditions de la définition se lisent dans les deux sens. La distance ne dépend pas de l'ordre, et l'angle change de signe quand on échange les vecteurs.

Propriété : Rotation réciproque

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ, et R' la rotation de centre Ω et d'angle $-\theta$. Pour tous points M et M' du plan :

$$M' = R(M) \Leftrightarrow M = R'(M').$$

Ainsi, tout point M' du plan est l'image par R d'un **unique** point, le point $R'(M')$. La rotation R' s'appelle la **rotation réciproque** de R.

Démonstration

Étape 1. Si $M = \Omega$: $M' = R(\Omega)$ équivaut à $M' = \Omega$, et $\Omega = R'(M')$ équivaut aussi à $M' = \Omega$, car seul Ω a pour image Ω (une image d'un point $M \neq \Omega$ est à la distance $\Omega M > 0$ de Ω). L'équivalence est vraie.

Étape 2. Si $M \neq \Omega$ et $M' \neq \Omega$: l'égalité $\Omega M' = \Omega M$ est la même dans les deux sens. D'après la propriété de l'angle opposé, $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})\ [2\pi]$. Donc $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$ équivaut à $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -\theta\ [2\pi]$.

Étape 3. Par définition de la rotation, ces deux conditions signifient respectivement $M' = R(M)$ et $M = R'(M')$. Si un seul des deux points est Ω, aucune des deux égalités n'est vraie (étape 1). L'équivalence est donc vraie pour tous points M et M' ; en particulier, l'unique antécédent de M' est $R'(M')$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le cœur de la preuve est l'**angle opposé** :

$$(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv -(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})\ [2\pi].$$

Échanger le point et son image change θ en $-\theta$. Le cas du centre se traite à part : seul Ω a pour image Ω.

Vérifie : Le point de départ

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Quel point a pour image A par R ?

A. Le point B.
Faux.

B est l'image de A par R, pas le point dont A est l'image.

B. Le point C.

Faux.

$R(C) = D$: le point C ne convient pas.

C. Le point D.

Juste.

Juste : $R(D) = A$.

D. Le point A lui-même.

Faux.

Seul le centre O est invariant : $R(A) = B$.

Correction

D'après la rotation réciproque, le point cherché est l'image de A par la rotation R' de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Distance. Les diagonales du carré donnent $OD = OA$.

Angle. Dans le carré direct, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après l'angle opposé :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Conclusion. $R'(A) = D$, c'est-à-dire $R(D) = A$: le point cherché est D.

Un exemple, puis à toi

Exemple : revenir en arrière

Dans le triangle. Soit ABC un triangle équilatéral direct, et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$: $R(B) = C$.

D'après la rotation réciproque, la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ envoie C sur B. Et B est le seul point dont l'image par R est C.

Le centre ne change pas. La rotation réciproque garde le centre A ; seul l'angle change de signe.

À toi : Trois questions sur le carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O.

1. Quelle est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle π ?
2. Quel point a pour image B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$?
3. La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a-t-elle un autre point invariant que A ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Chaque question emploie un énoncé de la section : demi-tour, rotation réciproque, point invariant.
Indice 2
Pour la deuxième question, cherche l'image de B par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Indice 3
Point délicat : la deuxième question demande le point de départ, pas l'image de B.

Réponse
Demi-tour. O est le milieu de $[BD]$. D'après les rotations d'angle nul et d'angle π, l'image de B par la rotation de centre O et d'angle π est D.

Point de départ. D'après la rotation réciproque, le point cherché est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On a $OA = OB$ et :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

D'après la définition, c'est le point A.

Point invariant. On a $\frac{\pi}{2} \not\equiv 0\ [2\pi]$. D'après le point invariant d'une rotation, A est le seul point invariant.

La rotation conserve les distances

Une figure qui tourne sans se déformer

En clair. Décalque un triangle sur une feuille transparente. Pique une épingle en un point, puis fais tourner la feuille.

Le triangle change de place, pas de forme : ses côtés gardent leur longueur. On devine qu'une rotation conserve les distances.

Devine : Une longueur après rotation

Une rotation de centre Ω envoie A sur A' et B sur B'. Que peut-on dire de $A'B'$?

A. Elle dépend de l'angle de la rotation.
Faux.
Le calque tourne sans s'étirer, quel que soit l'angle.

B. Elle vaut AB seulement si Ω est sur (AB).
Faux.
La position du centre change la place du segment, pas sa longueur.

C. Elle vaut $\Omega A + \Omega B$.
Faux.
Avec $A = B$, on trouverait $2\,\Omega A$ au lieu de 0.

D. Elle est égale à AB.

Juste.

Juste : la rotation conserve les distances.

Correction

La rotation fait tourner toute la figure autour de Ω, comme le calque. Le segment $[AB]$ change de place, pas de longueur : $A'B' = AB$.

L'énoncé qui suit l'affirme ; son idée de preuve compare deux triangles.

Conservation des distances

Propriété : Conservation des distances

Soit R une rotation, A et B deux points du plan, $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. Alors

$$A'B' = AB.$$

On dit que la rotation **conserve les distances**.

Démonstration

Idée de la preuve. Soit Ω le centre et θ l'angle de R. Si $A = \Omega$, alors $A' = \Omega$ et $A'B' = \Omega B' = \Omega B = AB$; de même si $B = \Omega$. Sinon, la relation de Chasles pour les angles orientés donne

$$(\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}) \equiv (\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) + (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}) \equiv -\theta + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) + \theta \ [2\pi].$$

Lorsque Ω, A et B ne sont pas alignés, les triangles ΩAB et $\Omega A'B'$ ont donc un angle de même mesure en Ω, compris entre des côtés de mêmes longueurs ($\Omega A' = \Omega A$ et $\Omega B' = \Omega B$) : ils sont isométriques, et $A'B' = AB$. Le cas où Ω, A et B sont alignés, où l'on compare des longueurs sur une droite, n'est pas détaillé.

Remarque : Ce que l'idée de preuve laisse de côté

L'idée de preuve ci-dessus traite deux cas : l'un des points est le centre, ou bien Ω, A et B ne sont pas alignés. Elle s'appuie sur un cas d'isométrie des triangles, vu au collège.

Le cas où Ω, A et B sont alignés n'est pas détaillé : on y compare des longueurs sur une droite.

Vérifie : L'outil de l'idée de preuve

Dans l'idée de preuve, quel outil montre que les angles $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ et $(\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'})$ ont la même mesure ?

A. Le théorème de Pythagore.

Faux.

Aucun angle droit n'est en jeu : le triangle ΩAB est quelconque.

B. La relation de Chasles des angles.

Juste.

Juste : elle fait apparaître $-\theta$ puis θ, qui s'annulent.

C. Le point invariant d'une rotation.

Faux.

Il dit quels points restent en place ; il ne compare aucun angle.

D. Le milieu d'un segment.

Faux.

Aucun milieu n'intervient dans cette idée de preuve.

Correction

On passe de $\overrightarrow{\Omega A'}$ à $\overrightarrow{\Omega B'}$ en passant par $\overrightarrow{\Omega A}$, puis par $\overrightarrow{\Omega B}$. La relation de Chasles donne la somme :

$$-\theta + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) + \theta.$$

Les angles en Ω ont donc la même mesure. Avec $\Omega A' = \Omega A$ et $\Omega B' = \Omega B$, les deux triangles sont isométriques.

Reconnaître une rotation, mesurer

Méthode : reconnaître une rotation dans une figure

1. **Triangle équilatéral direct** ABC : comme $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ envoie B sur C.
2. **Carré direct** $ABCD$ de centre O : la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ envoie A sur B, B sur C, C sur D et D sur A. La rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ envoie B sur D.
3. **Polygone régulier direct** à n côtés, de centre O : ses sommets sont sur un cercle de centre O. Pour deux sommets consécutifs S et T, on a $(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OT}) \equiv \dfrac{2\pi}{n}\ [2\pi]$. La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ envoie chaque sommet sur le suivant. Pour un carré, $n = 4$ et l'angle est $\dfrac{\pi}{2}$.
4. **Justifie** toujours par la définition : une égalité de distances et un angle orienté, issus du centre.

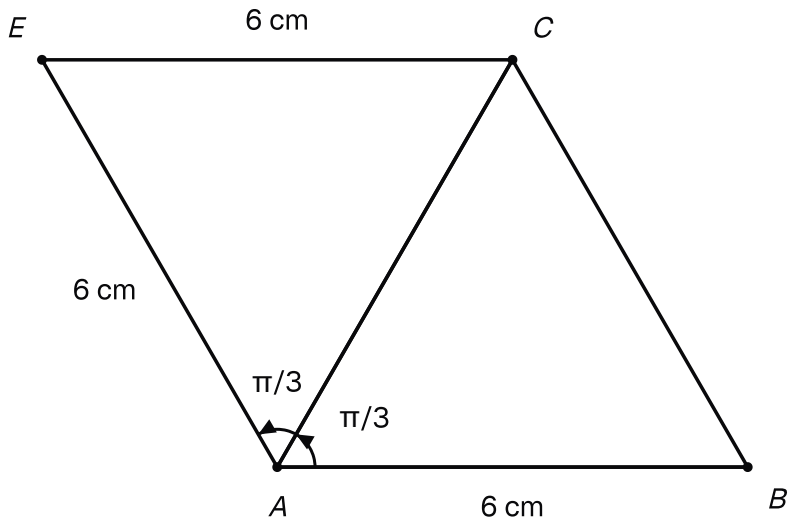
Exemple : dans un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté 6 cm, et R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On a $R(B) = C$. Soit $E = R(C)$.

Côté $[AE]$. D'après la définition, $AE = AC = 6$ cm.

Côté $[CE]$. Les points C et E sont les images de B et C. D'après la conservation des distances, $CE = BC = 6$ cm.

Conclusion. Le triangle ACE a trois côtés de 6 cm : il est équilatéral.



La rotation R de centre A et d'angle π/3 envoie B sur C puis C sur E : le triangle ACE a ses trois côtés de 6 cm.

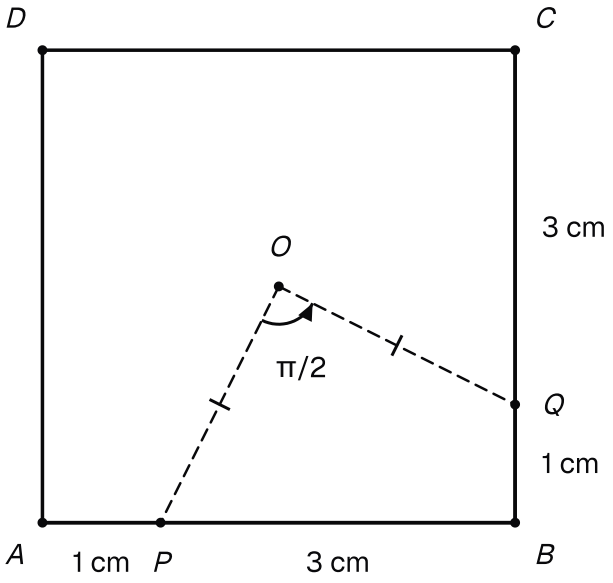
Exemple : dans un carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et de côté 4 cm, et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit P le point de $[AB]$ tel que $AP = 1$ cm, et $Q = R(P)$. Comme P est sur $[AB]$, $BP = 4 - 1 = 3$ cm.

Avec A. Comme $R(A) = B$, la conservation des distances donne $BQ = AP = 1$ cm.

Avec B. Comme $R(B) = C$, elle donne aussi $CQ = BP = 3$ cm.

Avec le centre. Enfin, $OQ = OP$ par définition.



Le quart de tour de centre O amène P, à 1 cm de A sur [AB], en Q, à 1 cm de B sur [BC] ; les longueurs 1 cm et 3 cm se retrouvent.

Vérifie, puis à toi

Vérifie : Une longueur transportée

Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté 5 cm, et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Un point M vérifie $BM = 2$ cm, et $N = R(M)$. Que vaut CN ?

A. 5 cm

Faux.

C'est la longueur du côté. Or on cherche la distance entre deux images : celles de B et de M.

B. 2 cm

Juste.

Juste : $C = R(B)$ et $N = R(M)$, donc $CN = BM$.

C. 3 cm

Faux.

Rien ne place M sur le segment $[BC]$: on ne soustrait pas.

D. On ne peut pas le savoir.

Faux.

La position de M est inconnue, mais la distance CN ne l'est pas : la rotation la conserve.

Correction

D'après la définition, $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$: $R(B) = C$.

Comme $N = R(M)$, la conservation des distances donne $CN = BM = 2$ cm. La position exacte de M n'est pas utile.

À toi : Un quart de tour autour d'un sommet

Soit $ABCD$ un carré direct de côté 6 cm, et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montre que $R(B) = D$.
2. Soit $E = R(C)$: calcule AE et DE.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour $R(B) = D$, applique la méthode : une distance et un angle issus de A.
Indice 2
Calcule AC avec le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B.
Indice 3
Point délicat : DE se déduit de $R(B) = D$ et $R(C) = E$, pas de la position de E.

Réponse
Image de B. Les côtés du carré sont égaux : $AD = AB$. Le carré est direct :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

D'après la définition, $R(B) = D$.

Longueur AE. Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore donne $AC^2 = 36 + 36 = 72$, donc $AC = 6\sqrt{2}$ cm. Par définition, $AE = AC = 6\sqrt{2}$ cm.

Longueur DE. On a $R(B) = D$ et $R(C) = E$. D'après la conservation des distances, $DE = BC = 6$ cm.

Angles et orthogonalité

Un segment tourne lui aussi

En clair. Pose un crayon sur le calque, loin de l'épingle, puis fais tourner la feuille d'un quart de tour. Le crayon tourne lui aussi d'un quart de tour, où qu'il soit sur la feuille.

Les segments issus du centre ne sont pas les seuls à tourner de l'angle θ. Tout segment de la figure tourne de θ.

Devine : Le côté et son image

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$: $R(A) = B$ et $R(B) = C$. Quelle est une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$?

A. 0
Faux.
Les côtés $[AB]$ et $[BC]$ ne sont pas parallèles.

B. $-\dfrac{\pi}{2}$

Faux.

Le carré est direct : de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{BC}$, on tourne dans le sens direct.

C. π

Faux.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas opposés.

D. $\dfrac{\pi}{2}$

Juste.

Juste : c'est l'angle de la rotation.

Correction

Deux côtés consécutifs d'un carré sont perpendiculaires. Le carré étant direct, on passe de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{BC}$ par un quart de tour dans le sens direct :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Or B et C sont les images de A et B : on retrouve l'angle de R. L'énoncé qui suit généralise ce constat.

L'angle d'un vecteur et de son image

Propriété : Angle d'un vecteur et de son image

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ, A et B deux points distincts, $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. Alors $A' \neq B'$ et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

En particulier, si $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, les droites (AB) et $(A'B')$ sont **perpendiculaires**.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'emploies en le citant par son nom : « d'après l'angle d'un vecteur et de son image ».

Exemple : deux droites perpendiculaires

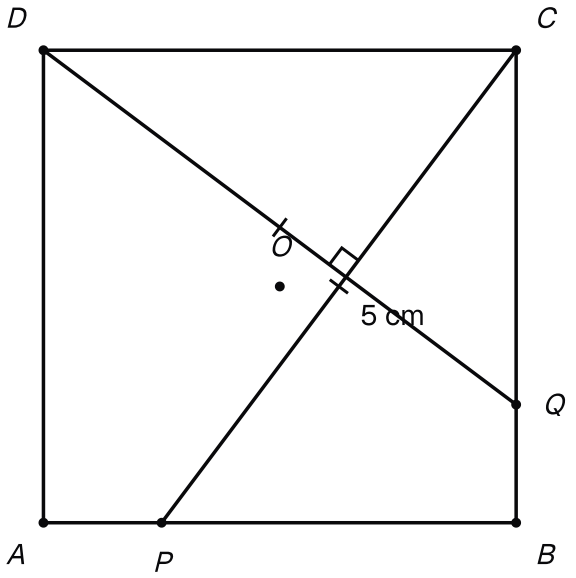
Reprends le carré direct $ABCD$ de centre O et de côté 4 cm, le point P de $[AB]$ tel que $AP = 1$ cm, et $Q = R(P)$. On a $R(P) = Q$ et $R(C) = D$.

Orthogonalité. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{QD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Les droites (PC) et (QD) sont donc perpendiculaires.

Longueur. On a $PB = 3$ cm et $BC = 4$ cm. Dans le triangle PBC rectangle en B, le théorème de Pythagore donne $PC^2 = 9 + 16 = 25$, donc $PC = 5$ cm. D'après la conservation des distances, $QD = PC = 5$ cm.



R envoie P sur Q et C sur D : les segments [PC] et [QD], tous deux de 5 cm, se coupent à angle droit.

Vérifie : Dans le triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral direct, R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et $E = R(C)$. Quelle est une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE})$?

A. $\frac{\pi}{3}$

Juste.

Juste : $C = R(B)$ et $E = R(C)$, donc on retrouve l'angle de R.

B. $-\frac{\pi}{3}$

Faux.

L'angle se lit du vecteur de départ vers le vecteur image : de $\overrightarrow{BC}$ vers $\overrightarrow{CE}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$

Faux.

C'est une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$, pas de l'angle demandé.

D. 0

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a tourné de l'angle de R : il n'a pas la direction de $\overrightarrow{BC}$.

Correction
On a $R(B) = C$ et $R(C) = E$. D'après l'angle d'un vecteur et de son image, appliqué aux points B et C :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE}) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

Conservation des angles orientés

En clair. Si chaque vecteur tourne du même angle θ, l'angle entre deux vecteurs ne change pas : ils tournent ensemble.

Pourquoi est-ce vrai ? La relation de Chasles relie les deux images en passant par les vecteurs de départ. Il apparaît $-\theta$, puis θ : ils s'annulent.

Propriété : Conservation des angles orientés

Soit R une rotation, A, B, C, D quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, et A', B', C', D' leurs images par R. Alors

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \ [2\pi].$$

En particulier, $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ [2\pi]$ lorsque B et C sont distincts de A : la rotation **conserve les angles orientés**.

Démonstration
Étape 1. Soit θ l'angle de R. D'après la conservation des distances, $A'B' = AB \neq 0$ et $C'D' = CD \neq 0$: les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ ne sont pas nuls.

Étape 2. D'après la relation de Chasles pour les angles orientés,

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) \ [2\pi].$$

Étape 3. D'après l'angle d'un vecteur et de son image, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta \ [2\pi]$, donc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\theta \ [2\pi]$ (angle opposé) ; et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv \theta \ [2\pi]$. La somme de l'étape 2 vaut donc $-\theta + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + \theta$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ à 2π près.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **insère les vecteurs de départ** entre les deux images, grâce à la relation de Chasles.

L'angle d'un vecteur et de son image donne $-\theta$ au début et θ à la fin. Ils s'annulent, et il reste $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

La conservation des distances sert seulement à vérifier que les vecteurs images ne sont pas nuls.

Vérifie : Le signe moins

Dans la preuve, d'où vient $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\theta\ [2\pi]$?

A. De la définition de la rotation, appliquée en A.

Faux.

La définition parle des vecteurs issus du centre, comme $\overrightarrow{\Omega A}$, pas de $\overrightarrow{AB}$.

B. De la conservation des distances.

Faux.

Elle donne des longueurs, jamais un angle.

C. De l'angle d'un vecteur et de son image, puis de l'angle opposé.

Juste.

Juste : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$, puis on échange l'ordre.

D. De la relation de Chasles seule.

Faux.

Chasles découpe l'angle ; la valeur $-\theta$ vient d'un autre énoncé.

Correction

D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi].$$

D'après l'angle opposé, en échangeant les deux vecteurs, $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\theta\ [2\pi]$.

Exemple **: un angle du carré se retrouve**

Dans le carré. Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$: $R(A) = B$, $R(B) = C$ et $R(C) = D$.

La diagonale partage l'angle droit en deux : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. D'après la conservation des angles orientés :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

L'hypothèse compte. Il faut $A \neq B$ et $A \neq C$: un vecteur nul n'a pas d'angle.

Un piège, puis à toi

Attention **: une droite n'est pas toujours parallèle à son image**

✗ « La rotation déplace la droite (AB) sans la faire tourner : la droite qui joint les images lui est parallèle. »

✓ D'après l'angle d'un vecteur et de son image, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Dans le carré direct $ABCD$ de centre O, le quart de tour de centre O envoie A sur B et B sur C : (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Les deux droites ne sont parallèles que si θ est un multiple de π. Par exemple, le demi-tour envoie A sur C et B sur D : (AB) et (CD) sont parallèles.

À toi : Retour au quart de tour autour d'un sommet

Reprends le carré direct $ABCD$, la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et $E = R(C)$.

1. Montre que les droites (BC) et (DE) sont perpendiculaires.
2. Donne ensuite une mesure de $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris les images connues : $R(B) = D$, $R(C) = E$ et $R(A) = A$.
Indice 2
Pour le second angle, utilise la conservation des angles orientés avec l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
Indice 3
Point délicat : dans le carré direct, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; l'angle utile est dans l'autre ordre.

Réponse
Perpendicularité. On a $R(B) = D$ et $R(C) = E$. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Les droites (BC) et (DE) sont donc perpendiculaires.

Angle en D. Le centre est invariant : $R(A) = A$. D'après la conservation des angles orientés :

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\ [2\pi].$$

Or $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après l'angle opposé, $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Image d'une figure

Milieux et alignements

En clair. Sur le calque, marque le milieu d'un segment, puis fais tourner la feuille. Le point marqué reste au milieu du segment tourné.

De même, trois points alignés sur le calque restent alignés. La rotation déplace la figure d'un seul bloc.

Devine : L'image d'un milieu

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et I le milieu de $[AB]$. Quelle est l'image de I par R ?

A. Le point B.

Faux.
B est l'image de A ; I est un autre point.

B. Le milieu de $[BC]$.

Juste.
Juste : A et B ont pour images B et C, et le milieu suit.

C. Le milieu de $[CD]$.

Faux.
C'est l'image de I par le demi-tour de centre O.

D. Le centre O.

Faux.
Seul O a pour image O, et $I \neq O$.

Correction
On a $R(A) = B$ et $R(B) = C$.

On devine que le milieu de $[AB]$ a pour image le milieu de $[BC]$. L'énoncé qui suit le confirme.

Conservation du barycentre

Rappel (chapitre « Le barycentre dans le plan »). Si $a + b \neq 0$, le barycentre G de (A, a) et (B, b) est le point tel que :

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

On le note $\mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$; il est sur la droite (AB).

Si $a = b$, c'est le milieu de $[AB]$. Multiplier les deux poids par un même réel non nul ne change pas G. Les points du segment $[AB]$ sont les barycentres de A et B à poids positifs ou nuls.

Propriété : Conservation du barycentre

Soit R une rotation, (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$, et $G = \mathrm{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$. Alors

$$R(G) = \mathrm{Bar}\{(A', a); (B', b)\},$$

où $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$. Il en est de même pour trois points pondérés. En particulier :

- l'image du milieu de $[AB]$ est le milieu de $[A'B']$;
- si trois points sont alignés, leurs images sont alignées.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'emploies en le citant par son nom : « d'après la conservation du barycentre ».

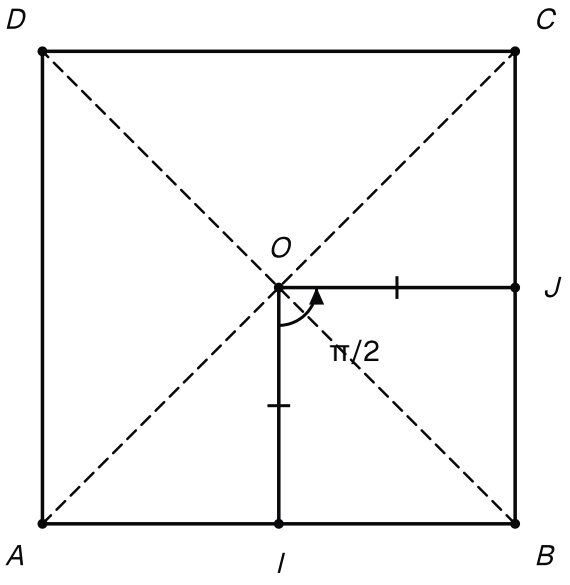
Exemple : milieu, alignement, barycentre

Reprends le carré direct $ABCD$ de centre O et de côté 4 cm, et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Appliquons la conservation du barycentre.

Un milieu. L'image du milieu I de $[AB]$ est le milieu J de $[BC]$. Donc $OJ = OI$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Un alignement. A, O et C sont alignés, donc leurs images B, O et D le sont aussi.

Un barycentre. Le point $P = \mathrm{Bar}\{(A,3);(B,1)\}$ a pour image $\mathrm{Bar}\{(B,3);(C,1)\}$, le point de $[BC]$ à 1 cm de B : on retrouve Q.



Par le quart de tour de centre O, I, milieu de [AB], a pour image J, milieu de [BC] ; la diagonale (AC) a pour image la diagonale (BD).

Vérifie : Un milieu dans le triangle

Soit ABC un triangle équilatéral direct, R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, $E = R(C)$, et K le milieu de $[BC]$. Quelle est l'image de K par R ?

A. Le point K lui-même.
Faux.
Seul le centre A est invariant.

B. Le milieu de $[AC]$.
Faux.
Le centre A n'est l'image ni de B ni de C.

C. Le point C.
Faux.
C est l'image de B, pas celle de K.

D. Le milieu de $[CE]$.
Juste.
Juste : $R(B) = C$ et $R(C) = E$.

Correction
On a $R(B) = C$ et $R(C) = E$. D'après la conservation du barycentre, l'image du milieu K de $[BC]$ est le milieu de $[CE]$.

Segments, droites, cercles

En clair. Un segment tracé sur le calque reste un segment après rotation. Un cercle reste un cercle, de même rayon.

Pour trouver l'image, il suffit de suivre quelques points bien choisis : les extrémités d'un segment, le centre d'un cercle.

Propriété : Image d'un segment, d'une droite, d'un cercle

Soit R une rotation, A et B deux points distincts, $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.

- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- Soit I un point et r un réel strictement positif. L'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre $I' = R(I)$ et de **même** rayon r.

Démonstration
Idée de la preuve. D'après la conservation des distances, $A'B' = AB \neq 0$, donc $A' \neq B'$: la droite $(A'B')$ existe. Un point M de la droite (AB) s'écrit $M = \mathrm{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$ avec t réel, et M appartient au segment $[AB]$ lorsque $0 \leq t \leq 1$. D'après la conservation du barycentre, $R(M) = \mathrm{Bar}\{(A', 1-t); (B', t)\}$: c'est un point de la droite $(A'B')$, et du segment $[A'B']$ lorsque $0 \leq t \leq 1$.

Pour le cercle, si $IM = r$, la conservation des distances donne $I'M' = IM = r$: l'image de M est sur le cercle de centre I' et de rayon r. L'inclusion inverse (chaque point de la figure obtenue est bien une image) se déduit de la rotation réciproque ; elle n'est pas détaillée.

Remarque : Ce que l'idée de preuve laisse de côté

L'idée de preuve ci-dessus montre que l'image de chaque point de la figure est sur la figure annoncée. Elle commence par $A' \neq B'$, tiré de la conservation des distances.

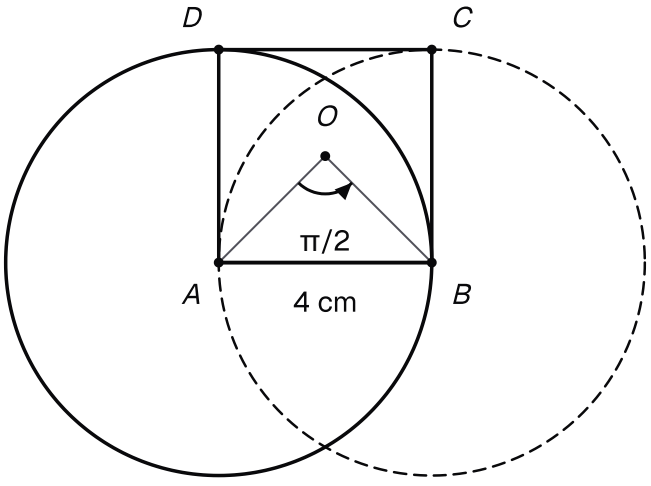
Elle ne détaille pas l'inclusion inverse : chaque point de la figure obtenue est bien l'image d'un point de la figure de départ. Cette partie se déduit de la rotation réciproque.

Exemple : l'image d'un cercle

Dans le carré direct $ABCD$ de centre O et de côté 4 cm, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 4 cm. Il passe par B et par D. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Image. Comme $R(A) = B$, l'image de $\mathcal{C}$ est le cercle de centre B et de rayon 4 cm, d'après l'image d'un segment, d'une droite, d'un cercle.

Contrôle. Ce cercle passe par $R(B) = C$ et par $R(D) = A$, et l'on a bien $BC = BA = 4$ cm.



Le cercle de centre A et de rayon 4 cm passe par B et par D ; son image par le quart de tour de centre O est le cercle de centre B, qui passe par C et par A.

La méthode, un piège, une vérification

Méthode : déterminer l'image d'un segment, d'une droite, d'un cercle

1. **Segment** $[AB]$: construis les images A' et B' de ses extrémités ; l'image est le segment $[A'B']$.
2. **Droite** : choisis deux points distincts de la droite, puis construis leurs images ; l'image est la droite qui les joint. Une droite qui passe par le centre Ω a une image qui passe aussi par Ω.
3. **Cercle** : construis l'image I' du centre I ; l'image est le cercle de centre I' et de **même** rayon.

Attention : pour un cercle, le centre tourne

✗ « L'image du cercle de centre A et de rayon 4 cm est le même cercle, puisque le rayon ne change pas. »

✓ Le rayon ne change pas, mais le centre tourne. Dans l'exemple, le centre de l'image est $R(A) = B$, et non A. Le cercle image n'est le cercle de départ que si son centre est le centre de la rotation.

Vérifie : Le cercle image

Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté 3 cm, R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et Γ le cercle de centre B et de rayon 2 cm. Quelle est l'image de Γ par R ?

A. Le cercle de centre B et de rayon 2 cm.
Faux.
Le centre B tourne lui aussi : il a pour image C.

B. Le cercle de centre C et de rayon 3 cm.
Faux.
Le rayon est celui de Γ, et non le côté du triangle.

C. Le cercle de centre C et de rayon 2 cm.
Juste.
Juste : un nouveau centre, le même rayon.

D. Le cercle de centre A et de rayon 2 cm.
Faux.
Le centre de la rotation n'est pas le centre du cercle image.

Correction
D'après la définition, $AC = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $R(B) = C$.

D'après l'image d'un segment, d'une droite, d'un cercle, l'image de Γ est le cercle de centre C et de même rayon, 2 cm.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Trois images dans le carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Détermine successivement l'image :

1. du segment $[AC]$;
2. de la droite (AB) ;
3. du cercle de centre O passant par A.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris d'abord les images des sommets : $R(A) = B$, $R(B) = C$ et $R(C) = D$.
Indice 2
Pour la droite, deux points suffisent ; pour le cercle, cherche l'image de son centre.
Indice 3
Point délicat : le centre du cercle est O, le centre de la rotation ; il ne bouge pas.

Réponse
Segment. Comme $R(A) = B$ et $R(C) = D$, l'image du segment $[AC]$ est $[BD]$, d'après l'image d'un segment, d'une droite, d'un cercle.

Droite. De même, comme $R(A) = B$ et $R(B) = C$, l'image de la droite (AB) est la droite (BC).

Cercle. Le cercle a pour centre O et pour rayon OA. Comme $R(O) = O$, son image est le cercle de centre O et de rayon OA : c'est le même cercle. Il passe d'ailleurs par A, B, C et D.

Remarque **: Coin devoir : rédiger l'image d'un milieu**

En devoir, chaque image se justifie par un énoncé nommé.

Pour le milieu I de $[AB]$ dans le carré, écris : « $R(A) = B$ et $R(B) = C$. D'après la conservation du barycentre, l'image du milieu I de $[AB]$ est le milieu J de $[BC]$. »

Pour un cercle, donne l'image du centre, puis écris « de même rayon ». Ne conclus jamais sur la seule figure.

Démontrer avec une rotation

Voir la rotation dans la figure

En clair. Pour démontrer avec une rotation, il faut d'abord la voir dans la figure. Cherche deux segments de même longueur, issus d'un même point, qui font un angle connu.

Cet angle vaut $\frac{\pi}{3}$ dans un triangle équilatéral, $\frac{\pi}{2}$ dans un carré. Le point commun est le centre.

Devine : Deux triangles, un sommet commun

Soit OAB et OCD deux triangles équilatéraux directs de même sommet O. Quelle rotation envoie à la fois A sur B et C sur D ?

A. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Juste.
Juste : $OB = OA$, $OD = OC$, et les deux angles en O mesurent $\frac{\pi}{3}$.

B. La rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Faux.
Elle envoie B sur A : l'angle se lit du point vers son image.

C. La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Faux.
Elle laisse A en place : elle ne peut pas l'envoyer sur B.

D. La rotation de centre O et d'angle π.

Faux.
Elle envoie A sur son symétrique par rapport à O, pas sur B.

Correction
Le triangle OAB est équilatéral direct : $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. D'après la définition, B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Le triangle OCD montre de même que D est l'image de C par cette rotation.

La méthode sur deux triangles

Méthode : démontrer avec une rotation

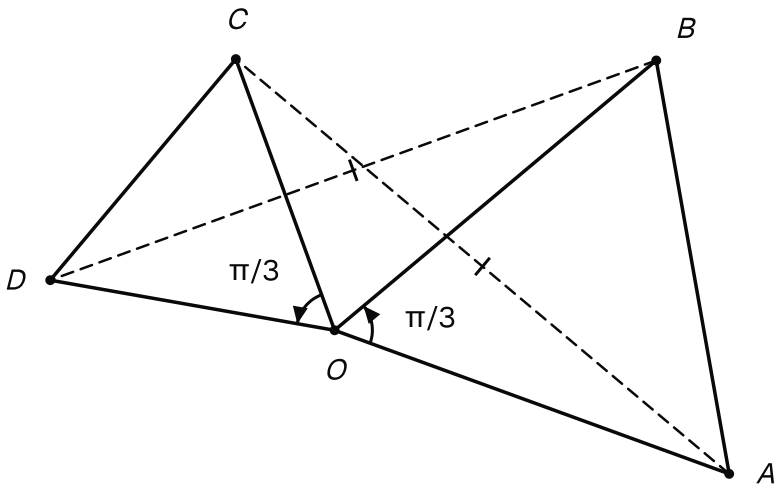
1. **Cherche** une rotation qui envoie des points connus sur d'autres points connus, par exemple dans un triangle équilatéral ou un carré.
2. **Écris** les images, en justifiant chacune : par exemple $R(A) = B$ et $R(C) = D$.
3. **Applique** la propriété qui répond à la question. Pour une longueur : la conservation des distances. Pour un angle ou une orthogonalité : l'angle d'un vecteur et de son image. Pour un milieu ou un alignement : la conservation du barycentre.
4. **Conclus** en nommant la propriété employée.

Exemple : une égalité de longueurs

Soit OAB et OCD deux triangles équilatéraux directs de même sommet O, et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Fais la figure, en plaçant A et C librement.

Comme dans l'activité, $R(A) = B$ et $R(C) = D$. D'après la conservation des distances, $BD = AC$.

Ce résultat s'obtient sans aucun calcul de longueur.



Deux triangles équilatéraux directs de sommet commun O ; la rotation d'angle π/3 et de centre O mène A en B et C en D, donc BD = AC.

Vérifie : L'angle des deux segments

Dans la même figure, avec $A \neq C$, quelle est une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$?

A. $-\frac{\pi}{3}$

Faux.

L'angle va de $\overrightarrow{AC}$ vers $\overrightarrow{BD}$, le vecteur des images : c'est l'angle de R.

B. $\frac{\pi}{2}$

Faux.

Le quart de tour est celui du carré ; ici, la rotation a pour angle $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi}{3}$

Juste.

Juste : c'est l'angle de la rotation.

D. 0

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a tourné de l'angle de R par rapport à $\overrightarrow{AC}$: ils ne sont pas colinéaires.

Correction
On a $R(A) = B$ et $R(C) = D$, avec $A \neq C$. D'après l'angle d'un vecteur et de son image :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Le carré, puis un milieu

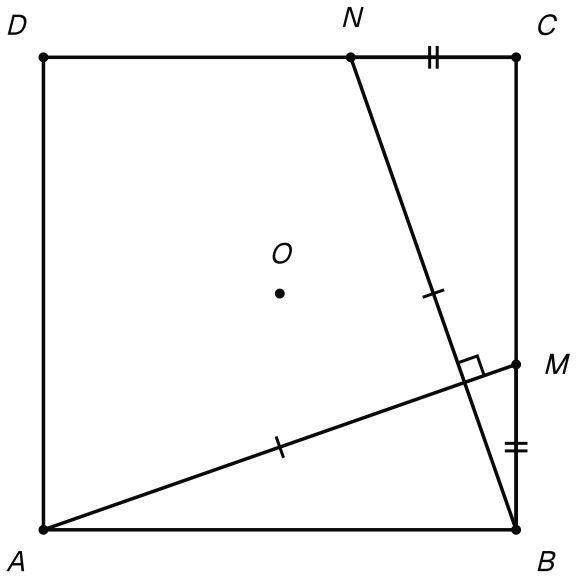
Exemple : longueurs égales et droites perpendiculaires

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, M un point de $[BC]$, et N le point de $[CD]$ tel que $CN = BM$. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et $M' = R(M)$.

Où est M' ? Comme $R(B) = C$ et $R(C) = D$, le point M' est sur $[CD]$, d'après l'image d'un segment.

M' et N. La conservation des distances donne $CM' = BM = CN$: les points M' et N de $[CD]$ sont confondus.

Conclusion. Comme $R(A) = B$ et $R(M) = N$, on obtient $BN = AM$. D'après l'angle d'un vecteur et de son image, les droites (AM) et (BN) sont perpendiculaires.



Avec CN = BM, le quart de tour de centre O transforme A en B et M en N : les segments [AM] et [BN] sont égaux et perpendiculaires.

Exemple : un triangle équilatéral caché

Reprends les triangles équilatéraux directs OAB et OCD. Soit I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BD]$.

Comme $R(A) = B$ et $R(C) = D$, la conservation du barycentre donne $R(I) = J$.

Si $I \neq O$, la définition donne alors $OJ = OI$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Le triangle OIJ est donc équilatéral direct.

Vérifie : Un alignement transporté

Dans la figure des deux triangles, on suppose A, O et C alignés. Que peut-on dire des points B, O et D ?

A. Ils sont alignés.
Juste.
Juste : ce sont les images de A, O et C.

B. Ils forment un triangle équilatéral.
Faux.
Les images de trois points alignés sont alignées : B, O et D ne forment pas un triangle.

C. On ne peut rien en dire.
Faux.
La rotation conserve l'alignement : on peut conclure.

D. (OB) et (OD) sont perpendiculaires.
Faux.
Elles font le même angle avec (OA) et (OC), qui sont confondues.

Correction
On a $R(A) = B$, $R(O) = O$ et $R(C) = D$. D'après la conservation du barycentre, les images de trois points alignés sont alignées : B, O et D sont alignés.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un triangle dans le carré

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et de côté 4 cm, et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit P le point de $[AB]$ tel que $AP = 1$ cm, et $Q = R(P)$.

1. Montre que le triangle OPQ est rectangle et isocèle en O.
2. Calcule ensuite PQ.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La définition de la rotation donne directement deux renseignements sur OP et OQ.
Indice 2
On sait que $BQ = AP = 1$ cm : utilise le triangle PBQ, rectangle en B.

Indice 3
Point délicat : $PB = 4 - 1 = 3$ cm, et non 1 cm.

Réponse
Le triangle OPQ. Comme $Q = R(P)$ et $P \neq O$, la définition donne $OQ = OP$ et :

$$(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$

Le triangle OPQ est donc rectangle et isocèle en O.

Position de Q. D'après la conservation des distances, $BQ = AP = 1$ cm. D'après l'image d'un segment, Q est sur $[BC]$, image de $[AB]$.

Longueur PQ. Le triangle PBQ est rectangle en B, avec $PB = 3$ cm. Le théorème de Pythagore donne $PQ^2 = 9 + 1 = 10$, donc $PQ = \sqrt{10}$ cm.

Remarque : Coin devoir : justifier une image

En devoir, chaque image annoncée se justifie par les **deux** conditions.

Pour les deux triangles, écris : « OAB est équilatéral direct, donc $OB = OA$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$. D'après la définition, $B = R(A)$. De même, $D = R(C)$. D'après la conservation des distances, $BD = AC$. »

Une distance seule ne suffit jamais.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle propriété pour quelle question

- **Montrer qu'un point est une image** : deux conditions, une distance et un angle orienté lu du point vers son image.
- **Reconnaître une rotation** : triangle équilatéral direct, angle $\frac{\pi}{3}$; carré direct, angle $\frac{\pi}{2}$.
- **Revenir en arrière** : la rotation réciproque, de même centre et d'angle opposé. **Demi-tour** : la symétrie centrale.
- **Égalité de longueurs** : la conservation des distances.
- **Angle ou orthogonalité** : l'angle d'un vecteur et de son image ; un quart de tour donne des droites perpendiculaires.
- **Milieu ou alignement** : la conservation du barycentre.
- **Image d'un cercle** : l'image du centre, et le même rayon.

Le mot du prof. Une rotation, c'est un centre et un angle. Avant chaque conclusion, écris les images et nomme la propriété que tu emploies.

Le chapitre suivant, « Limite d'une fonction numérique », change de domaine : il ouvre l'analyse de l'année.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « La rotation dans le plan » (1bac · sciences-experimentales · mathematiques)