BURHAN

Résumé : Notions de logique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/notions-de-logique/resume

Chapitre	Semestre
Notions de logique	Semestre 1

Propositions et connecteurs

> **À retenir : Le réflexe : chercher la valeur de vérité**
>
> Chaque proposition reçoit V ou F, et une seule de ces deux valeurs. Un énoncé qui contient une lettre libre n'en est pas une, car sa valeur change avec la lettre. Pour trancher, remplace les mots par un calcul. Puis conclus par V ou par F.

Définition : Proposition ; négation

Une **proposition** est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux, et jamais les deux à la fois. On dit que sa **valeur de vérité** est « vrai » (notée V) ou « faux » (notée F).

Soit P une proposition. La **négation** de P est la proposition notée $\overline{P}$, qui se lit « non P » : elle est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

Définition : Conjonction ; disjonction

Soit P et Q deux propositions.

- La **conjonction** de P et Q est la proposition « P et Q ». Elle est vraie lorsque P et Q sont vraies toutes les deux, et fausse dans les trois autres cas.
- La **disjonction** de P et Q est la proposition « P ou Q ». Elle est vraie lorsque l'une au moins des propositions P et Q est vraie, et fausse seulement lorsque P et Q sont fausses toutes les deux.

Le « ou » mathématique est **inclusif** : « P ou Q » est vraie aussi lorsque P et Q sont vraies en même temps.

Définition : Implication ; équivalence ; loi logique

Soit P et Q deux propositions.

- L'**implication** $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » ou « si P, alors Q ». Elle est fausse lorsque P est vraie et Q fausse, et vraie dans les trois autres cas. L'implication $Q \Rightarrow P$ est la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$.
- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire** pour que P soit vraie, et que P est une **condition suffisante** pour que Q soit vraie.

- L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Elle est vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

Une proposition construite à partir de propositions P, Q, … et qui est vraie quelles que soient leurs valeurs de vérité est une **loi logique**.

À retenir : Les tables de vérité à connaître

Les définitions des connecteurs tiennent dans un seul tableau. Chaque ligne est une façon de choisir les valeurs de P et de Q.

Cas	P	Q	$\overline{P}$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	V	V	F	V	V	V	V
2	V	F	F	F	V	F	F
3	F	V	V	F	V	V	F
4	F	F	V	F	F	V	V

Retiens deux colonnes : « ou » n'est faux qu'à la dernière ligne, l'implication n'est fausse qu'à la deuxième.

Exemple

Énoncé. Soit P : « 87 est un nombre premier » et Q : « 87 est impair ».

Valeurs. P est fausse, car $87 = 3 \times 29$. Q est vraie. Donc « P et Q » est fausse, « P ou Q » est vraie, et $\overline{P}$ est vraie.

Implications. $P \Rightarrow Q$ est vraie, car son hypothèse P est fausse. $Q \Rightarrow P$ est fausse : Q est vraie et P est fausse.

Exemple

Énoncé. Pour un entier naturel n : « si n se termine par 0, alors n est multiple de 5 ». Cette implication est vraie, car $n = 10k = 5 \times 2k$.

Vocabulaire. Se terminer par 0 est une condition suffisante pour être multiple de 5. Être multiple de 5 est une condition nécessaire pour se terminer par 0.

Réciproque. « Si n est multiple de 5, alors n se termine par 0 » est fausse : 15 la met en défaut. Les deux propositions ne sont pas équivalentes.

Lois logiques

Propriété : Double négation ; lois de Morgan

Soit P et Q deux propositions. Les trois propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$;
- $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow \left(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}\right)$;
- $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow \left(\overline{P} \text{ et } \overline{Q}\right)$.

Propriété : Contraposée d'une implication

Soit P et Q deux propositions. L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est appelée la **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$, et

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$$

est une loi logique : une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.

Propriété : Négation d'une implication ; double implication

Soit P et Q deux propositions. Les deux propositions suivantes sont des lois logiques :

- $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow \left(P \text{ et } \overline{Q}\right)$;
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$.

Méthode : vérifier une loi logique

1. **Liste** les cas : deux propositions donnent 4 lignes, trois en donnent 8.
2. **Calcule** chaque membre, colonne après colonne, avec les tables des connecteurs.
3. **Compare** les deux colonnes finales. Égales sur toutes les lignes : l'équivalence est une loi logique.
4. **Une seule ligne** où elles diffèrent prouve que ce n'est pas une loi logique.

Exemple

Énoncé. Vérifions que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \text{ ou } Q\right)$ est une loi logique.

Cas	P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{P}$ ou Q
1	V	V	V	F	V
2	V	F	F	F	F
3	F	V	V	V	V

Cas	P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{P}$ ou Q
4	F	F	V	V	V

Conclusion. Les colonnes de $P \Rightarrow Q$ et de $\overline{P}$ ou Q coïncident sur les quatre lignes : c'est une loi logique. Elle donne une autre lecture d'une implication.

Exemple

Énoncé. Soit n un entier. Nie « n est pair et n est multiple de 3 ».

Négation. D'après les lois de Morgan, on obtient « n est impair ou n n'est pas multiple de 3 ».

Contrôle. Pour $n = 12$, la proposition est vraie et sa négation fausse. Pour $n = 10$, c'est l'inverse.

Attention : Nier un « et », nier un « ou »

Pour $n = 9$, « n est impair et n n'est pas multiple de 3 » est fausse. Or « n est pair et n est multiple de 3 » est fausse aussi. Ces deux phrases ne sont donc pas la négation l'une de l'autre.

Pour nier, remplace chaque morceau par son contraire **et** change « et » en « ou ».

Attention : Contraposée ou réciproque ?

Reprends « si n se termine par 0, alors n est multiple de 5 ». Sa contraposée, « si n n'est pas multiple de 5, alors n ne se termine pas par 0 », est vraie comme elle. Sa réciproque est fausse.

Pour obtenir la contraposée, il faut échanger hypothèse et conclusion, **et** les nier toutes les deux.

Quantificateurs

Définition : Fonction propositionnelle ; quantificateurs

Soit E un ensemble, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou un intervalle. Un énoncé $P(x)$ qui contient une variable x et qui devient une proposition chaque fois que l'on remplace x par un élément de E est une **fonction propositionnelle** définie sur E.

- La proposition $(\forall x \in E) : P(x)$ se lit « pour tout x de E, $P(x)$ ». Elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **tous** les éléments x de E. Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel**.
- La proposition $(\exists x \in E) : P(x)$ se lit « il existe au moins un x de E tel que $P(x)$ ». Elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément x de E. Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel**.
- La proposition $(\exists! x \in E) : P(x)$ se lit « il existe un unique x de E tel que $P(x)$ ». Elle est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour **exactement un** élément x de E.

À retenir : Lire et écrire un quantificateur

Lis $\forall$ « pour tout » et $\exists$ « il existe au moins un ».

La lettre placée après un quantificateur est muette : $(\forall t \in \mathbb{R}) : P(t)$ dit la même chose que $(\forall x \in \mathbb{R}) : P(x)$.

L'ensemble compte : $(\exists x \in \mathbb{N}) : 2x = 3$ est fausse, alors que $(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x = 3$ est vraie.

Exemple

Pour tout. $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 > 0$ est vraie : un carré n'est jamais négatif, donc $x^2 + 1 \geq 1$.

Il existe. $(\exists n \in \mathbb{N}) : n^2 = 10$ est fausse. En effet, si $n \leq 3$, alors $n^2 \leq 9$; si $n \geq 4$, alors $n^2 \geq 16$.

Un seul. $(\exists! x \in \mathbb{R}) : 3x - 6 = 0$ est vraie : l'équation équivaut à $x = 2$.

Attention : L'ordre des quantificateurs

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + y = 0$ est vraie : pour chaque x, le réel $y = -x$ convient, et il change avec x.

Mais $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x + y = 0$ est fausse. Un même y devrait convenir pour tous les x, or pour $x = 1 - y$ la somme vaut 1.

Négation d'une proposition quantifiée, contre-exemple

Propriété : Négation d'une proposition quantifiée

Soit E un ensemble et $P(x)$ une fonction propositionnelle définie sur E.

- La négation de la proposition « $(\forall x \in E) : P(x)$ » est la proposition « $(\exists x \in E) : \overline{P(x)}$ ».
- La négation de la proposition « $(\exists x \in E) : P(x)$ » est la proposition « $(\forall x \in E) : \overline{P(x)}$ ».

En particulier, pour montrer qu'une proposition « $(\forall x \in E) : P(x)$ » est fausse, il suffit de trouver un élément x_0 de E tel que $P(x_0)$ soit fausse : un tel élément est un **contre-exemple**.

Méthode : écrire une négation

1. **Lis** la proposition de gauche à droite : d'abord les quantificateurs, puis la phrase qui les suit.
2. **Retourne** chaque quantificateur : « pour tout » devient « il existe », et inversement. Garde les mêmes ensembles, dans le même ordre.
3. **Nie** la phrase finale : « et » et « ou » s'échangent, $=$ devient $\neq$, $<$ devient $\geq$, et « si A, alors B » devient « A et $\overline{B}$ ».
4. **Contrôle** : une proposition et sa négation n'ont jamais la même valeur de vérité.

Exemple

Énoncé. Nie $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x \leq y^2$.

Négation. On retourne les deux quantificateurs, puis on nie l'inégalité :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x > y^2.$$

Valeurs. La proposition est vraie : $x = -1$ convient, car un carré n'est jamais négatif. Sa négation est donc fausse.

Méthode : réfuter par un contre-exemple

1. **Repère** le « pour tout » et l'ensemble E dans lequel varie la lettre.
2. **Teste** des valeurs variées : petites, nulles, négatives, non entières, selon E.
3. **Écris** l'élément trouvé, vérifie qu'il appartient à E, et montre par un calcul que la propriété est fausse pour lui.
4. **Conclus** : la proposition universelle est fausse. Un seul élément suffit.

Exemple

Énoncé. La proposition « $(\forall n \in \mathbb{N})$: $2^n + 1$ est premier » est-elle vraie ?

Essais. Pour $n = 0$, 1 et 2, on obtient 2, 3 et 5, qui sont premiers.

Contre-exemple. Pour $n = 3$, $2^3 + 1 = 9 = 3 \times 3$ n'est pas premier. La proposition est fausse.

Attention : Trois essais ne font pas une démonstration

Dans l'exemple précédent, trois essais réussis ne prouvaient rien : la quatrième valeur met la proposition en défaut. Pour établir un « pour tout », il faut un raisonnement valable pour chaque élément de l'ensemble. Pour le réfuter, un seul élément suffit.

Contraposée, équivalences successives

Méthode : raisonner par contraposée

1. **Écris** l'implication à démontrer, $P \Rightarrow Q$.
2. **Forme** sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$, en niant avec soin chaque morceau.
3. **Annonce** : « Raisonnons par contraposée. » Écris « Supposons $\overline{Q}$ », puis déduis $\overline{P}$.
4. **Termine** en citant la contraposée : l'implication de départ est démontrée.

Exemple

Énoncé. Soit a et b deux entiers. Si ab est impair, alors a et b sont impairs.

Contraposée. Avec les lois de Morgan : si a est pair ou b est pair, alors ab est pair.

Rédaction. Raisonnons par contraposée : supposons a pair ou b pair. Si a est pair, alors $a = 2k$ avec k entier, donc $ab = 2(kb)$ est pair. Si b est pair, on conclut de la même façon.

Conclusion. La contraposée est vraie, donc l'implication aussi : si ab est impair, alors a et b sont impairs.

Méthode **: enchaîner des équivalences**

1. **Transforme** la proposition pas à pas, et écris $\Leftrightarrow$ entre deux lignes.
2. **Justifie** chaque pas : on peut ajouter le même réel des deux côtés, factoriser, ou multiplier par un réel différent de zéro.
3. **Surveille le signe** : multiplier une inégalité par un nombre négatif change son sens.
4. **Si un pas ne se renverse pas**, écris $\Rightarrow$ et contrôle ensuite les solutions trouvées.

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x + 1 > 7$.

Équivalences. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} & -2x + 1 > 7 \\ \Leftrightarrow\ & -2x > 6 \\ \Leftrightarrow\ & x < -3. \end{aligned}$$

On a retranché 1 aux deux membres, puis divisé par -2, qui est négatif : le sens de l'inégalité change.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $]-\infty, -3[$.

Attention **: Un pas qui ne se renverse pas**

$x = -3$ implique $x^2 = 9$. Mais $x^2 = 9$ n'implique pas $x = -3$, car $x = 3$ convient aussi.

Passer au carré garde l'équivalence lorsque les deux membres sont positifs ou nuls : pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$. Sinon, écris $\Rightarrow$ et contrôle les solutions.

Diviser par une expression qui peut s'annuler pose le même problème.

Disjonction des cas, raisonnement par l'absurde

Propriété **: Raisonnement par disjonction des cas**

Soit P, Q et R trois propositions. Si les implications $P \Rightarrow R$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, et si la proposition « P ou Q » est vraie, alors R est vraie.

En particulier, comme « P ou $\overline{P}$ » est toujours vraie, si $P \Rightarrow R$ et $\overline{P} \Rightarrow R$ sont vraies, alors R est vraie : on démontre R dans le cas où P est vraie, puis dans le cas où P est fausse.

Méthode : traiter tous les cas

1. **Découpe** en cas qui ne laissent rien de côté : pair ou impair, positif ou négatif, reste d'une division.
2. **Annonce** la liste des cas avant de commencer.
3. **Traite** chaque cas avec ce qu'il t'apporte : une écriture $n = 2k$, une valeur absolue sans barres.
4. **Conclus** en rappelant que les cas couvrent toutes les possibilités.

Exemple

Énoncé. Pour tout réel x, $|x| + x \geq 0$.

Deux cas, qui couvrent tous les réels. Soit x un réel.

- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et $|x| + x = 2x \geq 0$.
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $|x| + x = 0$.

Conclusion. Dans les deux cas, $|x| + x \geq 0$: l'inégalité est vraie pour tout réel x.

Propriété : Raisonnement par l'absurde

Soit P et Q deux propositions. Si l'implication $\overline{P} \Rightarrow \left(Q \text{ et } \overline{Q}\right)$ est vraie, alors P est vraie.

Ainsi, pour démontrer P, on peut supposer que P est fausse et en déduire une **contradiction**, c'est-à-dire une proposition de la forme « Q et $\overline{Q}$ », qui est toujours fausse.

Méthode : raisonner par l'absurde

1. **Annonce** : « Supposons par l'absurde que P est fausse. »
2. **Exploite** cette hypothèse par des déductions justifiées.
3. **Repère** la contradiction et dis contre quoi elle se heurte : une donnée, un résultat connu, l'hypothèse elle-même.
4. **Conclus** que P est vraie.

Exemple

Énoncé. Il n'existe pas de plus grand entier pair.

Rédaction. Supposons par l'absurde qu'il existe un plus grand entier pair p. On écrit $p = 2k$, avec k entier.

Alors $p + 2 = 2(k + 1)$ est pair. Or $p + 2 > p$: cela contredit le choix de p.

Conclusion. Aucun entier pair n'est le plus grand.

Raisonnement par récurrence

Théorème : Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et $P(n)$ une fonction propositionnelle définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. Si :

- $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) ;
- pour tout entier naturel $n \geq n_0$, l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie (**hérédité**) ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Méthode : rédiger une récurrence

1. **Pose** la propriété $P(n)$ et son premier rang n_0.
2. **Initialisation** : calcule les deux membres pour $n = n_0$ et compare-les.
3. **Hérédité** : « Soit $n \geq n_0$ un entier ; supposons $P(n)$ vraie. » C'est l'hypothèse de récurrence. Montre $P(n+1)$ et signale où tu l'utilises.
4. **Conclusion** : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple

Énoncé. Pour tout entier naturel n, 8 divise $9^n - 1$.

Initialisation. Pour $n = 0$, $9^0 - 1 = 0 = 8 \times 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $9^n - 1 = 8k$, avec k entier : c'est l'hypothèse de récurrence. Alors $9^n = 8k + 1$, et :

$$\begin{aligned} 9^{n+1} - 1 &= 9 \times 9^n - 1 \\ &= 9(8k + 1) - 1 \\ &= 8(9k + 1). \end{aligned}$$

Comme $9k + 1$ est entier, 8 divise $9^{n+1} - 1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, 8 divise $9^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention : Pas de récurrence sans initialisation

Soit $P(n)$: « 9 divise $10^n + 1$ ». Si $10^n + 1 = 9k$, alors :

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10(10^n + 1) - 9 \\ &= 9(10k - 1). \end{aligned}$$

L'hérédité est donc vraie. Pourtant $P(0)$ est fausse, car $10^0 + 1 = 2$. En fait, $P(n)$ n'est vraie pour aucun entier.

Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien.

Choisir son raisonnement

Méthode : Quel raisonnement pour quelle forme d'énoncé ?

Lis d'abord la forme de l'énoncé : elle indique le raisonnement à tenter.

Forme de l'énoncé	Raisonnement	Première ligne
si A, alors B, avec A facile à exploiter	direct	« Supposons A. Montrons B. »
si A, alors B, avec $\overline{B}$ plus simple que A	par contraposée	« Raisonnons par contraposée. Supposons $\overline{B}$. »
une équation, une inéquation, « A si et seulement si B »	par équivalences successives, ou par deux implications	« $A \Leftrightarrow \ldots$ »
une propriété liée à la parité, au signe, à une valeur absolue	par disjonction des cas	« Distinguons deux cas. »
« … n'est pas … », « il n'existe aucun … »	par l'absurde	« Supposons par l'absurde que… »
pour tout entier $n \geq n_0$: égalité, inégalité, divisibilité	par récurrence	« Initialisation. »
un « pour tout » que tu crois faux	contre-exemple	« Pour $x = \ldots$, on obtient… »
un « il existe »	exhiber un élément	« Le nombre … convient, car… »

Si une voie bloque, essaie la suivante.

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, annonce le raisonnement choisi : « par contraposée », « par l'absurde », « distinguons les cas ». Introduis chaque objet par « Soit » et chaque hypothèse par « Supposons ». Justifie chaque pas par « car » ou par le nom de la règle employée. Titre les trois étapes d'une récurrence. Termine par une phrase qui reprend l'énoncé.

Remarque : Contrôler et prolonger

Avant de démontrer, teste l'énoncé sur deux ou trois valeurs : un contre-exemple t'évite de chercher une preuve impossible. Après, relis chaque « donc » et demande-toi s'il se renverse. La récurrence resservira en 2BAC, et à l'examen de 2BAC SE.