BURHAN

Notions de logique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/notions-de-logique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une implication et un produit de facteurs

Pour tout réel x, on considère les propositions $P(x)$: « $x > 2$ » et $Q(x)$: « $x^2 - 3x + 2 > 0$ ».

1. 0,75 pts

a) Donner la valeur de vérité de $P(3)$, $Q(3)$, $P(0)$ et $Q(0)$.

b) En déduire la valeur de vérité de $P(0) \Rightarrow Q(0)$ et de $Q(0) \Rightarrow P(0)$.

INDICE

Outil : un calcul, puis la définition de l'implication. **Début :** remplace x par 3, puis par 0, dans $x^2 - 3x + 2$. **Point délicat :** une implication dont l'hypothèse est fausse est vraie.

2. 1,25 pts

a) Vérifier que, pour tout réel x, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

b) Soit x un réel tel que $x > 2$. Donner le signe de $x - 2$, puis celui de $x - 1$.

c) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ est vraie.

INDICE

Outil : le développement d'un produit, puis la règle des signes. **Début :** développe $(x - 1)(x - 2)$. **Point délicat :** pour le signe de $x - 1$, compare x à 1 en passant par 2.

3. 1 pts

a) Écrire la réciproque de la proposition démontrée à la question 2, sous la forme d'une proposition quantifiée.

b) À l'aide de la question 1, montrer que cette réciproque est fausse.

c) Compléter par « nécessaire » ou « suffisante » : « $x > 2$ est une condition … pour que $x^2 - 3x + 2 > 0$ ». Cette condition est-elle aussi de l'autre type ?

INDICE

Outil : la réciproque échange $P(x)$ et $Q(x)$; pour réfuter un « pour tout », un seul réel suffit. **Début :** relis la question 1. b). **Point délicat :** une condition nécessaire est la conclusion d'une implication vraie.

4. 1,25 pts

On veut montrer que, pour tout réel x, $Q(x)$ est vraie si et seulement si $x < 1$ ou $x > 2$. On utilise la factorisation de la question 2.

a) Traiter le cas $x > 2$.

b) Traiter le cas $x < 1$, en donnant le signe de $x - 1$ et de $x - 2$.

c) Traiter le cas $1 \leq x \leq 2$.

d) Conclure.

INDICE

Outil : la disjonction des cas, avec la règle des signes d'un produit. **Début :** vérifie d'abord que les trois cas couvrent tous les réels. **Point délicat :** dans le troisième cas, le produit peut être nul : $Q(x)$ demande une inégalité stricte.

5. 0,75 pts

a) Pour un réel x, écrire la contraposée de l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$, sans barre de négation.

b) Écrire la négation de $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big)$. En déduire, avec la question 4, l'ensemble des réels x qui vérifient à la fois $Q(x)$ et $\overline{P(x)}$.

INDICE

Outil : la contraposée, puis la négation d'une proposition quantifiée. **Début :** le contraire de $x > 2$ est $x \leq 2$. **Point délicat :** la négation de $A \Rightarrow B$ est « A et $\overline{B}$ ».

Exercice 2 5 pts

Valeurs absolues : cas, équivalences et absurde

1. 1,5 pts

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-4| = 2x+1$.

a) On suppose $x \geq 4$. Écrire l'équation sans valeur absolue, la résoudre, et dire si la valeur trouvée convient.

b) Même question si $x < 4$.

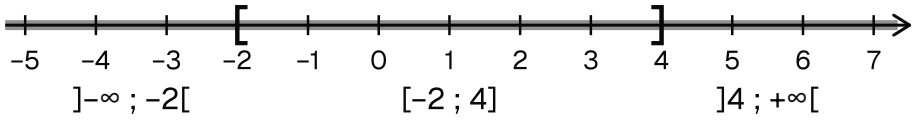
c) Conclure.

INDICE

Outil : la disjonction des cas selon le signe de $x-4$. **Début :** si $x \geq 4$, alors $|x-4| = x-4$. **Point délicat :** une valeur trouvée dans un cas ne convient que si elle vérifie la condition de ce cas.

2. 1,5 pts

Montrer que, pour tout réel x, $|x-4| + |x+2| \geq 6$. On distinguera les cas $x < -2$, $-2 \leq x \leq 4$ et $x > 4$, et on écrira dans chaque cas la somme sans valeur absolue.



Les trois cas de la question : avant -2, de -2 à 4, après 4.

INDICE

Outil : la disjonction des cas, avec $|A| = A$ si $A \geq 0$ et $|A| = -A$ si $A < 0$. **Début :** dans chaque cas, donne le signe de $x-4$ et de $x+2$. **Point délicat :** dans le premier cas, multiplier $x < -2$ par -2 change le sens.

3. 1 pts

En déduire que l'équation $|x-4| + |x+2| = 5$ n'a aucune solution réelle. Rédiger par l'absurde.

INDICE

Outil : le raisonnement par l'absurde. **Début :** « Supposons par l'absurde qu'il existe un réel x tel que… » **Point délicat :** nomme la contradiction obtenue avec la question 2.

4. 1 pts

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $|x-4| + |x+2| = 6$.

INDICE

Outil : reprends les trois cas de la question 2. **Début :** dans quels cas l'inégalité obtenue est-elle stricte ?

Exercice 3 — 5 pts

Sommes d'entiers et récurrence

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la proposition : « $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

1. — 0,75 pts

Vérifier que $P(1)$ et $P(4)$ sont vraies.

INDICE

Outil : calcule les deux membres.

2. — 1,5 pts

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

a) Rédiger l'initialisation.

b) Pour l'hérédité, écrire $1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$ à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

c) Mettre $n + 1$ en facteur et conclure.

INDICE

Outil : le principe de récurrence, à partir du rang 1. **Début :** « Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. » **Point délicat :** $n + 1$ est un facteur commun des deux termes.

3. — 0,5 pts

a) En déduire la valeur de $1 + 2 + \cdots + 200$.

b) La proposition « pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n$ est pair » est-elle vraie ?

INDICE

Outil : la question 2 avec $n = 200$, puis un contre-exemple. **Début :** calcule la somme pour $n = 1$ et $n = 2$.

4. — 1,5 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Dans l'hérédité, on mettra $\dfrac{(n+1)^2}{4}$ en facteur et on reconnaîtra une identité remarquable.

INDICE

Outil : le principe de récurrence. **Début :** ajoute $(n+1)^3$ aux deux membres de l'hypothèse de récurrence. **Point délicat :** après la mise en facteur, compare $n^2 + 4n + 4$ au développement d'un carré $(n + a)^2$.

5. — 0,75 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. Vérifier cette égalité pour $n = 3$.

INDICE

Outil : les questions 2 et 4. **Début :** élève au carré l'égalité $P(n)$.

Exercice 4 — 5 pts

Une inégalité par équivalences successives

1. — 1,25 pts

a) Montrer, par équivalences successives, que pour tous réels a et b : $a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. En déduire que $a^2+b^2 \geq 2ab$ pour tous réels a et b.

b) Montrer de même que $a^2+b^2=2ab$ si et seulement si $a=b$.

INDICE

Outil : les équivalences successives : ajouter un même réel aux deux membres donne une relation équivalente. **Début :** retranche $2ab$ aux deux membres. **Point délicat :** un carré est positif ou nul, et il n'est nul que si le réel élevé au carré est nul.

2. — 1,25 pts

Soit x un réel strictement positif.

a) Montrer que $x+\dfrac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2x$.

b) En déduire, avec la question 1, que $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$, et que $x+\dfrac{1}{x}=2$ si et seulement si $x=1$.

INDICE

Outil : multiplier les deux membres d'une inégalité par un même réel strictement positif donne une inégalité équivalente. **Début :** multiplie les deux membres par x. **Point délicat :** choisis a et b dans la question 1 pour obtenir x^2+1 et $2x$.

3. — 1 pts

a) Compléter par « nécessaire », « suffisante » ou « nécessaire et suffisante » : pour un réel $x>0$, « $x=1$ » est une condition … pour que $x+\dfrac{1}{x}=2$.

b) La proposition $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\left(x \neq 0 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x} \geq 2\right)$ est-elle vraie ? Justifier.

INDICE

Outil : la question 2. b), puis un contre-exemple. **Début :** une équivalence vraie donne deux implications vraies. **Point délicat :** la question 2 ne porte que sur les réels strictement positifs : essaie un réel négatif.

4. 1,5 pts

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) Vérifier que $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

b) En déduire, avec la question 2 appliquée au réel $\frac{x}{y}$, que $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4$, puis que l'égalité a lieu si et seulement si $x=y$.

c) Écrire la contraposée de l'implication « si $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=4$, alors $x=y$ ». Pour $x=1$ et $y=3$, calculer ce produit et vérifier ce résultat.

INDICE

Outil : le développement d'un produit, puis la question 2. **Début :** remarque que $\frac{y}{x}$ est l'inverse de $\frac{x}{y}$. **Point délicat :** $\frac{x}{y}=1$ équivaut à $x=y$, car $y\neq 0$.

Exercice 5 5 pts

Puissances de deux et carrés : une récurrence à partir d'un rang

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $2^n \geq n^2$ ».

1. 0,75 pts

a) Calculer 2^n et n^2 pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Pour lesquelles de ces valeurs $P(n)$ est-elle vraie ?

b) La proposition $(\forall n \in \mathbb{N})$: $P(n)$ est-elle vraie ?

INDICE

Outil : un calcul, puis un contre-exemple. **Début :** $2^0 = 1$. **Point délicat :** pour réfuter un « pour tout », un seul entier suffit.

2. 1 pts

Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

a) Vérifier que $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$.

b) En déduire que $n^2 \geq 2n + 1$.

INDICE

Outil : une identité remarquable, puis les propriétés de l'ordre. **Début :** développe $(n-1)^2$. **Point délicat :** de $n \geq 3$, tire d'abord une minoration de $n - 1$, qui est positif.

3. 1,5 pts

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$.

a) Rédiger l'initialisation au rang 4.

b) Pour l'hérédité, soit $n \geq 4$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie : montrer que $2^{n+1} \geq 2n^2$, puis utiliser la question 2 pour conclure.

INDICE

Outil : le principe de récurrence, à partir du rang 4. **Début :** $2^{n+1} = 2 \times 2^n$. **Point délicat :** écris $2n^2 = n^2 + n^2$, et vérifie que la question 2 s'applique, car $n \geq 4 \geq 3$.

4. 1 pts

a) Écrire la négation de la proposition $(\forall n \in \mathbb{N})$: $P(n)$.

b) En déduire, avec les questions 1 et 3, que $(\exists! n \in \mathbb{N})$: $2^n < n^2$, et donner cet entier.

INDICE

Outil : la négation d'une proposition quantifiée, puis la disjonction des cas. **Début :** distingue les cas $n \leq 3$ et $n \geq 4$. **Point délicat :** « il existe un unique » demande l'existence et l'unicité.

5. 0,75 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 4$, $4^n \geq n^4$. Cette inégalité est-elle vraie pour $n = 3$?

INDICE

Outil : la question 3, puis le passage au carré. **Début :** écris $4^n = (2^n)^2$ et $n^4 = \left(n^2\right)^2$. **Point délicat :** élever au carré conserve l'ordre de deux réels positifs.