BURHAN

Notions de logique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-experimentales/mathematiques/notions-de-logique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Notions de logique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une implication et un produit de facteurs

Pour tout réel x, on considère les propositions $P(x)$: « $x > 2$ » et $Q(x)$: « $x^2 - 3x + 2 > 0$ ».

1. 0,75 pts

a) Donner la valeur de vérité de $P(3)$, $Q(3)$, $P(0)$ et $Q(0)$.

b) En déduire la valeur de vérité de $P(0) \Rightarrow Q(0)$ et de $Q(0) \Rightarrow P(0)$.

INDICE

Outil : un calcul, puis la définition de l'implication. **Début :** remplace x par 3, puis par 0, dans $x^2 - 3x + 2$. **Point délicat :** une implication dont l'hypothèse est fausse est vraie.

CORRIGÉ

a) **Valeurs en 3.** On a $3 > 2$, donc $P(3)$ est vraie. De plus, $3^2 - 3 \times 3 + 2 = 9 - 9 + 2 = 2 > 0$, donc $Q(3)$ est vraie.

Valeurs en 0. L'inégalité $0 > 2$ est fausse, donc $P(0)$ est fausse. De plus, $0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2 > 0$, donc $Q(0)$ est vraie.

b) $P(0) \Rightarrow Q(0)$ est vraie, car son hypothèse $P(0)$ est fausse. $Q(0) \Rightarrow P(0)$ est fausse : son hypothèse $Q(0)$ est vraie et sa conclusion $P(0)$ est fausse.

Conclusion. $P(3)$, $Q(3)$ et $Q(0)$ sont vraies et $P(0)$ est fausse ; $P(0) \Rightarrow Q(0)$ est vraie et $Q(0) \Rightarrow P(0)$ est fausse.

2. 1,25 pts

a) Vérifier que, pour tout réel x, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

b) Soit x un réel tel que $x > 2$. Donner le signe de $x-2$, puis celui de $x-1$.

c) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ est vraie.

INDICE

Outil : le développement d'un produit, puis la règle des signes. **Début :** développe $(x-1)(x-2)$. **Point délicat :** pour le signe de $x-1$, compare x à 1 en passant par 2.

CORRIGÉ

a) Soit x un réel. On développe :

$$\begin{aligned}&(x-1)(x-2)\\&= x^2 - 2x - x + 2\\&= x^2 - 3x + 2.\end{aligned}$$

b) Soit x un réel tel que $x > 2$. Alors $x - 2 > 0$. De plus, $x > 2 > 1$, donc $x - 1 > 0$.

c) Soit x un réel tel que $P(x)$ soit vraie, c'est-à-dire $x > 2$. D'après b), $x - 1 > 0$ et $x - 2 > 0$. D'après la règle des signes et a), le produit de ces deux facteurs strictement positifs vérifie $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) > 0$: $Q(x)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout réel x, si $P(x)$ est vraie, alors $Q(x)$ est vraie : la proposition $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ est vraie.

3. 1 pts

a) Écrire la réciproque de la proposition démontrée à la question 2, sous la forme d'une proposition quantifiée.

b) À l'aide de la question 1, montrer que cette réciproque est fausse.

c) Compléter par « nécessaire » ou « suffisante » : « $x > 2$ est une condition … pour que $x^2 - 3x + 2 > 0$ ». Cette condition est-elle aussi de l'autre type ?

INDICE

Outil : la réciproque échange $P(x)$ et $Q(x)$; pour réfuter un « pour tout », un seul réel suffit. **Début :** relis la question 1. b). **Point délicat :** une condition nécessaire est la conclusion d'une implication vraie.

CORRIGÉ

a) La réciproque échange $P(x)$ et $Q(x)$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big)$$

c'est-à-dire : pour tout réel x, si $x^2 - 3x + 2 > 0$, alors $x > 2$.

b) D'après la question 1, $Q(0)$ est vraie et $P(0)$ est fausse : l'implication $Q(0) \Rightarrow P(0)$ est fausse. Le réel 0 est un contre-exemple, donc la réciproque est fausse.

c) **Condition suffisante.** D'après la question 2, l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est vraie pour tout réel x : « $x > 2$ » est une condition **suffisante** pour que $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Condition non nécessaire. Le réel 0 vérifie $0^2 - 3 \times 0 + 2 > 0$ sans vérifier $0 > 2$: la condition n'est pas nécessaire.

Conclusion. La réciproque est fausse ; « $x > 2$ » est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que $x^2 - 3x + 2 > 0$.

4. 1,25 pts

On veut montrer que, pour tout réel x, $Q(x)$ est vraie si et seulement si $x < 1$ ou $x > 2$. On utilise la factorisation de la question 2.

a) Traiter le cas $x > 2$.

b) Traiter le cas $x < 1$, en donnant le signe de $x - 1$ et de $x - 2$.

c) Traiter le cas $1 \leq x \leq 2$.

d) Conclure.

INDICE

Outil : la disjonction des cas, avec la règle des signes d'un produit. **Début :** vérifie d'abord que les trois cas couvrent tous les réels. **Point délicat :** dans le troisième cas, le produit peut être nul : $Q(x)$ demande une inégalité stricte.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Les trois cas $x > 2$, $x < 1$ et $1 \leq x \leq 2$ couvrent tous les réels. On utilise la factorisation $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ et la règle des signes d'un produit.

a) **Cas $x > 2$.** D'après la question 2, $Q(x)$ est vraie.

b) **Cas $x < 1$.** Alors $x - 1 < 0$ et, comme $x < 1 < 2$, $x - 2 < 0$. Un produit de deux réels strictement négatifs est strictement positif : $(x - 1)(x - 2) > 0$, donc $Q(x)$ est vraie.

c) **Cas $1 \leq x \leq 2$.** Alors $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$. Le produit $(x - 1)(x - 2)$ est négatif ou nul ; comme $Q(x)$ demande une inégalité stricte, $Q(x)$ est fausse.

d) **Sens direct.** D'après a) et b), si $x < 1$ ou $x > 2$, alors $Q(x)$ est vraie.

Réciproque. Si $Q(x)$ est vraie, alors x n'est pas dans le cas c). Comme les trois cas couvrent tous les réels, $x < 1$ ou $x > 2$.

Conclusion. Pour tout réel x, $Q(x)$ est vraie si et seulement si $x < 1$ ou $x > 2$.

5. 0,75 pts

a) Pour un réel x, écrire la contraposée de l'implication $P(x) \Rightarrow Q(x)$, sans barre de négation.

b) Écrire la négation de $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big)$. En déduire, avec la question 4, l'ensemble des réels x qui vérifient à la fois $Q(x)$ et $\overline{P(x)}$.

INDICE

Outil : la contraposée, puis la négation d'une proposition quantifiée. **Début :** le contraire de $x > 2$ est $x \leq 2$. **Point délicat :** la négation de $A \Rightarrow B$ est « A et $\overline{B}$ ».

CORRIGÉ

a) La contraposée de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ est $\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$. Le contraire de $x^2 - 3x + 2 > 0$ est $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, et celui de $x > 2$ est $x \leq 2$. La contraposée s'écrit donc : si $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, alors $x \leq 2$.

b) **Négation.** La négation d'un « pour tout » est un « il existe », et la négation de $Q(x) \Rightarrow P(x)$ est « $Q(x)$ et $\overline{P(x)}$ ». La négation demandée est :

$$(\exists x \in \mathbb{R}) :\\ \big(x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ et } x \leq 2\big).$$

Ensemble cherché. D'après la question 4, $Q(x)$ est vraie si et seulement si $x < 1$ ou $x > 2$. Si de plus $x \leq 2$, le cas $x > 2$ est exclu et il reste $x < 1$. Réciproquement, tout réel $x < 1$ vérifie $Q(x)$ et $x \leq 2$.

Conclusion. Les réels qui vérifient à la fois $Q(x)$ et $\overline{P(x)}$ forment l'intervalle $]-\infty, 1[$; le réel 0 de la question 1 en fait partie.

Exercice 2 5 pts

Valeurs absolues : cas, équivalences et absurde

1. 1,5 pts

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-4| = 2x+1$.

a) On suppose $x \geq 4$. Écrire l'équation sans valeur absolue, la résoudre, et dire si la valeur trouvée convient.

b) Même question si $x < 4$.

c) Conclure.

INDICE

Outil : la disjonction des cas selon le signe de $x-4$. **Début :** si $x \geq 4$, alors $|x-4| = x-4$. **Point délicat :** une valeur trouvée dans un cas ne convient que si elle vérifie la condition de ce cas.

CORRIGÉ

Distinguons deux cas selon le signe de $x-4$; ils couvrent tous les réels.

a) **Cas $x \geq 4$.** Alors $x-4 \geq 0$, donc $|x-4| = x-4$, et :

$$x-4 = 2x+1 \Leftrightarrow x = -5.$$

Or $-5 < 4$: la valeur -5 ne vérifie pas la condition du cas. Ce cas ne donne aucune solution.

b) **Cas $x < 4$.** Alors $x-4 < 0$, donc $|x-4| = 4-x$, et :

$$\begin{aligned} 4-x = 2x+1 &\Leftrightarrow 3 = 3x \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

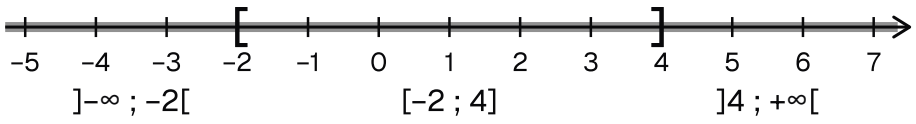
Comme $1 < 4$, la valeur 1 convient.

c) **Conclusion.** L'ensemble des solutions de $|x-4| = 2x+1$ est $S = \{1\}$.

Contrôle. $|1-4| = 3$ et $2 \times 1 + 1 = 3$.

2. 1,5 pts

Montrer que, pour tout réel x, $|x-4|+|x+2| \geq 6$. On distinguera les cas $x<-2$, $-2 \leq x \leq 4$ et $x>4$, et on écrira dans chaque cas la somme sans valeur absolue.



Les trois cas de la question : avant -2, de -2 à 4, après 4.

INDICE

Outil : la disjonction des cas, avec $|A|=A$ si $A \geq 0$ et $|A|=-A$ si $A<0$. **Début :** dans chaque cas, donne le signe de $x-4$ et de $x+2$. **Point délicat :** dans le premier cas, multiplier $x<-2$ par -2 change le sens.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Les trois cas $x<-2$, $-2 \leq x \leq 4$ et $x>4$ couvrent tous les réels.

Cas $x<-2$. Alors $x-4<0$ et $x+2<0$, donc :

$$\begin{aligned} &|x-4|+|x+2| \\ &=-(x-4)-(x+2) \\ &=-2x+2. \end{aligned}$$

En multipliant $x<-2$ par -2, qui est négatif, on change le sens : $-2x>4$, donc $-2x+2>6$.

Cas $-2 \leq x \leq 4$. Alors $x-4 \leq 0$ et $x+2 \geq 0$, donc :

$$\begin{aligned} &|x-4|+|x+2| \\ &=(4-x)+(x+2) \\ &=6. \end{aligned}$$

Cas $x>4$. Alors $x-4>0$ et $x+2>0$, donc :

$$\begin{aligned} &|x-4|+|x+2| \\ &=(x-4)+(x+2) \\ &=2x-2. \end{aligned}$$

Comme $x>4$, on a $2x>8$, donc $2x-2>6$.

Conclusion. Dans les trois cas, la somme est supérieure ou égale à 6 : pour tout réel x, $|x-4|+|x+2| \geq 6$.

3. 1 pts

En déduire que l'équation $|x-4|+|x+2|=5$ n'a aucune solution réelle. Rédiger par l'absurde.

INDICE

Outil : le raisonnement par l'absurde. **Début :** « Supposons par l'absurde qu'il existe un réel x tel que… » **Point délicat :** nomme la contradiction obtenue avec la question 2.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde qu'il existe un réel x tel que $|x-4|+|x+2|=5$.

D'après la question 2, ce même réel vérifie $|x-4|+|x+2|\geq 6$. On aurait alors $5\geq 6$, ce qui est faux : c'est une contradiction.

Conclusion. L'hypothèse est absurde : l'équation $|x-4|+|x+2|=5$ n'a aucune solution réelle.

4. 1 pts

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $|x-4|+|x+2|=6$.

INDICE

Outil : reprends les trois cas de la question 2. **Début :** dans quels cas l'inégalité obtenue est-elle stricte ?

CORRIGÉ

On reprend les trois cas de la question 2, qui couvrent tous les réels.

- Si $x<-2$, la somme vaut $-2x+2$, qui est strictement supérieur à 6 : l'égalité est fausse.
- Si $-2\leq x\leq 4$, la somme vaut exactement 6 : l'égalité est vraie.
- Si $x>4$, la somme vaut $2x-2$, qui est strictement supérieur à 6 : l'égalité est fausse.

Conclusion. L'ensemble des réels x tels que $|x-4|+|x+2|=6$ est l'intervalle $[-2,4]$.

Exercice 3 5 pts

Sommes d'entiers et récurrence

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la proposition : « $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

1. 0,75 pts

Vérifier que $P(1)$ et $P(4)$ sont vraies.

INDICE

Outil : calcule les deux membres.

CORRIGÉ

- **Pour $n = 1$.** Le membre de gauche vaut 1, et $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.
- **Pour $n = 4$.** $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, et $\dfrac{4 \times 5}{2} = 10$.

Conclusion. $P(1)$ et $P(4)$ sont vraies.

2. 1,5 pts

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

a) Rédiger l'initialisation.

b) Pour l'hérédité, écrire $1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$ à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

c) Mettre $n+1$ en facteur et conclure.

INDICE

Outil : le principe de récurrence, à partir du rang 1. **Début :** « Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie. » **Point délicat :** $n+1$ est un facteur commun des deux termes.

CORRIGÉ

a) **Initialisation.** D'après la question 1, $P(1)$ est vraie.

b) **Hérédité.** Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie (hypothèse de récurrence) :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On ajoute $n+1$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1). \end{aligned}$$

c) On met $n+1$ en facteur :

$$\begin{aligned} &\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \times \frac{n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Comme $n+2 = (n+1)+1$, c'est exactement $P(n+1)$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

3. 0,5 pts

a) En déduire la valeur de $1 + 2 + \cdots + 200$.

b) La proposition « pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n$ est pair » est-elle vraie ?

INDICE

Outil : la question 2 avec $n = 200$, puis un contre-exemple. **Début :** calcule la somme pour $n = 1$ et $n = 2$.

CORRIGÉ

a) D'après la question 2, la formule s'applique avec $n = 200$:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \cdots + 200 \\ &= \frac{200 \times 201}{2} \\ &= 20100. \end{aligned}$$

b) Pour $n = 2$, on a $1 + 2 = 3$, qui est impair : l'entier 2 est un contre-exemple.

Conclusion. La somme $1 + 2 + \cdots + 200$ vaut 20100 ; la proposition « pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n$ est pair » est fausse.

4. 1,5 pts

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Dans l'hérédité, on mettra $\dfrac{(n+1)^2}{4}$ en facteur et on reconnaîtra une identité remarquable.

INDICE

Outil : le principe de récurrence. **Début :** ajoute $(n+1)^3$ aux deux membres de l'hypothèse de récurrence. **Point délicat :** après la mise en facteur, compare $n^2 + 4n + 4$ au développement d'un carré $(n+a)^2$.

CORRIGÉ

Initialisation. Pour $n = 1$: $1^3 = 1$ et $\dfrac{1^2 \times 2^2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$. L'égalité est vraie au rang 1.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que (hypothèse de récurrence) :

$$1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

On ajoute $(n+1)^3$ aux deux membres, puis on met $\dfrac{(n+1)^2}{4}$ en facteur, avec $(n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2}{4} \times 4(n+1)$:

$$\begin{aligned} &1^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de l'identité remarquable $n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. On obtient l'égalité au rang $n+1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5. 0,75 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. Vérifier cette égalité pour $n = 3$.

INDICE

Outil : les questions 2 et 4. **Début :** élève au carré l'égalité $P(n)$.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 1$ un entier. D'après la question 2, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. En élevant au carré :

$$\begin{aligned}(1 + 2 + \cdots + n)^2 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

D'après la question 4, ce nombre est aussi égal à $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Pour $n = 3$. $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ et $(1 + 2 + 3)^2 = 6^2 = 36$.

Exercice 4 5 pts

Une inégalité par équivalences successives

1. 1,25 pts

a) Montrer, par équivalences successives, que pour tous réels a et b : $a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. En déduire que $a^2+b^2 \geq 2ab$ pour tous réels a et b.

b) Montrer de même que $a^2+b^2=2ab$ si et seulement si $a=b$.

INDICE

Outil : les équivalences successives : ajouter un même réel aux deux membres donne une relation équivalente. **Début :** retranche $2ab$ aux deux membres. **Point délicat :** un carré est positif ou nul, et il n'est nul que si le réel élevé au carré est nul.

CORRIGÉ

a) Soient a et b deux réels. Retrancher $2ab$ aux deux membres donne une inégalité équivalente ; on reconnaît ensuite l'identité $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

$$\begin{aligned} & a^2+b^2 \geq 2ab \\ \Leftrightarrow\ & a^2-2ab+b^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Un carré est positif ou nul : la dernière inégalité est vraie, donc la première aussi.

Conclusion. Pour tous réels a et b, $a^2+b^2 \geq 2ab$.

b) De même, en retranchant $2ab$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} & a^2+b^2=2ab \\ \Leftrightarrow\ & (a-b)^2=0 \\ \Leftrightarrow\ & a-b=0 \\ \Leftrightarrow\ & a=b. \end{aligned}$$

La deuxième équivalence vient de ce qu'un carré est nul si et seulement si le réel élevé au carré est nul.

Conclusion. Pour tous réels a et b, $a^2+b^2=2ab$ si et seulement si $a=b$.

2. 1,25 pts

Soit x un réel strictement positif.

a) Montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$.

b) En déduire, avec la question 1, que $x + \frac{1}{x} \geq 2$, et que $x + \frac{1}{x} = 2$ si et seulement si $x = 1$.

INDICE

Outil : multiplier les deux membres d'une inégalité par un même réel strictement positif donne une inégalité équivalente. **Début :** multiplie les deux membres par x. **Point délicat :** choisis a et b dans la question 1 pour obtenir $x^2 + 1$ et $2x$.

CORRIGÉ

a) Comme $x > 0$, multiplier les deux membres d'une inégalité par x donne une inégalité équivalente (on revient en divisant par x). Avec $x \times \frac{1}{x} = 1$:

$$\begin{aligned} & x + \frac{1}{x} \geq 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 1 \geq 2x. \end{aligned}$$

b) **Inégalité.** La question 1. a), appliquée à $a = x$ et $b = 1$, donne $x^2 + 1^2 \geq 2 \times x \times 1$, soit $x^2 + 1 \geq 2x$. D'après a), $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Cas d'égalité. Pour la même raison qu'en a), $x + \frac{1}{x} = 2$ équivaut à $x^2 + 1 = 2x$. La question 1. b), avec $a = x$ et $b = 1$, montre que $x^2 + 1 = 2x$ si et seulement si $x = 1$.

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, et $x + \frac{1}{x} = 2$ si et seulement si $x = 1$.

3. 1 pts

a) Compléter par « nécessaire », « suffisante » ou « nécessaire et suffisante » : pour un réel $x > 0$, « $x = 1$ » est une condition … pour que $x + \dfrac{1}{x} = 2$.

b) La proposition $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\left(x \neq 0 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} \geq 2\right)$ est-elle vraie ? Justifier.

INDICE

Outil : la question 2. b), puis un contre-exemple. **Début :** une équivalence vraie donne deux implications vraies. **Point délicat :** la question 2 ne porte que sur les réels strictement positifs : essaie un réel négatif.

CORRIGÉ

a) D'après la question 2. b), pour tout réel $x > 0$:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Les deux implications sont vraies : la condition « $x = 1$ » est à la fois suffisante et nécessaire. C'est une condition **nécessaire et suffisante** pour que $x + \dfrac{1}{x} = 2$.

b) Prenons $x = -1$: on a bien $x \neq 0$, et $x + \dfrac{1}{x} = -1 + (-1) = -2$. Comme $-2 < 2$, l'implication est fausse pour $x = -1$.

Conclusion. Le réel -1 est un contre-exemple : la proposition $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\left(x \neq 0 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} \geq 2\right)$ est fausse.

4. 1,5 pts

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) Vérifier que $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

b) En déduire, avec la question 2 appliquée au réel $\frac{x}{y}$, que $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$, puis que l'égalité a lieu si et seulement si $x = y$.

c) Écrire la contraposée de l'implication « si $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 4$, alors $x = y$ ». Pour $x = 1$ et $y = 3$, calculer ce produit et vérifier ce résultat.

INDICE

Outil : le développement d'un produit, puis la question 2. **Début :** remarque que $\frac{y}{x}$ est l'inverse de $\frac{x}{y}$. **Point délicat :** $\frac{x}{y} = 1$ équivaut à $x = y$, car $y \neq 0$.

CORRIGÉ

a) On développe :

$$\begin{aligned}&(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ &= \frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}\\ &= 2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

b) **Inégalité.** Posons $t = \frac{x}{y}$. Comme $x > 0$ et $y > 0$, on a $t > 0$, et $\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$. D'après la question 2, $t+\frac{1}{t} \geq 2$. Avec a) :

$$\begin{aligned}&(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ &= 2+t+\frac{1}{t}\\ &\geq 2+2 = 4.\end{aligned}$$

Cas d'égalité. Le produit vaut 4 si et seulement si $t+\frac{1}{t} = 2$, c'est-à-dire, d'après la question 2, si et seulement si $t = 1$. Comme $y \neq 0$, l'égalité $\frac{x}{y} = 1$ équivaut à $x = y$.

c) **Contraposée.** Si $x \neq y$, alors $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \neq 4$; d'après b), ce produit est alors strictement supérieur à 4.

Vérification. Pour $x = 1$ et $y = 3$:

$$\begin{aligned}&(1+3)\left(1+\frac{1}{3}\right)\\ &= 4\times\frac{4}{3} = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

On a bien $1 \neq 3$ et $\frac{16}{3} > 4$, comme l'annonce la contraposée.

Exercice 5 5 pts

Puissances de deux et carrés : une récurrence à partir d'un rang

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $2^n \geq n^2$ ».

1. 0,75 pts

a) Calculer 2^n et n^2 pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Pour lesquelles de ces valeurs $P(n)$ est-elle vraie ?

b) La proposition $(\forall n \in \mathbb{N})$: $P(n)$ est-elle vraie ?

INDICE

Outil : un calcul, puis un contre-exemple. **Début :** $2^0 = 1$. **Point délicat :** pour réfuter un « pour tout », un seul entier suffit.

CORRIGÉ

a) On obtient :

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	8	16	32
n^2	0	1	4	9	16	25

$P(n)$ est vraie pour $n = 0, 1, 2, 4, 5$; elle est fausse pour $n = 3$, car $8 < 9$.

b) Pour réfuter un « pour tout », un seul entier suffit : l'entier 3 est un contre-exemple.

Conclusion. La proposition $(\forall n \in \mathbb{N})$: $P(n)$ est fausse.

2. 1 pts

Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

a) Vérifier que $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$.

b) En déduire que $n^2 \geq 2n + 1$.

INDICE

Outil : une identité remarquable, puis les propriétés de l'ordre. **Début :** développe $(n-1)^2$. **Point délicat :** de $n \geq 3$, tire d'abord une minoration de $n - 1$, qui est positif.

CORRIGÉ

a) On développe $(n-1)^2$:

$$\begin{aligned}(n-1)^2 - 2 \\ &= n^2 - 2n + 1 - 2 \\ &= n^2 - 2n - 1.\end{aligned}$$

b) Comme $n \geq 3$, on a $n - 1 \geq 2 \geq 0$. Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc $(n-1)^2 \geq 2^2 = 4$. D'après a) :

$$\begin{aligned}n^2 - 2n - 1 &= (n-1)^2 - 2 \\ &\geq 4 - 2 = 2.\end{aligned}$$

Ainsi $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 3$, $n^2 \geq 2n + 1$.

3. 1,5 pts

Démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$.

a) Rédiger l'initialisation au rang 4.

b) Pour l'hérédité, soit $n \geq 4$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie : montrer que $2^{n+1} \geq 2n^2$, puis utiliser la question 2 pour conclure.

INDICE

Outil : le principe de récurrence, à partir du rang 4. **Début :** $2^{n+1} = 2 \times 2^n$. **Point délicat :** écris $2n^2 = n^2 + n^2$, et vérifie que la question 2 s'applique, car $n \geq 4 \geq 3$.

CORRIGÉ

a) **Initialisation.** Pour $n = 4$: $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Comme $16 \geq 16$, $P(4)$ est vraie.

b) **Hérédité.** Soit $n \geq 4$ un entier tel que $2^n \geq n^2$ (hypothèse de récurrence). On multiplie les deux membres par 2, qui est strictement positif :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 2n^2 = n^2 + n^2. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 4 \geq 3$, la question 2 s'applique : $n^2 \geq 2n + 1$. Donc $n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1$, et :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &\geq n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

C'est exactement $P(n+1)$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$.

4. 1 pts

a) Écrire la négation de la proposition $(\forall n \in \mathbb{N}) : P(n)$.

b) En déduire, avec les questions 1 et 3, que $(\exists! n \in \mathbb{N}) : 2^n < n^2$, et donner cet entier.

INDICE

Outil : la négation d'une proposition quantifiée, puis la disjonction des cas. **Début :** distingue les cas $n \leq 3$ et $n \geq 4$. **Point délicat :** « il existe un unique » demande l'existence et l'unicité.

CORRIGÉ

a) La négation d'un « pour tout » est un « il existe », et le contraire de $2^n \geq n^2$ est $2^n < n^2$. La négation est :

$$(\exists n \in \mathbb{N}) : 2^n < n^2$$

b) **Existence.** D'après la question 1, $2^3 = 8 < 9 = 3^2$: l'entier 3 convient.

Unicité. Soit n un entier naturel tel que $2^n < n^2$. Les deux cas $n \leq 3$ et $n \geq 4$ couvrent tous les entiers naturels.

- Si $n \geq 4$, la question 3 donne $2^n \geq n^2$: ce cas est impossible.
- Si $n \leq 3$, alors n est l'un des entiers $0, 1, 2, 3$, et la question 1 montre que seul $n = 3$ vérifie $2^n < n^2$.

Conclusion. Ainsi, $(\exists! n \in \mathbb{N}) : 2^n < n^2$, et cet entier est 3.

5. 0,75 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 4$, $4^n \geq n^4$. Cette inégalité est-elle vraie pour $n = 3$?

INDICE

Outil : la question 3, puis le passage au carré. **Début :** écris $4^n = (2^n)^2$ et $n^4 = \left(n^2\right)^2$. **Point délicat :** élever au carré conserve l'ordre de deux réels positifs.

CORRIGÉ

Soit $n \geq 4$ un entier. D'après la question 3, $2^n \geq n^2$, et $n^2 \geq 0$. Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc :

$$\begin{aligned} 4^n = (2^n)^2 &\geq \left(n^2\right)^2 \\ &= n^4. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 4$, $4^n \geq n^4$.

Pour $n = 3$. $4^3 = 64$ et $3^4 = 81$: comme $64 < 81$, l'inégalité est fausse pour $n = 3$.